Zinseszinz bei konstantem Guthaben

Guthaben G mit p % verzinst beträgt nach N Jahren

$$G_N = G\left(1+\frac{p}{100}\right)^N \tag{1}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}
\text{nach einem Jahr:}\quad G_1 &= G\left(1+\frac{p}{100}\right)\\
\text{nach zwei Jahr:}\quad G_2 &= G_1\left(1+\frac{p}{100}\right)\\
&\vdots\\
\text{nach } N \text{ Jahr:}\quad G_N &= G\left(1+\frac{p}{100}\right)^N
\end{aligned}$$

Zinseszins bei jährlich wachsendem Guthaben

Nun betrachten wir den Fall, dass das Guthaben nicht nur jährlich mit p % verzinst wird, sondern ebenfalls jährlich der selbe Betrag G hinzugezahlt wird. Offensichtlich wird die erste "Rate" G für N Jahre zinsesverzinst, die zweite Rate nur noch $N-1$ Jahre usf. Obige Zinseszinsformel muss also N-mal angewendet werden. Nach N Jahren hat man somit:

$$\begin{aligned}
G'_N &= G\left(1+\frac{p}{100}\right)^N + G\left(1+\frac{p}{100}\right)^{N-1} + \cdots + G\left(1+\frac{p}{100}\right)^1 && (2)\\
&= G\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^N + \left(1+\frac{p}{100}\right)^{N-1} + \cdots + \left(1+\frac{p}{100}\right)^1\right] && (3)
\end{aligned}$$

Offensichtlich würde man den Klammerausdruck gerne in eine kompaktere Form bringen. Um die Rechnung übersichtlicher zu machen führen wir die Bezeichnung $x = \left(1+\frac{p}{100}\right)$ ein. Wir betrachten also die Summe:

$$(x^N + x^{N-1} + \cdots + x) = ?$$

Dabei handelt es sich aber gerade um die sog. "geometrische Reihe" und es gilt:

$$(x^N + x^{N-1} + \cdots + x) = \frac{x(1-x^N)}{1-x}$$

Das gesammelte Guthaben beträgt nach N Jahren also:

$$G'_N = G\frac{x(1-x^N)}{1-x}$$

Bsp.: N= 30 Jahre, G=3000 Euro und p =9 % :

$$\begin{aligned}
G'_N &= G\cdot\frac{x(1-x^N)}{1-x}\ \text{Euro}\\
&= 3000\cdot\frac{1.09(1-1.09^{30})}{1-1.09}\ \text{Euro}\\
&= 445726\ \text{Euro}
\end{aligned}$$