

Vollständigkeit der reellen Zahlen

Vorlesung zur Didaktik der Analysis

take home message I

- Wollte man mit Zahlen nur „rechnen“, könnte man mit den rationalen Zahlen zufrieden sein....
- Aber wir wollen mit ihnen auch „messen“, also jeder Strecke einen Zahlwert zuordnen können.

take home message II

Die reellen Zahlen sind „vollständig“. Das heißt, dass beim Übergang zu \mathbb{R} die „Löcher“ auf der Zahlengerade, die in \mathbb{Q} noch existieren (e, π , $\sqrt{2}$, etc.pp.), **geschlossen** werden.

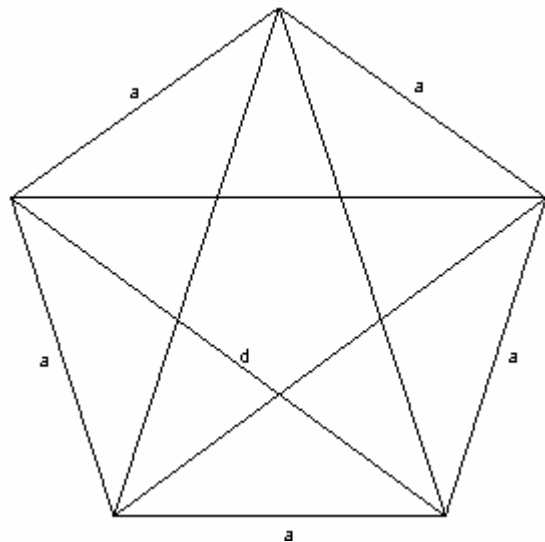
Für die Analysis ist dies zentral, denn erst dadurch ist die Existenz von Grenzwerten gesichert!

Inhalt

- Geschichtliche Vorbemerkung
- Exkurs: Mächtigkeit von \mathbb{Q} , \mathbb{A} und \mathbb{R}
- Formale Definition von \mathbb{R}
 - Cauchy-Folgen
 - Dedekindsche Schnitte
 - Intervallschachtelung
 - Axiomatisch
- Aus der Praxis: e -Funktion auf \mathbb{R}

Die Entdeckung der Irrationalität

- Vermutlich um 450 v. Chr. durch Hippasos von Metapont entdeckt



$$\frac{d}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$$

"Ich habe ja wohl auch selbst erst recht spät etwas davon vernommen and musste mich über diesen Übelstand bei uns höchlich wundern. Es kam mir vor, als wäre das gar nicht bei Menschen möglich, sondern nur etwa bei Schweinevieh. Und da schämte Ich mich, nicht nur für mich selbst, sondern auch für alle Hellenen.,, (Plato im „Staat“)

Kleine Übung:

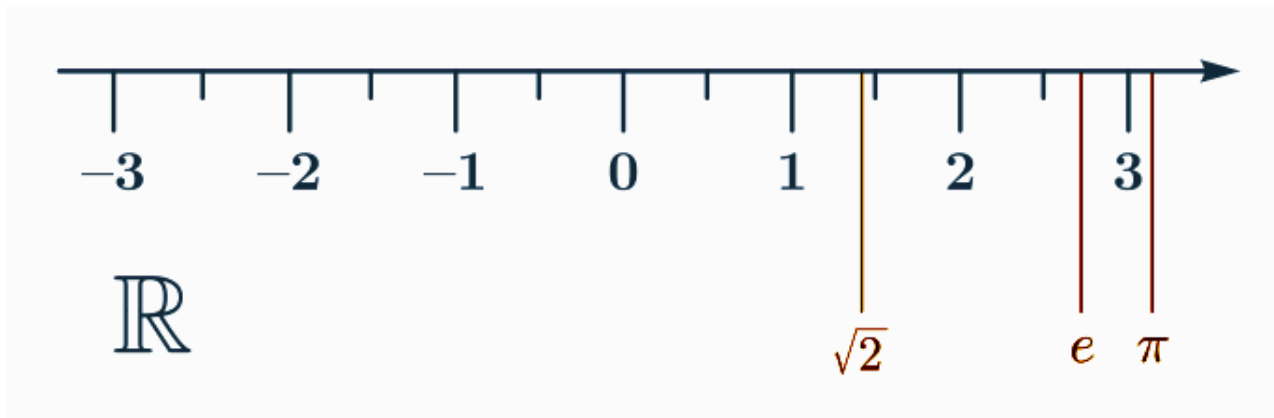
Zeigen sie, dass das Teilungsverhältnis „goldener Schnitt“ durch $\Phi = \frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$ gegeben ist.

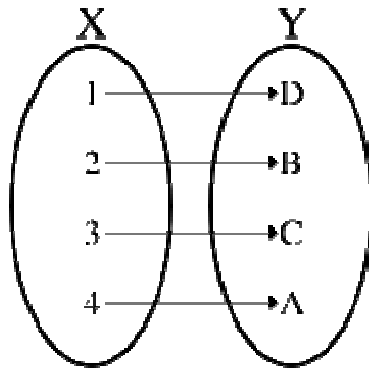
Zur Erinnerung: Die längere Strecke d steht zu a im selben Verhältnis wie $d+a$ zu d !

Mächtigkeit von \mathbb{Q} und \mathbb{R}

Eine naheliegende Frage lautet: „wieviel“ hat man durch die Vervollständigung von \mathbb{Q} „ hinzugewonnen“, d.h. „wie viele“ reelle Zahlen gibt es eigentlich...

- (i) es gibt bereits unendlich viele rationale Zahlen, und „ $\infty + 1 = \infty$ “.
- (ii) Irrationale Zahlen „scheinen selten“ zu sein.



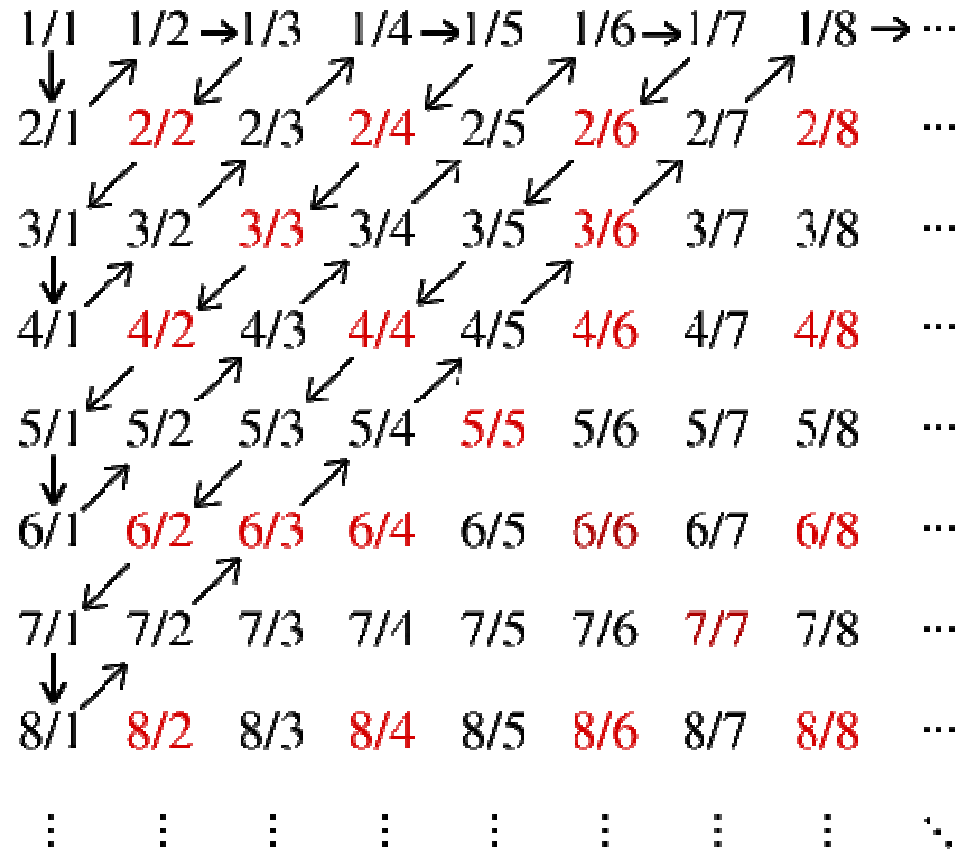


Der Begriff der Anzahl bzw. der „Mächtigkeit“ einer Menge muss sinnvoll erweitert werden:

- im **Endlichen**: zwei Mengen sind gleich mächtig, wenn es eine Bijektion zwischen ihren Elementen gibt
- im **Unendlichen**: Eine Menge heißt „abzählbar“ unendlich, wenn es eine Bijektion zu \mathbb{N} gibt.

Satz: \mathbb{Q} ist abzählbar:

Beweis: „1. Cantorsches Diagonalverfahren“



Beachte: einige **Brüche** kommen sogar mehrfach vor...

Satz: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar

Es sei P ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, $P(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$. Die Höhe von P sei definiert als $h(P) = |a_0| + \dots + |a_n| + n$. Zu jeder vorgegebenen Höhe > 0 gibt es nur **endlich** viele Polynome, welche wiederum nur endlich viele Nullstellen besitzen. Die

Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid x \text{ ist Nullstelle eines ganzzahligen Polynoms } P$

mit $h(P) = n\}$ ist gerade die Menge der algebraischen Zahlen \mathbb{A} . Als abzählbare Vereinigung **endlicher** Mengen ist \mathbb{A} daher abzählbar.

Satz: \mathbb{R} ist *nicht* abzählbar

Beweis (durch Widerspruch)

Sei \mathbb{R} abzählbar. Dann kann man eine Liste in folgender Form angeben, in der **jede** reelle Zahl (zwischen 0 und 1) enthalten ist:

0,0282712901...

0,3465423534...

0,8782872482...

0,3766328287...

.....

0,0282712901...

0,3465423534...

0,8782872482...

0,3766328287...

.....

aus dieser Liste kann die folgende Zahl abgeleitet werden: 0,0486...

jede Ziffer kann nun um eins erhöht werden:
0,1597...

Nach Konstruktion unterscheidet sich diese Zahl jedoch in mindestens einer Stelle von jeder Zahl in der Liste, d.h. sie ist **nicht** in ihr enthalten (im **Widerspruch** zur V.).

Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen (Cantor, 1872)



Georg Cantor (1845-1918)

Vorbemerkung: konvergente Folgen (in \mathbb{Q})

Eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Folgegliedern aus \mathbb{Q} heißt konvergent gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{Q}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index M gibt, sodass $|r_n - a| < \varepsilon$ für $n > M$.

Für $a=0$ nennt man (r_n) eine „Nullfolge“

- Definition:

- Eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge** (oder „Fundamentalfolge“), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index M gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder weniger als ε voneinander entfernt sind, d.h. $|r_n - r_m| < \varepsilon$ für $n, m > M$.

Zusammenhang zur Konvergenz:

Satz: Jede konvergente rationale Folge ist eine Cauchy-Folge

Beweis: Sei a der Grenzwert der rationalen Folge (r_n) , dann gilt:

$$|r_n - r_m| = |(r_n - a) - (r_m - a)| \leq |r_n - a| + |r_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Frage: gilt auch das Umgekehrte, d.h. konvergiert in \mathbb{Q} jede Cauchy-Folge?

Antwort: Nein – manchmal „fehlt“ der Grenzwert

Bsp.: $a_0 = 1$ ist Cauchy-Folge
konvergiert aber nicht in \mathbb{Q} !
(der „Grenzwert“ ist nämlich $\sqrt{2}$)
 $a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + \frac{1}{a_i}$

Idee: die nichtkonvergenten Cauchy-Folgen werden mit irrationalen Zahlen identifiziert...

- Definition einer Äquivalenzrelation: Zwei Cauchy-Folgen heißen äquivalent $(a_n) \sim (b_n)$, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

Bsp.: $(0,0,0,0,\dots) \sim (1/n)_n$

Übung: zeige, dass „ \sim “ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist – also Äquivalenzklassen erklärt!

Cantor: „Die reellen Zahlen sind Äquivalenzklassen von rationalen Cauchy-Folgen.“

Bsp.: $1/3$ entspricht: $(1/3, 1/3, 1/3, \dots)$ der konstanten Folge...

mit $r_n = a_0 + \sum_{j=1}^n 10^{-j} a_j$ ist $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die der irrationalen Zahl mit entsprechender Dezimalpunktdarstellung entspricht...

Addition und Multiplikation in \mathbb{R} ...

Es gilt: wenn (r_n) und (s_n) rationale Cauchy-Folgen sind, dann ist es auch deren Summe und deren Produkt!

entsprechend definiert man:

$$x+y = [(r_n)+(s_n)]_{\sim}$$

$$x \cdot y = [(r_n) \cdot (s_n)]_{\sim}$$

Klar: Wohldefiniertheit, Assoziativität, Distributivität etc. müssen noch aus den Eigenschaften der Cauchy-Folgen abgeleitet werden...

Zusammenfassung der Cantor-Konstruktion:

- Konvergente Folgen und Cauchy-Folgen können auch in \mathbb{Q} definiert werden
- Allerdings konvergieren nicht alle Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} !
- Das besondere an Cauchy-Folgen ist, dass in ihrer Definition der Grenzwert a nicht vorkommt!
- Die „fehlenden Grenzwerte“ (=irrationale Zahlen) werden als Äquivalenzklassen der entsprechenden Cauchy-Folgen definiert.
- Auf diese Weise hat man die rationalen Zahlen „vervollständigt“, denn man definiert ganz allgemein: „ein metrischer Raum ist vollständig, wenn in ihm alle Cauchy-Folgen konvergieren“.

Konstruktion der reellen Zahlen mit Hilfe von Dedekind'schen Schnitten (Dedekind, 1888)

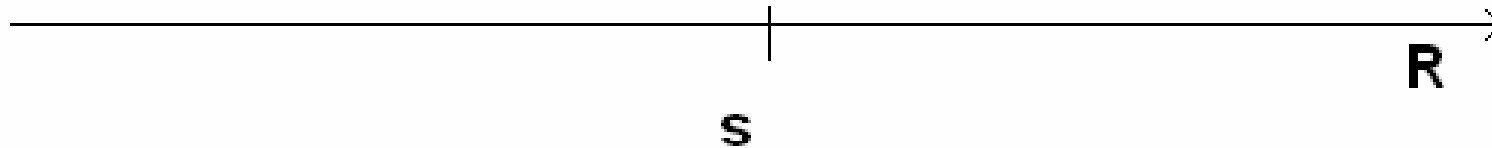


Richard Dedekind (1831-1916)

Motivation

Durch jede reelle Zahl s kann man die Menge \mathbb{R} in „zwei Hälften“ A und B zerschneiden. Dazu definieren wir

$$A = \{r \in \mathbb{R} \mid r < s\} \text{ und } B = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq s\}.$$



Dann haben die Mengen A und B folgende Eigenschaften:

- A und B sind nicht leer.
- $A \cup B = \mathbb{R}$.
- Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt $a < b$.

Es sei \mathbb{Q} die geordnete Menge der rationalen Zahlen und A, B seien nicht-leere Teilmengen von \mathbb{Q} . Das Paar (A, B) heißt *Dedekindscher Schnitt* in \mathbb{Q} , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $A \cup B = \mathbb{Q}$ und $A \cap B = \emptyset$.
- (2) Für jedes $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt: Wenn $x \in A$ und $y \in B$, so $x < y$.

Der Dedekindsche Schnitt (A, B) definiert eine Zerlegung von \mathbb{Q} in zwei disjunkte Klassen, wobei A *Unterklasse* und B *Oberklasse* bei der Zerlegung genannt wird. Der Eindeutigkeit wegen betrachten wir nur solche Schnitte, bei denen die jeweilige Unterklasse kein größtes Element enthält. Diese reichen aus, um die reellen Zahlen zu definieren.

Für B gibt es zwei Möglichkeiten:

1. B enthält eine kleinste rationale Zahl, d.h., es existiert ein $r \in B$, so daß $r \leq x$ für jedes $x \in B$.
2. B enthält keine kleinste rationale Zahl.

Im ersten Fall legt der Dedekindsche Schnitt die *rationale Zahl* r fest, im zweiten Fall bestimmt (A, B) eine sogenannte *Lücke*. Die „Lücken“ werden als die *irrationalen Zahlen* interpretiert. Die Menge der *reellen Zahlen* wird dann als Menge aller Dedekindschen Schnitte definiert. Eine reelle Zahl ist also nach dieser Definition ein Dedekindscher Schnitt. Das eigentliche Problem besteht nun darin, in der Menge der so gegebenen reellen Zahlen eine Addition und eine Multiplikation zu definieren und eine Ordnungsrelation festzulegen.

Beispiel für Dedekindsche Schnitte:

Allgemein: Die **Obermenge** legt den DS bereits fest, da die Untermenge ihr komplement ist!

Beispiele:

Rationale Zahl durch: $\frac{1}{2} := \{r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ und } r \geq \frac{1}{2}\}$

Irrationale Zahl: $\sqrt{2} := \{r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ und } r > 0 \text{ und } r^2 > 2\}$

Konstruktion der reellen Zahlen mit Hilfe der Intervallschachtelung (Bachmann, 1892)

Als Intervallschachtelung bezeichnet man eine Folge $(f_n) = ([a_n, b_n])$, wobei

- (a_n) monoton wächst und (b_n) monoton fällt
- $a_n < b_n$ für alle n
- $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist

Man nennt $a \in \mathbb{Q}$ inneren Punkt (oder Zentrum) der Intervallschachtelung, wenn für alle n gilt $a \in [a_n, b_n]$. Es gilt:

Satz Wenn die Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ einen inneren Punkt hat, dann ist dieser eindeutig bestimmt.

Man definiert: Zwei Intervallschachtelungen heißen äquivalent, d.h. es gilt $([a_n, b_n]) \sim ([c_n, d_n])$ genau dann, wenn $(d_n - a_n)$ eine Nullfolge ist. Man kann zeigen, dass äquivalente Intervallschachtelungen, die einen inneren Punkt haben, den *gleichen* inneren Punkt haben.

Reelle Zahlen durch Intervallschachtelung:

- Wie nicht anders zu erwarten: in \mathbb{Q} hat **nicht** jede Intervallschachtelung ein Zentrum.
- Die irrationalen Zahlen können nun als Äquivalenzklassen von rationalen Intervallschachtelungen definiert werden, die keine Zentrum haben.

Axiomatische Definition von \mathbb{R}

- \mathbb{R} erfüllt die **Körperaxiome** (2 Verknüpfungen, assoziativ, distributiv, ...)
- \mathbb{R} ist **geordnet** (Relation $<$ mit...)
- **Ordnungsvollständigkeit**: jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein kleinste obere Schranke („Supremum“).

Dieses Axiom ist äquivalent zur gemeinsamen Forderung von:

- Archimedisches Axiom (zu jedem $d > 0$ und $m \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$: $nd > m$)
- Vollständigkeit („Jede Cauchy-Folge“ konvergiert)

Zur axiomatischen Definition der reellen Zahlen

- Das **Aufstellen** dieses Axiomensystems sichert noch nicht die **Existenz** der reellen Zahlen!

Zusammenfassung I

- Es existieren verschiedene Möglichkeiten die reellen Zahlen zu definieren. Diese fallen in zwei Klassen:
 - Konstruktion aus \mathbb{Q}
 - Cauchy-Folgen
 - Dedekindsche Schnitte
 - Intervallschachtelung
 - Axiomatisch
- Die Äquivalenz all dieser Verfahren kann (und muss!) bewiesen werden.

Zusammenfassung II

Die sog. „**Vollständigkeit**“ der reellen Zahlen sichert, dass die Zahlengerade eine sehr **intuitive** Eigenschaft erhält:

Jedem Punkt entspricht eine Zahl

Um dies zu erreichen, muss allerdings einigermaßen **unintuitive** Mathematik gemacht werden...

take home message I

- Wollte man mit Zahlen nur „rechnen“, könnte man mit den rationalen Zahlen zufrieden sein....
- Aber wir wollen mit ihnen auch „messen“, also jeder Strecke einen Zahlwert zuordnen können.

take home message II

Die reellen Zahlen sind „vollständig“. Das heißt, dass beim Übergang zu \mathbb{R} die „Löcher“ auf der Zahlengerade, die in \mathbb{Q} noch existieren (e , π , $\sqrt{2}$, etc.pp.), geschlossen werden.

Für die Analysis ist dies zentral, denn erst dadurch ist die Existenz von Grenzwerten gesichert!

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Noch Fragen?