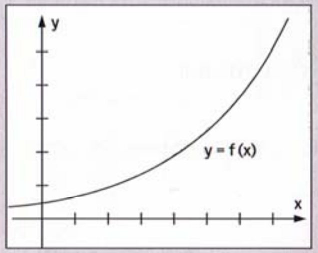
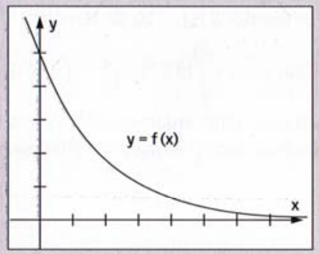
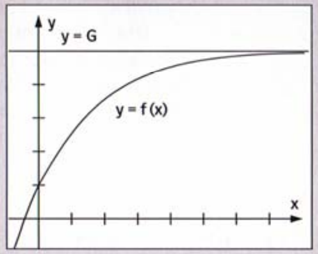
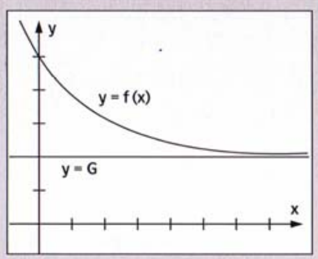
## 2.13 Welche Fragestellungen sind bei Wachstumsvorgängen häufig?

Wachstumsvorgänge sind ein natürliches Anwendungsgebiet für Exponentialfunktionen, wobei die **Wachstumsvorgänge** entweder durch einen **Funktionsterm f(x)** für den Bestand **oder** durch die **Änderungsrate f′(x)** des Bestandes **beschrieben** werden. Die wichtigsten Formen von Wachstumsvorgängen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

> Häufig gibt f(x) den Umfang einer Population, die Intensität einer Größe o. ä. an.
> Die Variable x gibt sehr häufig die Zeit an und wird dann oft mit t bezeichnet.

| | **exponentielles** (natürliches) **Wachstum** | **exponentielle Abnahme** (Zerfall) |
|---|---|---|
| **Funktion f** | $f(x) = f(0) \cdot e^{kx}$ mit $\mathbf{k > 0}$ | $f(x) = f(0) \cdot e^{-kx}$ mit $\mathbf{k > 0}$ |
| **typischer Graph** |   |   |
| **typisches Beispiel** | Vermehrung von Bakterien | radioaktiver Zerfall |

| | **beschränktes Wachstum** | **beschränkte Abnahme** |
|---|---|---|
| **Funktion f** | $f(x) = G - c \cdot e^{-kx}$ mit $\mathbf{k > 0}$ | $f(x) = G + c \cdot e^{-kx}$ mit $\mathbf{k > 0}$ |
| **typischer Graph** |   |   |
| **typisches Beispiel** | Erwärmung einer kalten Flüssigkeit in wärmerer Umgebung | Abkühlung einer warmen Flüssigkeit in kälterer Umgebung |

**Beispiel 1:** *(Exponentielles Wachstum)*

Ein Bazillus, der bei Operationen auftritt, hat eine Verdopplungszeit von 25 min.

a) Beschreiben Sie diesen Vorgang durch eine Funktion, wenn nach einer Operation 100 Bazillen in eine Wunde eingeschlossen wurden.

b) Wann sind bereits eine Million Bazillen im Körper?

**Lösung:**

a) Es sei f(x) die Anzahl der Bazillen nach der Zeit x (in min nach der Operation).

> Eine genaue Darstellung der **Bedeutung von x und f(x)** ist unentbehrlich.

Dann gilt

$$f(x) = f(0) \cdot e^{kx},$$

denn aus dem Begriff „Verdopplungszeit" kann man entnehmen, dass von einem exponentiellen Vorgang auszugehen ist.

Exponentielles Wachstum beruht auf der Annahme, dass die Änderungsrate der Bazillen zu jeder Zeit proportional zur Anzahl der Bazillen ist, und dies scheint hier vernünftig.

Laut Aufgabe ist f(0) = 100 und somit

$$f(x) = 100 \cdot e^{kx}.$$

Die Verdopplungszeit bei exponentiellem Wachstum ist unabhängig vom untersuchten Zeitpunkt. Also gilt

$$200 = 100 \cdot e^{k \cdot 25}$$
$$2 = e^{k \cdot 25}$$
$$k = \tfrac{1}{25} \cdot \ln(2) \approx 0{,}0277.$$

> Näherungswert unbedingt speichern, damit man mit ihm weiterrechnen kann!

Dies ergibt die gesuchte Funktion f etwa zu

$$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}0277 \cdot x}.$$

b) $f(x) = 1\,000\,000$ ergibt

$$1\,000\,000 \approx 100 \cdot e^{0{,}0277 \cdot x}$$
$$10\,000 \approx e^{0{,}0277 \cdot x}$$
$$x \approx \tfrac{1}{0{,}0277} \cdot \ln(10\,000) \approx 332.$$

Nach etwa 330 min (und das sind nur 5,5 h!) sind bereits 1 Million Bazillen im Körper.

**Beispiel 2:** *(Exponentielle Abnahme)*

Die Intensität von Licht, das in eine Wasseroberfläche eintritt, nimmt mit zunehmender Tiefe exponentiell ab. Beträgt die Intensität an der Wasseroberfläche noch 100 %, so sinkt sie in einer Tiefe von 1,0 m bereits auf 24 % ab in klarem Wasser.

a) Skizzieren Sie den Intensitätsverlauf von Licht in Abhängigkeit von der Tiefe.

b) Wie viel Prozent beträgt die Lichtintensität noch in 3,5 m Tiefe?

c) In welcher Tiefe ist die Lichtintensität auf 1% abgesunken?

**Lösung:**

a) Es sei f(x) die Intensität des Lichtes (in Prozent der Intensität an der Wasseroberfläche) in der Wassertiefe x (in m). Dann gilt

$$f(x) = f(0) \cdot e^{-kx}.$$

Wegen f(0) = 100 ergibt sich

$$f(x) = 100 \cdot e^{-kx}.$$

Nun ist $f(1) = 24 = 100 \cdot e^{-k \cdot 1}$ und folglich
$k = -\ln(0{,}24) \approx 1{,}43$. Also gilt etwa

$$f(x) = 100 \cdot e^{-1{,}43x}.$$

b) Nach a) ist $f(3{,}5) = 100 \cdot e^{-1{,}43 \cdot 3{,}5} \approx 0{,}68$,
d. h. in 3,5 m Tiefe beträgt die Lichtintensität noch etwa 0,68 %.

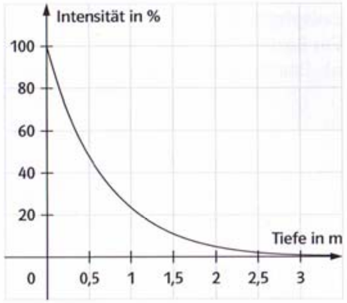
c) Ist $x_0$ die gesuchte Wassertiefe, so gilt

$$f(x_0) = 1 = 100 \cdot e^{-1{,}43 \cdot x_0}$$

und folglich

$$x_0 \approx \frac{-1}{1{,}43} \cdot \ln(0{,}01) \approx 3{,}23.$$

Also ist schon in etwa 3,2 m Tiefe die Lichtintensität auf 1 % abgesunken.




**Beispiel 3:** *(Beschränktes Wachstum)*

Die Anzahl $f(x)$ der Abonnenten einer neuen Tageszeitung zur Zeit $x$ kann nicht beliebig wachsen, vielmehr wird die Zeitung in ihrem Verbreitungsgebiet eine Sättigung $G$ erreichen. Man geht nun davon aus, dass zu jeder Zeit $x$ die Änderungsrate $f'(x)$ proportional zur Zahl $G - f(x)$ der noch möglichen Abonnenten ist.

Die Auflage betrug beim Start der neuen Zeitung 40 000 Exemplare, nach 6 Monaten war sie auf 120 000 Exemplare und nach 12 Monaten auf 180 000 Exemplare angestiegen.

a) Geben Sie an, um was für eine Form von Wachstum es sich handelt und bestimmen Sie dann für f einen Term und skizzieren Sie einen Graphen von f.

b) Mit welcher Auflage kann der Zeitungsherausgeber langfristig rechnen?

c) Ab welchem Zeitpunkt steigt die Auflage um weniger als 5000 Exemplare in einem Monat?

**Lösung:**

a) Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum, deshalb macht man für $f(x)$ den Ansatz

$$f(x) = a - b \cdot e^{-kx},$$

wobei $f(x)$ die Anzahl der Abonnenten zur Zeit $x$ (in Monaten) ist.
Dann gilt laut Aufgabe

$$\begin{array}{lll} f(0) = 40\,000, & \text{d.h. } a - b = 40\,000, & [1] \\ f(6) = 120\,000, & \text{d.h. } a - b \cdot e^{-6k} = 120\,000, & [2] \\ f(12) = 180\,000, & \text{d.h. } a - b \cdot e^{-12k} = 180\,000. & [3] \end{array}$$

Das Gleichungssystem [1], [2] und [3] ist nicht ganz einfach zu lösen.
Aus [1] folgt $a = b + 40\,000$, und damit ergibt sich aus [2] und [3]

$$b(1 - e^{-6k}) = 80\,000 \text{ und } b(1 - e^{-12k}) = 140\,000.$$

Dann ist $\frac{1 - e^{-6k}}{1 - e^{-12k}} = \frac{4}{7}$ und somit $\frac{4}{7}e^{-12k} - e^{-6k} + \frac{3}{7} = 0$.

Mit dem Taschenrechner oder mit der Substitution $e^{-6k} = u$ erhält man nun

$$k \approx 0{,}04795.$$

Dann ist $b = \frac{80\,000}{1 - e^{-6k}} \approx 320\,000$ und $a = b + 40\,000 \approx 360\,000$.

Also gilt etwa

$$f(x) = 360\,000 - 320\,000 \cdot e^{-0{,}04795 \cdot x}$$

und man erhält den nebenstehenden Graphen.

b) Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-0{,}04795 \cdot x} = 0$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 360\,000,$$

d. h. man kann langfristig mit einer Auflage von 360 000 Exemplaren rechnen.

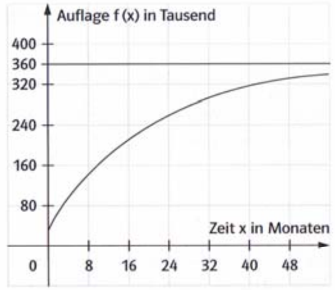
c) Ändert sich zum Zeitpunkt $x_0$ die Auflage im Folgemonat um genau 5000 Exemplare, so gilt

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) = 5000,$$

und dies ergibt

$$\begin{aligned} 5000 &= 320\,000 \cdot \left(e^{-0{,}04795 \cdot x_0} - e^{-0{,}04795 \cdot (x_0 + 1)}\right) \\ e^{-0{,}04795 \cdot x_0} &= \frac{1}{64\left(1 - e^{-0{,}04795}\right)} \\ x_0 &\approx 22{,}9. \end{aligned}$$

Also ändert sich im 23. Monat nach dem Erscheinen die Auflage erstmals um weniger als 5000 Exemplare.




**Beispiel 4:** *(Beschränkte Abnahme)*

In einem Zimmer mit der konstanten Temperatur 25 °C befindet sich eine Tasse Kaffee mit der Temperatur 80 °C. Nach 3 min ist die Kaffeetemperatur um 10 °C gesunken.

a) Man nimmt an, dass die Kaffeetemperatur $f(x)$ zur Zeit $x$ durch eine Funktion f mit $f(x) = a + b \cdot e^{-kx}$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstanten a, b und k und skizzieren Sie einen Graphen von f.

b) Nach welcher Zeit liegt die Kaffeetemperatur unter 40 °C ?

**Lösung:**

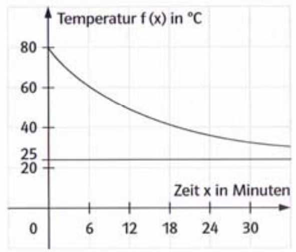
a) Es sei $f(x)$ die Temperatur des Kaffees (in °C) zur Zeit $x$ (in min). Dann gilt

$$f(0) = a + b = 80,$$
$$f(3) = a + b \cdot e^{-3k} = 70,$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a = 25.$$

Hieraus folgt sofort $a = 25$ und $b = 55$.
Dann ist $25 + 55 \cdot e^{-3k} = 70$ und somit
$e^{-3k} = \frac{9}{11}$, d. h. $k = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{11}\right) \approx 0{,}06689$.
Dies ergibt etwa

$$f(x) = 25 + 55 \cdot e^{-0{,}06689 \cdot x},$$

mit dem nebenstehenden Graph.




b) Für den gesuchten Zeitpunkt $x_0$ gilt
$f(x_0) = 40$, und dies ergibt $e^{-0{,}06689 \cdot x_0} \approx \frac{3}{11}$ und damit $x_0 \approx 19{,}4$.
Also liegt nach etwa 19,4 min die Kaffeetemperatur unter 40 °C.