
Die formalistische Grundlegung der Mathematik

Von

Johann v. Neumann (Berlin)

I.

Die Frage nach den Ursachen der allgemein angenommenen unbedingten Zuverlässigkeit der klassischen Mathematik ist durch die kritischen Grundlagen-Untersuchungen der letzten Jahrzehnte, insbesondere aber durch Brouwers System des „Intuitionismus“, erneut aufgerollt worden. Das Bemerkenswerte dabei ist, daß diese, an und für sich philosophisch-erkenntnistheoretische Frage, im Begriffe ist, sich in eine mathematisch-logische zu verwandeln. Die scharfe Formulierung der Mißstände in der klassischen Mathematik durch Brouwer, die exakte und erschöpfende Beschreibung ihrer Methoden (der guten und der bösen) durch Russell, und die von Hilbert geschaffenen Ansätze zur mathematisch-kombinatorischen Untersuchung dieser Methoden und ihrer Zusammenhänge — diese drei wichtigen Vorstöße im Gebiete der mathematischen Logik haben es mit sich gebracht, daß heute in den Grundlagenfragen immer mehr eindeutige mathematische Fragestellungen und nicht Geschmacksunterschiede zu untersuchen sind.

Da die anderen Referate sowohl den durch Brouwer abgegrenzten Bereich der unbedingt und ohne jede Rechtfertigungsnotwendigkeit zuverlässigen, „intuitionistischen“ oder „finiten“ Begriffsbildungen und Beweismethoden, als auch die Russellsche, und in Anlehnung an ihn von seiner Schule weitergeführte, formale Kennzeichnung des Bestandes der klassischen Mathematik erschöpfend behandeln, brauchen wir auf diese nicht näher einzugehen — obwohl ihre Kenntnis selbstverständlich die unerläßliche Voraussetzung zum Verständnis der Zweckmäßigkeit, der Tendenz und des *modus procedendi* der Hilbertschen Beweistheorie ist. Wir wenden uns vielmehr sofort der Beweistheorie zu.

Ihr Grundgedanke ist dieser: Auch wenn die inhaltlichen Aussagen der klassischen Mathematik unzuverlässig sein sollten, so ist

es doch sicher, daß die klassische Mathematik ein in sich geschlossenes, nach feststehenden, allen Mathematikern bekannten Regeln vor sich gehendes Verfahren involviert, dessen Inhalt ist, gewisse, als „richtig“ oder „bewiesen“ bezeichnete, Kombinationen der Grundsymbole sukzessiv aufzubauen. Und zwar ist dieses Aufbauverfahren sicher „finit“ und direkt konstruktiv. Um sich den wesentlichen Unterschied klarzumachen, der zwischen der u. U. unkonstruktiven Behandlung des „Inhalts“ der Mathematik (reelle Zahlen u. ä.), und der immer konstruktiven Verknüpfung ihrer Beweisschritte besteht, vergegenwärtige man sich das folgende Beispiel: Es liege ein klassisch-mathematischer Beweis der Existenz einer reellen Zahl x mit einer gewissen, recht komplizierten und tiefliegenden Eigenschaft $E(x)$ vor. Dann kann es vorkommen, daß man diesem Beweise in keiner Weise ein Verfahren entnehmen kann, ein x mit $E(x)$ zu konstruieren (wir geben gleich ein Beispiel hierfür an); demgegenüber könnte man natürlich, wenn der Beweis die Konventionen des mathematischen Schließens irgendwo verletzen sollte, d. h. wenn in ihm ein Fehler existierte, diesen Fehler durch ein endliches Probiervorgehen sicher finden. D. h.: Die Behauptung eines klassisch-mathematischen Satzes läßt sich nicht immer finit (d. h. überhaupt) kontrollieren, wohl aber der formale Weg, auf dem man zu ihr gelangt. Will man also die klassische Mathematik in bezug auf ihre Zuverlässigkeit prüfen, was prinzipiell nur durch Zurückführung auf das a priori zuverlässige finite System (d. i. das Brouwersche) möglich ist, so darf man nicht ihre Aussagen untersuchen, sondern ihre Beweismethoden. Sie ist als ein kombinatorisches Spiel mit den Grundsymbolen aufzufassen, und es ist kombinatorisch-finit festzustellen, zu welchen Kombinationen der Grundsymbole ihre, „Beweis“ genannten, Aufbaumethoden führen können. —

Wir holen noch das Beispiel eines nichtkonstruktiven Existenzbeweises nach. Sei $f(x)$ eine von 0 bis $\frac{1}{2}$ lineare, von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ lineare, und

von $\frac{2}{3}$ bis 1 lineare Funktion, usw. sei $f(0) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{2n}}{2^n}$,
 $f(\frac{2}{3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{2n-1}}{2^n}$, $f(1) = 1$. Dabei ist ε_n so definiert: wenn $2n$ Summe

von zwei Primzahlen ist, so ist $\varepsilon_n = 0$, sonst $\varepsilon_n = 1$. Offenbar ist $f(x)$ stetig, und an jeder Stelle x beliebig genau effektiv berechenbar. Wegen $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ existiert ein x mit $f(x) = 0$ in $0 \leq x \leq 1$

(man erkennt, daß sogar $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ ist). Trotzdem würde die Angabe einer Wurzel mit einer Genauigkeit $< \frac{1}{3}$ auf große, beim heutigen Stande der Wissenschaft nicht überwundene Schwierigkeiten stoßen: denn sie würde nach sich ziehen, daß man mit Bestimmtheit die Existenz einer Wurzel $< \frac{2}{3}$ bzw. $> \frac{1}{3}$ voraussagen könnte (je nachdem, ob der Näherungswert $\leq \frac{1}{3}$ oder $\geq \frac{2}{3}$ ist). Ersteres schlosse $f(\frac{1}{3}) < 0$, $f(\frac{2}{3}) = 0$ aus, letzteres $f(\frac{1}{3}) = 0$, $f(\frac{2}{3}) > 0$; d. h. ersteres den Fall, daß alle ε_n mit ungeradem n verschwinden, aber nicht alle mit geradem n , letzteres den umgekehrten. D. h. wir hätten bewiesen, daß die bekannte Goldbachsche Vermutung (wonach jedes $2n$ Summe zweier Primzahlen ist), falls sie nicht allgemein zutrifft, schon für ungerade n versagen muß, bzw. schon für gerade n . Und diesen Beweis kann heute noch kein Mathematiker erbringen (weder fürs erste, noch fürs zweite) — als kann auch keiner die Lösung von $f(x) = 0$ genauer als mit dem Fehler $\frac{1}{3}$ bestimmen. (Mit dem Fehler $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{3}$ ein Näherungswert: denn die Wurzel liegt in $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, d. h. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.) —

II.

Die Aufgaben, die die Hilbertsche Beweistheorie zu lösen hat, sind somit die folgenden:

1. Alle Symbole, die in Mathematik und Logik Verwendung finden, aufzuzählen. Sie sollen „Grundsymbole“ heißen. Unter ihnen kommen u. a. die Symbole \neg , \rightarrow (die die „Negation“ und die „Implikation“ vertreten) vor.

2. Alle Kombinationen dieser Symbole, welche die in der klassischen Mathematik als „sinnvoll“ bezeichneten Aussagen vertreten, eindeutig zu kennzeichnen. Sie sollen „Formeln“ heißen. (Man beachte: nur „sinnvoll“, nicht etwa auch „richtig“. $1 + 1 = 2$ ist sinnvoll, aber auch $1 + 1 = 1$, ganz unabhängig davon, daß das eine richtig, das andere falsch ist. Sinnlos ist z. B. $1 + \rightarrow = 1$, oder $++1 = -$.)

3. Es ist ein Konstruktionsverfahren anzugeben, das sukzessiv alle Formeln herzustellen gestattet, welche den „beweisbaren“ Behauptungen der klassischen Mathematik entsprechen. Dieses Verfahren heiße darum „Beweisen“.

4. Es ist (finit-kombinatorisch) zu zeigen, daß diejenigen Formeln, welche finit kontrollierbaren (nachrechenbaren arithmetischen) Behauptungen der klassischen Mathematik entsprechen, dann und nur

dann nach 3. bewiesen (d. h. konstruiert) werden können, wenn das soeben erwähnte wirkliche „Nachrechnen“ der ihnen entsprechenden mathematischen Behauptungen die Richtigkeit derselben ergibt.

Sind 1.—4. gesichert, so steht damit die absolute Zuverlässigkeit der klassischen Mathematik für den folgenden Zweck fest: als abkürzende Methode zur Berechnung arithmetischer Ausdrücke, bei welchen das elementare Ausrechnen zu umständlich wäre. Da sie aber immer in diesem Sinne auf die Erfahrung angewandt wird, ist damit die Erfahrungstatsache ihrer Zuverlässigkeit in hinreichendem Maße erklärt.

Nun ist zu beachten, daß 1.—3. nach den Arbeiten Russells und seiner Schule heute gar keine Schwierigkeiten mehr enthalten: Die durch 1.—3. nahegelegte Formalisierung der Mathematik und Logik kann auf viele verschiedene Weisen geleistet werden. Das eigentliche Problem ist 4.

Bei 4. ist nun folgendes zu beachten: Wenn das „effektive Nachrechnen“ einer numerischen Formel deren Richtigkeit ergibt, so läßt sich dies in einen formalen Beweis dieser Formel verwandeln, falls 1.—3. die klassische Mathematik wirklich erschöpfend wiedergeben. Das Kriterium in 4. ist also sicher notwendig, und nur die Hinreichendheit ist zu prüfen. Ergibt nun bei einer numerischen Formel das „effektive Nachrechnen“ deren Unrichtigkeit, so besagt dies, daß man aus ihr eine Beziehung $p = q$ „errechnen“ kann, in der p, q zwei verschiedene, effektiv gegebene Zahlen sind. Wie vorhin, ergäbe dies einen formalen Beweis (nach 3.) für $p = q$. Man erkennt leicht, daß hieraus ein Beweis von $1 = 2$ gewonnen werden kann. Das einzige also, was wir zeigen müssen, um 4. sicherzustellen, ist die formale Unbeweisbarkeit von $1 = 2$ — diese eine spezielle unrichtige numerische Beziehung genügt es zu untersuchen.

Die Unbeweisbarkeit der Formel $1 = 2$ durch die Methoden von 3. wird als „Widerspruchsfreiheit“ bezeichnet. Das eigentliche Problem ist also der finit-kombinatorische Beweis der Widerspruchsfreiheit.

III.

Um die Ansätze zum Widerspruchsfreiheitsbeweise andeuten zu können, müssen wir das Verfahren des formalen Beweisens (nach 3.) etwas näher erläutern. Es wird folgendermaßen definiert:

31. Gewisse Formeln heißen Axiome, sie sind in eindeutiger und finiter Weise gekennzeichnet. Jedes Axiom gilt als bewiesen.

3₂. Sind a , b zwei sinnvolle Formeln, und sind a und $a \rightarrow b$ beide schon bewiesen, so ist auch b bewiesen.

Man beachte: 3₁, 3₂ erlauben wohl, alle beweisbaren Formeln sukzessiv aufzustellen, aber der Prozeß ist nie zu Ende, und sie enthalten kein Verfahren, um von einer gegebenen Formel e zu entscheiden, ob sie beweisbar ist. Denn es ist nicht zu übersehen, welche Formeln sukzessiv bewiesen werden müssen, um schließlich e zu beweisen: es könnten viel kompliziertere und ganz anders gebaute Formeln darunter sein, als e selbst. (Jeder, der z. B. die analytische Zahlentheorie kennt, weiß, wie sehr mit dieser Möglichkeit gerade in den schönsten Kapiteln der Mathematik zu rechnen ist.) Das Problem, durch ein (natürlich finites) allgemeines Verfahren die Beweisbarkeit irgendeiner gegebenen Formel zu entscheiden, ist ein viel tieferes und schwierigeres, als das hier behandelte: es ist das sog. Entscheidungsproblem der Mathematik.

Es würde zu weit führen, die Axiome anzugeben, die in der klassischen Mathematik Verwendung finden. Zur Kennzeichnung genüge folgendes: Es sind unendlich viele Formeln, die als Axiome anzusehen sind (so ist z. B. bei unserer Definition eine jede der Formeln $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, ... Axiom), aber sie entstehen durch Einsetzung aus endlich vielen Schemen. Diese sind so gebaut: „Wenn a , b , c irgendwelche Formeln sind, so ist $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$ Axiom“, u. ä.

Würde es nun gelingen, eine Klasse R von Formeln anzugeben, derart, daß

- α) Jedes Axiom zu R gehört,
- β) Mit a und $a \rightarrow b$ jedenfalls auch b zu R gehört.
- γ) $1 = 2$ nicht zu R gehört,

so wäre die Widerspruchsfreiheit erwiesen: denn offenbar müßte nach α), β) jede bewiesene Formel zu R gehören, nach γ) also $1 = 2$ unbeweisbar sein. Indessen ist an das Angeben einer solchen Klasse R heute nicht zu denken: diese Aufgabe bietet Schwierigkeiten, die mit denjenigen des Entscheidungsproblems vergleichbar sind.

Die folgende Bemerkung leitet indessen von hier zu einer bedeutend einfacheren Aufgabe hinüber: Wenn unser System widerspruchsvoll wäre, so gäbe es einen Beweis von $1 = 2$. Bei diesem Beweise können nur endlich viele Axiome Verwendung gefunden haben, ihre Menge heiße \mathfrak{M} . Dann ist also bereits das Axiomensystem \mathfrak{M} widerspruchsvoll. Somit ist das Axiomensystem der klassischen Mathematik gewiß widerspruchsfrei, wenn es jedes endliche

Teilsystem auch ist. Und dies ist nach dem obigen gewiß der Fall, wenn wir zu jeder endlichen Menge \mathfrak{M} von Axiomen eine Formelklasse $R_{\mathfrak{M}}$ angeben können, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $\alpha)$ Jedes Axiom aus \mathfrak{M} gehört zu $R_{\mathfrak{M}}$.
- $\beta)$ Mit a und $a \rightarrow b$ gehört auch b zu $R_{\mathfrak{M}}$.
- $\gamma)$ $1 = 2$ gehört nicht zu $R_{\mathfrak{M}}$.

Hier ist gar keine Verwandtschaft mit dem (viel zu schwierigen) Entscheidungsproblem vorhanden, denn $R_{\mathfrak{M}}$ hängt von \mathfrak{M} ab, und sagt nichts über Beweisbarkeit schlechthin (mit Hilfe aller Axiome) aus.

Es ist selbstverständlich, daß für $R_{\mathfrak{M}}$ eine effektive, finite Konstruktion (für jede effektiv gegebene endliche Axiomenmenge \mathfrak{M}) zu fordern ist; und daß die Beweise von $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ auch finit sein müssen. —

Der gegenwärtige Stand der Dinge ist dadurch gekennzeichnet, daß die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik immer noch unbewiesen ist, dagegen dieser Beweis für ein etwas engeres mathematisches System bereits geglückt ist. Dieses ist mit einem System eng verwandt, welches *Weyl* vor der Aufstellung des intuitionistischen Systems vorgeschlagen hat; dasselbe geht wesentlich über den intuitionistischen Rahmen hinaus, ist aber enger als die klassische Mathematik. (Literaturverweise findet der Leser z. B. in *Weyls* Artikel über die „Philosophie der Mathematik“ im Handbuch der Philosophie, Oldenbourg, München). Dadurch hat *Hilberts* System die erste Kraftprobe bestanden: die Rechtfertigung eines nicht finiten und nicht rein konstruktiven mathematischen Systems ist mit finit-konstruktiven Mitteln geglückt. Ob es gelingen wird, diese Rechtfertigung am schwierigeren und wesentlicheren System der klassischen Mathematik zu wiederholen, wird die Zukunft lehren.