Die Naturwissenschaften 66. Jahrgang Heft 8 August 1979

Moderne Wissenschaftstheorie. Ein Überblick

Teil I: Moderne Logik und Grundlagen der Mathematik

Wolfgang Stegmüller

Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie, D-8000 München

In the present article, first, the considerable superiority of modern logic to traditional (aristotelian) logic is described with reference to logical connectives, quantifiers and relations. Second, it is shown how the antinomies of set theory created the foundational crisis of mathematics, leading to three different approaches, namely intuitionism, pragmatic axiomatics and proof theory.

Eine Schilderung der Zielsetzungen heutiger Wissenschaftstheorie, die für sich verständlich und informativ ist und die weder eine unübersehbare und scheinbar zusammenhanglose Fülle von Themen anführt noch den anderen Fehler begeht, ständig in einen dem Laien nicht verständlichen Fachjargon zu verfallen, wird sich darauf beschränken müssen, einige wichtige geistige Trends, hervorstechende Neuartigkeiten der Betrachtungsweise, aber auch überraschende und provozierende Thesen anzuführen, die den heutigen Diskussionsstand in dieser Disziplin mitbestimmt haben. Es soll hier versucht werden, ein ungefähres Bild dieser Entwicklungen mittels einer Skizze von elf Aspekten zu vermitteln.

1. Semantik und Syntax

Es gäbe die heutige Wissenschaftsphilosophie[1] nicht ohne die *moderne Logik*, welche nach mehr als zweitausendjähriger Stagnation durch einen einzigen Mann ins Leben gerufen wurde: G. Frege. Seither hat diese Disziplin eine ungemein stürmische Entwicklung durchgemacht, die nur vergleichbar ist mit dem rapiden Fortschritt in einigen anderen Wissenschaftszweigen, etwa der modernen Physik oder der Molekularbiologie. Die traditionelle aristotelische Syllogistik wurde durch die moderne Logik nicht in dem Sinne verdrängt, daß sich die erstere als ungültig erwiesen hätte. Der Mangel der Syllogistik bestand vielmehr darin, daß diese Theorie auf Aussagen von sehr einfacher Gestalt beschränkt blieb, oder, umgekehrt ausgedrückt, daß sie die logische Argumentation mit Hilfe von Aussagen von komplizierterer Struktur nicht erfaßte. Genauer gesprochen, war es eine *dreifache* Begrenztheit, welche die moderne Logik überwinden half.

Zu den sog. logischen Zeichen gehören die *Junktoren*, d.h. Ausdrücke wie „und", „oder", „nicht", „wenn... dann...". Man kann komplexe Sätze bilden, in denen *eine beliebige endliche Anzahl* solcher Junktoren vorkommt. Die moderne Logik erfaßt die logischen Abhängigkeitsbeziehungen zwischen allen solchen Sätzen, während die Syllogistik dies nicht tut. Analoges gilt auch für die *Quantoren* „alle" bzw. „jeder" und „es gibt". Während die aristotelische Logik höchstens in solchen Fällen anwendbar ist, in denen ein einziger Quantor vorkommt, läßt die moderne Logik als Prämissen wie als Konklusionen Aussagen zu, in denen beliebig viele Quantoren vorkommen. Tatsächlich machen alle heutigen Naturwissenschaften sowie die gegenwärtige Mathematik von solchen logisch komplexen Aussagen Gebrauch. Viele Definitionen in der Analysis z.B. beginnen mit einer Wendung wie: „zu *jeder* Zahl *N gibt es* eine Zahl *e*, so daß ...". Es ist unmittelbar klar, daß die Korrektheit einer Beweisführung, in welcher ein derartiger Begriff verwendet wird, nur mit Hilfe einer Logik überprüfbar ist, zu deren Gegenstandsbereich Sätze mit ‚gemischten Quantoren' gehören, also Sätze mit gleichzeitigem Vorkommen von „alle" und „es gibt".

Ein dritter Mangel der Syllogistik bestand in ihrer Beschränkung auf Eigenschaftsbegriffe, also auf sog.

[1] Hier verwende ich das Wort „Wissenschaftsphilosophie" als synonym mit „Wissenschaftstheorie". Ich hatte den Ausdruck „Wissenschaftstheorie" seinerzeit als Entsprechung zum „philosophy of science" in den deutschen Sprachbereich eingeführt, und zwar deshalb, weil man hier Gefahr läuft, daß unter „Philosophie" auch alle möglichen Arten von unfundierten Spekulationen subsumiert werden, ‚metaphysische' Spekulationen über die Wissenschaften aber gerade außer Betracht bleiben sollten

einstellige Prädikate, während zwei- und mehrstellige *Relationsbegriffe* außer Betracht blieben. Z.B. läßt sich in der aristotelischen Syllogistik bereits ein so einfacher gültiger Schluß, wie der von der Prämisse „alle Menschen sind Lebewesen" zu der Konklusion „also sind alle Köpfe von Menschen Köpfe von Lebewesen", nicht rechtfertigen; denn der Ausdruck „ist Kopf von" bezeichnet keine Eigenschaft, sondern eine zweistellige Relation. Die moderne Logik gestattet auch die Behandlung von Relationsausdrücken beliebiger Stellenzahl. Dies ist u.a. deshalb so außerordentlich wichtig, weil einer der grundlegendsten mathematischen Begriffe, nämlich der Begriff der *Funktion*, einen Spezialfall des Relationsbegriffs bildet: Jede n-stellige Funktion kann als eine $(n+1)$-stellige Relation gedeutet werden, welche in Bezug auf ihr letztes Glied eindeutig ist.

Noch ein weiterer wichtiger Aspekt der modernen Logik ist zu erwähnen. So lange man von logischen *Schlußregeln* spricht, bezieht man sich ausschließlich auf die *syntaktische* Struktur von Aussagen. Denn jede derartige Regel hat die allgemeine Form: „Aus Sätzen von der und der formalen Gestalt sind Sätze von solcher und solcher Gestalt abzuleiten". Die Bedeutung der Ausdrücke bleibt dabei vollkommen außer Betracht. Nun existieren aber bekanntlich nicht nur Regeln, die zu *korrekten* Schlüssen führen, sondern auch solche, die *Fehlschlüssen* zugrundeliegen. Wie differenziert man zwischen diesen beiden Arten, den zu gültigen und den zu ungültigen Schlüssen führenden Regeln? Während die traditionelle Logik hierauf keine systematische Antwort zu geben vermochte, sondern sich mit inhaltlichen Plausibilitätsbetrachtungen, die sich auf Beispiele stützten, zufrieden gab, liefert die *monderne Semantik*, wie sie von A. Tarski entwickelt wurde, die gesuchte Rechtfertigungsbasis [2]. Hier wird sogar erstmals der Grundbegriff der formalen Logik präzisiert. Dies ist nämlich *nicht* der Begriff der (gültigen) Schlußregel, sondern der Begriff der *logischen Folgerung*. Letzteres ist insofern ein rein semantischer Begriff, als er nicht auf Regeln, sondern auf *mögliche Interpretationen* Bezug nimmt. Dabei werden zwar die erwähnten logischen Ausdrücke, wie Junktoren und Quantoren, mit jener festen Bedeutung ausgestattet, die mit ihrem üblichen Gebrauch in Einklang steht. Für alle übrigen Ausdrücke hingegen werden die Deutungen beliebig variiert. Die Feststellung, daß eine Aussage B aus einer Aussage A logisch folgt, wird nämlich so definiert, daß jede Interpretation, die A wahr macht, auch B wahr macht.

Zu beachten ist, daß im Begriff der logischen Folgerung *über* Aussagen gesprochen wird. Man rechnet die fraglichen Aussagen zur sog. *Objektsprache*. Der Folgebegriff ist dagegen ein *metasprachlicher* Begriff, der diese Aussagen nicht benützt, sondern *erwähnt*. Der Ausdruck „folgt" kann daher niemals Sätze, sondern nur *Namen* (von Sätzen) miteinander verknüpfen: In „aus A folgt B" sind die Buchstaben „A" und „B" nicht etwa Abkürzungen für irgendwelche Sätze, sondern *Namen von*, also metasprachliche Bezeichnungen von Sätzen.

Es wird dem Leser bereits aufgefallen sein, daß in der Definition der logischen Folge vom Wahrheitsbegriff Gebrauch gemacht wird. Daß dies eine zulässige Methode darstellt, ist eine weitere wichtige Erkenntnis, die wir der Tarski-Semantik verdanken. Mit dem Nachweis dafür, daß eine präzise und inhaltlich adäquate Difinition von „wahr in S" für bestimmte formale Sprachen S gegeben werden kann, gelang es Tarski, ein positivistisches Vorurteil gegen den angeblich ‚metaphysischen' Charakter des Wahrheitsbegriffs zu überwinden. Z.B. glaubten die Mitglieder des Wiener Kreises ursprünglich, daß der Ausdruck „wahr" aus einer von metaphysischem Ballast befreiten Wissenschaftssprache zu eliminieren sei; denn in der Mathematik habe an die Stelle der Wahrheit die *Beweisbarkeit* und in den empirischen Wissenschaften an die Stelle der Wahrheit die *Verifizierbarkeit* zu treten.

Als zusätzliche Stütze für die Unhaltbarkeit dieser Annahme kann man Gödels Methode des Nachweises der Unvollständigkeit der Arithmetik anführen. Gödel gelang dieser Nachweis nämlich durch eine besonders raffinierte Kontruktion eines Satzes, *der dann und nur dann wahr ist, wenn er im arithmetischen System nicht bewiesen werden kann.* Doch gehört dieses Resultat bereits zu den Themen des 2. Abschnitts. Vorläufig wollen wir ausdrücklich den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Schlußregel und dem der logischen Folgerung – oder, wie man auch sagen könnte: zwischen dem syntaktischen und dem semantischen Aspekt der Logik – festhalten: Ein System von Regeln ist *semantisch korrekt*, wenn jede Regelanwendung ein Fall von logischer Folgerung ist. Und das Regelsystem ist *semantisch vollständig*, wenn es sämtliche Fälle von logischen Folgerungen erfaßt.

2. Antinomie-Problem und mathematischer Grundlagenstreit

Ein wesentlicher Impuls, der den ganzen Verlauf der modernen Wissenschaftstheorie entscheidend mitbeeinflußte, ging von den *mengentheoretischen Antinomien* aus, die zur *mathematischen Grundlagenkrise*

[2] Verschiedene wichtige Grundideen der Tarski-Semantik sind, wie der Logiker Heinrich Scholz feststellte, bereits in einem 1839 erschienenen Werk von Bernhard Bolzano vorweggenommen worden, aber unbeachtet geblieben

Naturwissenschaften 66, 377–380 (1979)

führten. Was ist eine Antinomie? Nicht etwa einfach ein Widerspruch, wie oft behauptet wird. Wenn ich zu irgendeinem Zeitpunkt sage: „Gestern regnete es und gestern regnete es nicht", so behaupte ich etwas Widerspruchsvolles und damit natürlich Falsches, erzeuge aber keinerlei Antinomie und damit auch kein philosophisches Problem. Eine *Antinomie* liegt erst dann vor, wenn man eine Aussage zusammen mit ihrer Negation *beweisen* kann oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn man eine widerspruchsvolle Aussage von der Gestalt „A dann und nur dann wenn nicht A" *beweisen* kann. Eine dritte Möglichkeit, eine Antinomie zu charakterisieren, wäre etwa die zu sagen, daß man für ein und dieselbe Aussage *zugleich über ein Beweisverfahren sowie über ein Widerlegungsverfahren* verfügt.

Die bekannteste Antinomie ist die von B. Russell, die er Frege in einem Brief mitteilte. Diese Mitteilung bewirkte, daß sich über das großartige Lebenswerk Freges ein Hauch von Tragik legte. Denn Frege wollte, von heutiger Sicht aus betrachtet, nicht nur eine gegenüber der Syllogistik viel ausdrucksfähigere und reichere Logik formulieren. Er hatte sich darüber hinaus auf das kühne Projekt festgelegt, Arithmetik und Mengenlehre in die Logik einzubeziehen und damit die These von Kant zu widerlegen, daß arithmetische Aussagen nicht analytisch seien. Um einen hinlänglichen Reichtum an Mengen zu erhalten, mußte Frege ein Prinzip aufnehmen, welches das übliche Verfahren der Einführung von Mengen exakt formulierte. Dieses Verfahren besteht in der Angabe geeigneter sprachlicher Bedingungen. (Z.B. wird die Menge der Moleküle eingeführt durch die Bedingung: „x ist ein Molekül".) Wie Russell zeigte, entsteht jedoch eine Antinomie, wenn man die folgende Bedingung für die Zugehörigkeit zu einer Menge wählt: „x ist kein Element von x". Von der auf diese Weise entstehenden ‚Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten' kann man nämlich leicht zeigen, daß sie sich selbst enthalten muß, zugleich aber, daß sie sich nicht selbst enthalten kann. Unabhängig von Russell entdeckten andere Logiker und Mathematiker weitere, übrigens meist viel schwieriger zu beweisende, Antinomien, z.B. jene, die sich aus dem Begriff der Allmenge, dem Begriff der größten Kardinalzahl oder dem Begriff der größten Ordinalzahl ergeben.

Das Antinomien-Problem suchte nicht etwa nur das Fregesche System heim, sondern *die gesamte klassische Mathematik*. Das Fregesche System unterschied sich ja von anderen Darstellungen der Mathematik allein dadurch, daß darin die üblicherweise nur intuitiv vollzogenen Ableitungsschritte genau angegeben wurden. Unsere Rede von einer Heimsuchung enthält keine Übertreibung; denn einerseits läßt sich die gesamte Mathematik mengentheoretisch begründen, andererseits ist vom logischen Standpunkt ein Antinomien-behaftetes System eine Katastrophe. Dies sieht man am raschesten ein, wenn man bedenkt, daß für beliebige Aussagen B und Y der Satz „wenn (B und nicht B), dann Y" logisch richtig ist, so daß man nach erfolgtem Beweis von „B und nicht B" logisch zwingend auf jede beliebige Aussage Y schließen kann. Ein wissenschaftliches System, in welchem sich *jede* Aussage beweisen läßt, ist aber vollkommen wertlos.

Ich beschränke mich darauf, die drei wichtigsten Reaktionen auf diesen Ausbruch der mathematischen Grundlagenkrise anzudeuten. Die radikalste Position nahmen die ‚*intuitionistischen*' oder allgemeiner: die ‚*konstruktivistischen*' Mathematiker ein. Sie insistierten darauf, daß für das Zustandekommen von Antinomien *fehlerhafte Denkweisen* verantwortlich zu machen seien. Der entscheidende Fehler besteht nach ihrer Auffassung in einer naiven Deutung der in der klassischen Mathematik vorkommenden unendlichen Mengen. Diese werden in Analogie zu endlichen Gesamtheiten als ‚aktuale Unendlichkeiten' behandelt. Eine solche Auffassung sei zu verwerfen. Dieser Standpunkt, der nur das ‚potentiell Unendliche', als eine Möglichkeit unbegrenzten Fortschreitens, anerkennt, hat sehr einschneidende Konsequenzen für das klassische Denken. Bestimmte logische Prinzipien, wie der Satz *vom ausgeschlossenen Dritten*, nämlich die logische Gültigkeit von „A oder nicht A" für beliebiges A, oder das Prinzip von der doppelten Negation, werden in Anwendung auf unendliche Bereiche für unzulässig erklärt. Dasselbe Schicksal erfahren indirekte Existenzbeweise sowie das von der klassischen Mathematik häufig angewendete, nichtkonstruktive Existenzbehauptungen ermöglichende Auswahl-Axiom. Als Gegeneinwand haben Anhänger der ‚klassischen' Denkweise immer wieder das Argument vorgebracht, daß bei konsequenter Befolgung dieser konstruktivistischen Verbote von der Mathematik nur mehr ein Trümmerfeld übrig bliebe. Ein solches Argument ist nicht überzeugend, da es auf einer zu ‚naiven' Auffassung von Intuitionismus beruht. Es stimmt zwar, daß die elementare intuitionistische *Logik* nur ein echtes Teilsystem der elementaren klassischen Logik ist. Die von Brouwer, dem Begründer des Intuitionismus, aufgebaute Theorie der reellen Zahlen ist hingegen mit der klassischen Theorie *inkommensurabel.*

Ein ganz andersartiges, rein *pragmatisches* Vorgehen exemplifiziert die *axiomatische Methode.* Der sprachphilosophische Hintergrund dieses Konzeptes könnte etwa so formuliert werden: „Es hat überhaupt keinen Sinn, nach ‚Denkfehlern' zu suchen, die man für die Antinomien verantwortlich machen könnte. Die Entwicklung der Mathematik ist vielmehr unter dem Aspekt der Entwicklung und Differenzierung der

Wissenschaftssprache zu betrachten. Ursprünglich diente die Sprache dazu, Signale zu übermitteln, Sprechakte zu vollziehen und einfache Informationen weiterzugeben, etwa über das Wetter und das Vieh. Mit der mathematischen Sprache begann man plötzlich, über Mengen von Dingen und Funktionen, über Mengen von Mengen von Funktionen, über Mengen von Mengen von Mengen etc. zu sprechen. Ist es da ein Wunder, wenn sich plötzlich Widersprüche einstellen, selbst wenn man sich streng an die Regeln der Logik hält?" Wer eine solche Haltung einnahm, dem mußte es als zweckmäßig erscheinen, für den Aufbau der Mathematik nach einem geeigneten Axiomen-System Ausschau zu halten, das so beschaffen ist, daß man daraus alle wichtigen Lehrsätze der klassischen Mathematik ableiten kann, ohne dabei zu Widersprüchen zu gelangen. Die Untersuchungen Zermelos waren von diesem Bestreben geleitet. In mühsamer Detailanalyse ging er die Mengenlehre Schritt für Schritt durch und formulierte sukzessive die minimalen Voraussetzungen, die man für die Beweise benötigte, als Axiome. Sein System wurde später von Fraenkel verbessert und ergänzt. Daneben entstanden eine Reihe von Alternativsystemen: die einfache Typentheorie von Russell und Whitehead, zwei Systeme Quines sowie das von Neumann-Bernayssche System, um nur die bekanntesten zu nennen.

In Bezug auf alle diese Systeme erhob sich die grundlegende Frage: Woher wußten diese Axiomatiker, daß ihre Systeme widerspruchsfrei sind? Die Antwort lautet klipp und klar: Sie wußten es natürlich nicht, sondern konnten nur *hoffen*, daß ihre Systeme konsistent (widerspruchsfrei) seien.

Hilbert wollte sich damit nicht begnügen. Er wollte beide Tendenzen vereinigen: einerseits der in seinen Augen teilweise berechtigten Kritik der Intuitionisten Rechnung tragen, andererseits aber doch die gesamte klassische Mathematik vor der Antinomien-Gefahr bewahren. Dazu entwickelte er in seiner *Beweistheorie* ein bestimmtes metamathematisches Projekt. Die Aufgabe der mathematischen Grundlagenforschung wurde darin in zwei Teile zerlegt: Im ersten Teil ging es darum, die klassische Mathematik zu *axiomatisieren* und dabei zugleich im Rahmen einer formalen Objektsprache *vollständig zu kalkülisieren.* Im zweiten Teil, der Metamathematik, sollte durch inhaltliche, auf den Kalkül gerichtete Untersuchungen nachgewiesen werden, daß die axiomatisierte Theorie widerspruchsfrei ist. Um jede Zirkularität zu vermeiden, wurden an den gesuchten Widerspruchsfreiheitsbeweis sehr starke Konstruktivitätsansprüche gestellt. Ja, ursprünglich ging Hilbert sogar noch über die Forderung nach Konstruktivität hinaus und verlangte einen *finiten* Widerspruchsfreiheitsbeweis, der nur kombinatorisch-anschauliche gedankliche Prozesse anwenden durfte, in denen auf die kalkülisierten klassischen Beweise *als spezielle Arten von Figuren* Bezug genommen wurde.

Hilberts Idee blieb nicht nur für lange Zeit ein unverwirklichtes Programm. Dieses wurde vielmehr durch das am Schluß von Abschnitt 1 erwähnte Theorem von Gödel stark erschüttert. Ein Folgesatz dieses Theorems besagt nämlich, daß die Widerspruchsfreiheit eines Systems der Arithmetik nicht mit den Beweismitteln dieses Systems selbst erbracht werden kann. Da die kodifizierten Beweisverfahren aber sowohl konstruktive als auch nicht konstruktive umfaßten, schien der Schluß unausweichlich zu sein, daß erst recht ein Widerspruchsfreiheitsbeweis der gewünschten Art *mit konstruktiven Mitteln allein* nicht zu erbringen ist. Überraschenderweise gelang es Gentzen im Jahre 1936 dennoch, einen als konstruktiv anerkannten Widerspruchsfreiheitsbeweis zu erbringen. Möglich wurde dies durch die Preisgabe der engen Forderung nach Finitheit und durch eine konstruktive Deutung der transfiniten Induktion bis zur sog. ersten ε-Zahl, welche Gentzen benötigte.

In den letzten Jahrzehnten haben sich alle Gebiete der mathematischen Grundlagenforschung stürmisch weiterentwickelt. Leider werden diese Tätigkeiten fast nur mehr von mathematischen Spezialisten betrieben. Philosophisch ist dies deshalb bedauerlich, weil doch in den Diskussionen zwischen den bedeutenden Vertretern verschiedener Richtungen zu Beginn der mathematischen Grundlagenkrise – etwa zwischen Frege und Hilbert oder zwischen Hilbert und Brouwer – die technischen Aspekte gegenüber den erkenntnistheoretisch-philosophischen ganz in den Hintergrund traten und auch heute noch zahlreiche dabei aufgetretene wissenschaftstheoretische Fragen der Lösung harren. Um so mehr ist zu hoffen, daß wieder einmal eine Zeit eintreten wird, in der sich das zwischenzeitlich erarbeitete mathematische Material so übersichtlich dargestellt findet, daß darüber eine fruchtbare wissenschaftstheoretische Diskussion beginnen kann[3].

Eingegangen am 10. November 1978

[3] Es seien hier wenigstens vier Werke genannt, welche zusammen einen guten Einblick in den heutigen Stand der Diskussion gewähren. Die klassischen Grundlegungsversuche sind am klarsten geschildert in den beiden Büchern von W.S. Hatcher, *Foundations of Mathematics*, Philadelphia 1968, und W.V.O. Quine, *Set Theory and its Logic*, Cambridge, Mass., 1969. Einen nicht nur in technischer, sondern auch in philosophischer Hinsicht gründlichen Einblick in das Denken des Intuitionismus vermittelt M. Dummett in seinem Werk *Elements of Intuitionism*, Oxford 1977. Der heutige Stand der Beweistheorie ist am ausführlichsten und klarsten geschildert in K. Schütte, *Proof Theory*, Berlin-Heidelberg-New York 1977

Naturwissenschaften 66, 377–380 (1979)