2.8 Wie bestimme ich Funktionsterme?

Vor allem bei ganzrationalen Funktionen stellt sich nicht selten die Aufgabe, eine Funktion zu bestimmen, die an vorgegebenen Stellen ihre Extremwerte annimmt, ihre Wendepunkte hat, usw. Dies führt meist auf ein LGS, das zu lösen ist.

Was besagen übliche Bedingungen für die Funktion f mit Graph K?

- K verläuft durch den **Punkt** $\mathbf{P(x_0|y_0)}$ besagt $\mathbf{f(x_0) = y_0}$.
- K hat an der Stelle x_0 die **Steigung m** besagt $\mathbf{f'(x_0) = m}$.
- K besitzt den **Extrempunkt** $\mathbf{E(x_E|y_E)}$ besagt $\mathbf{f(x_E) = y_E}$ **und** $\mathbf{f'(x_E) = 0}$.
- K besitzt den **Wendepunkt** $\mathbf{W(x_W|y_W)}$ besagt $\mathbf{f(x_W) = y_W}$ **und** $\mathbf{f''(x_W) = 0}$.

Insbesondere bei **ganzrationalen Funktionen** besagt:

- **Achsensymmetrie zur y-Achse:** Variable x nur mit **geraden Hochzahlen**
- **Punktsymmetrie zum Ursprung:** Variable x nur mit **ungeraden Hochzahlen**

Beispiel 1: *(Funktionsterm bestimmen)*
Der Graph K einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 verläuft durch $X(6|0)$, hat den Wendepunkt $W(2|4)$ und die Tangente in W hat die Steigung 3.
Bestimmen Sie f(x).

Lösung:
Der Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ergibt

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b;$$

$f(0) = 6$ ergibt $216a + 36b + 6c + d = 0$.
$f(2) = 4$ ergibt $8a + 4b + 2c + d = 4$.
$f''(2) = 0$ ergibt $12a + 2b = 0$.
$f'(2) = 3$ ergibt $12a + 4b + c = 3$.

Damit erhält man das LGS

$$\begin{aligned} 216a + 36b + 6c + d &= 0 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 4 \\ 12a + 2b &= 0 \\ 12a + 4b + c &= 3 \end{aligned}$$

mit der Lösung $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{3}{2};\ 0;\ 0\right)$. Also gilt

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2.$$

Beispiel 2: *(Funktionsterm bestimmen mit Symmetrie)*
Der Graph K einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 ist achsensymmetrisch zur y-Achse und hat den Tiefpunkt $T(\sqrt{3}|-1)$ und den Wendepunkt $W(1|3)$.
Bestimmen Sie f(x).

Lösung:
Da K achsensymmetrisch zur y-Achse und f ganzrational vom Grad 4 ist, lautet der Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ und damit

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f''(x) = 12ax + 2b.$$

$f(\sqrt{3}) = -1$ liefert $9a + 3b + c = -1$.
$f(1) = 3$ liefert $a + b + c = 3$.
$f'(\sqrt{3}) = 0$ liefert $12\sqrt{3}a + 2\sqrt{3}b = 0$.
$f''(1) = 0$ liefert $12a + 2b = 0$.

Damit erhält man das LGS $\begin{aligned} 9a + 3b + c &= -1 \\ a + b + c &= 3 \\ 12a + 2b &= 0 \\ 12a + 2b &= 0 \end{aligned}$ mit der Lösung $(1;\ -6;\ 8)$.

Also gilt $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.

Beispiel 3: *(Funktionsterm einer Exponentialfunktion bestimmen)*
Der Graph K einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = ax \cdot e^{bx}$ enthält den Hochpunkt $H(2|2)$.
Bestimmen Sie f(x).

Hinweis
Hat der Ansatz für f **n Variable**, so benötigt man für eine eindeutige Bestimmung der Funktion mindestens **n Gleichungen**.

Lösung:
Es ist $f'(x) = a \cdot (1 + bx) \cdot e^{bx}$.
Aus $f(2) = 2$ folgt $2a \cdot e^{2b} = 2$ und aus $f'(2) = 0$ folgt $a \cdot (1 + 2b) \cdot e^{2b} = 0$.
Wegen $e^{2x} > 0$ ist dann $a \cdot (1 + 2b) = 0$ und wegen $a \neq 0$ schließlich dann $b = -\frac{1}{2}$.
Damit erhält man $2a \cdot e^{-1} = 2$ und dann $a = e$.
Also ist $f(x) = ex \cdot e^{-0,5x}$.