

von der Achse nur einen Betrag von  $0''_{,18}$  erreicht und dem EINSTEINEffekte entgegengesetzt ist, so daß die Resultate von CAMPBELL nicht durch denselben beeinträchtigt werden. Ich muß nur hinzufügen, daß der Einfluß der verschiedenen Tubuslänge auf die Verzeichnung hierbei nicht in Betracht gezogen wurde.

Aber auch bei der Ausmessung der Platten unter Einstellung mit einem Fadenkreuze kann das Vorhandensein des Koronarlichtes auf der einen Platte eine Fehlerquelle bedeuten. Bei der Ausmessung von Röntgenspektrographischen Platten hat BÄCKLIN im Institute von SIEGBAHN den Effekt des unsymmetrischen Kontrastes beobachtet und beschrieben. Die Folge desselben ist, daß das Messungsergebnis eine falsche Verschiebung der Spektrallinie in der Richtung des helleren Teiles des Hintergrundes angibt. Dieser Kontrasteffekt muß also bewirken, daß das Koronarlicht eine falsche Verschiebung des gemessenen Sternbildes in der Richtung von der Sonne weg zur Folge hat, während wahrscheinlich richtig auf das Vergleichsbild eingestellt werden kann, da dasselbe nicht in der geschwärzten Schicht eingebettet liegt. Ob aber diese Verschiebung von einer solchen Größenordnung ist, daß sie in Betracht kommt, läßt sich nicht vorhersagen.

Auf alle Fälle erfordert eine möglichst differenzielle Messung, daß die zu vergleichenden Photographien mit Expositionszeiten, die möglichst gleiche Sternbilder geben, auf einer und derselben Platte aufgenommen werden, welche zwischen den Aufnahmen ein wenig um die Achse des Objektivs in bezug auf das Feld gedreht wird.

Ferner muß ein gleicher Abstand der Platte vom Objektiv gesichert werden, was unmittelbar vor den Aufnahmen vom Platze der Kasette aus unter Benutzung von Spiegelbildern in den Flächen des Objektivs ohne Schwierigkeit ausführbar ist. Die Korrektur durch die sog. Plattenkonstante schließt nämlich nicht die Fehler aus, welche durch die Verschiedenheit der Verzeichnung bei verschiedener Tubuslänge bedingt werden. Außerdem muß die Einwirkung einer Temperaturdifferenz des Objektivs auf das Bild bei der bestimmten Tubuslänge bekannt sein.

Ich habe hier versucht, einige Erscheinungen der tatsächlichen optischen Abbildung auf möglichst leichtverständliche Weise zu erläutern. Daß der Unterschied der tatsächlichen Verhältnisse von den herrschenden Vorstellungen um so mehr an Bedeutung gewinnt, je größere Ansprüche an die Exaktheit bei der Ausmessung optischer Bilder gestellt werden, leuchtet ja von selbst ein. Deshalb habe ich diesen Unterschied an den Methoden der Untersuchung der von EINSTEIN vorhergesagten Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfelde exemplifiziert und, da diese Erscheinung zur Zeit jeden Gebildeten interessiert, die Aufmerksamkeit auf gewisse mögliche Fehlerquellen bei der Untersuchung gerichtet. Ich betone aber ausdrücklich, daß ich keine Meinung darüber ausgesprochen habe, ob diese Fehlerquellen von Bedeutung für die bisherigen Resultate gewesen sind. Im Gegenteil habe ich zeigen können, daß eine der Fehlerquellen in einem Falle ohne Belang war.

## Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik.

Von E. SCHRÖDINGER, Zürich.

Auf Ideen DE BROGLIES<sup>1)</sup> und EINSTEINS<sup>2)</sup> fußend, hab ich zu zeigen versucht<sup>3)</sup>, daß die gewöhnlichen Differentialgleichungen der Mechanik, welche die Koordinaten des mechanischen Systems als Funktionen der Zeit bestimmen wollen, für „kleine“ Systeme nicht mehr zuständig sind; an ihre Stelle hat eine gewisse *partielle* Differentialgleichung zu treten, welche ein Variable  $\psi$  („Wellenfunktion“) als Funktion der Koordinaten und der Zeit bestimmt. Ähnlich wie bei der Differentialgleichung der schwingenden Saite oder irgendeines anderen schwingenden Systems ergibt sich  $\psi$  als Superposition von zeitlich reinharmonischen (d. i. „sinusförmigen“) Schwingungen, deren Frequenzen mit den spektroskopischen „Termfrequenzen“ des mikromechanischen Systems genau übereinstimmen. Z. B. für den linearen PLANCKschen Oszillator<sup>4)</sup> mit der Energiefunktion

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 + 2 \pi^2 \nu_0^2 m q^2 \quad (1)$$

ergibt sich, wenn man statt der Elongation  $q$  die dimensionslose Variable

$$x = q \cdot 2 \pi \sqrt{\frac{m \nu_0}{h}} \quad (2)$$

einführt, die Wellenfunktion  $\psi$  als Superposition der folgenden Eigenschwingungen<sup>1)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} \psi_n &= e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) e^{2 \pi i \nu_n t} \\ \left( \nu_n &= \frac{2n+1}{2} \nu_0; n = 0, 1, 2, 3, \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die  $H_n$  sind die nach HERMITE benannten

einer Geraden beweglich, gegen einen festen Punkt derselben gezogen wird mit einer Kraft, die seiner Elongation  $q$  von diesem Punkt proportional ist; nach der gewöhnlichen Mechanik führt ein solcher Massenpunkt Sinusschwingungen von der Frequenz  $\nu_0$  aus.

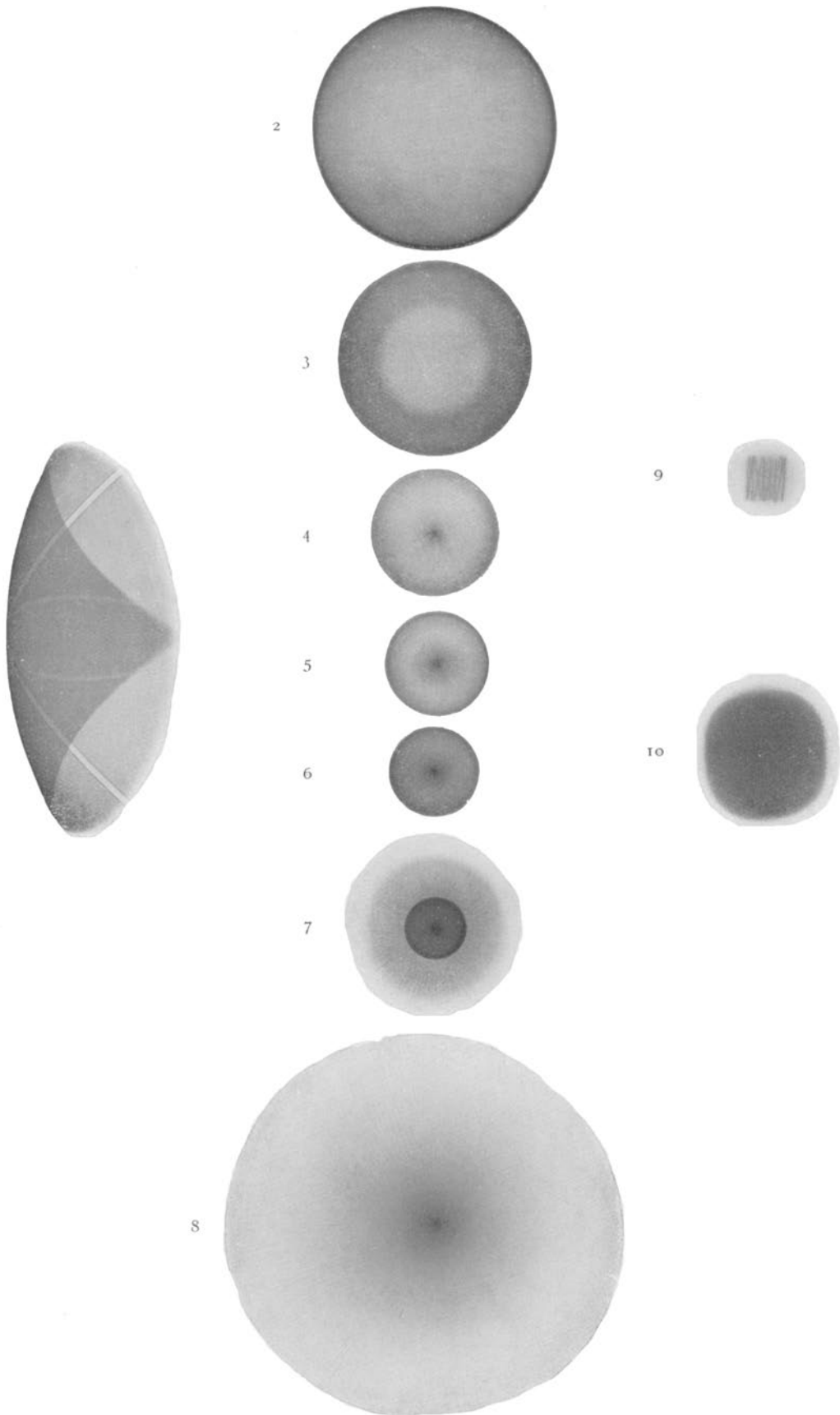
<sup>1)</sup>  $i$  bedeutet  $\sqrt{-1}$ . Rechts ist, wie üblich, der Realteil zu nehmen.

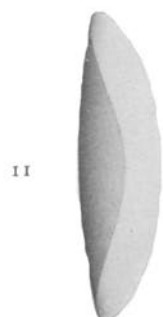
<sup>1)</sup> L. DE BROGLIE, Ann. de phys. (10) 3, 22. 1925 (Thèses, Paris 1924).

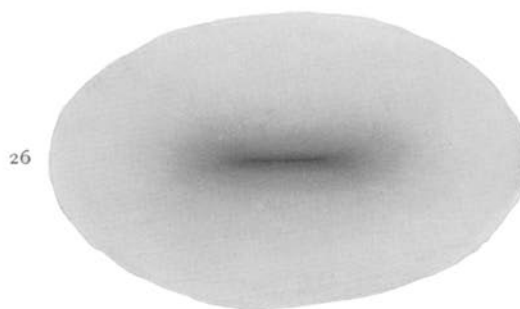
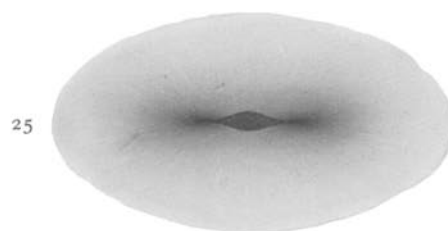
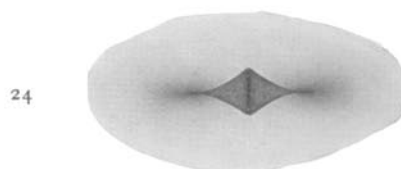
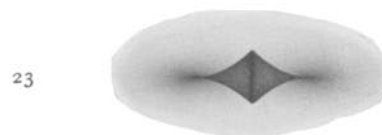
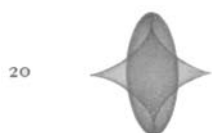
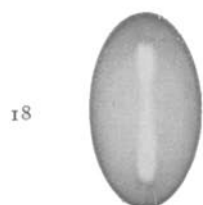
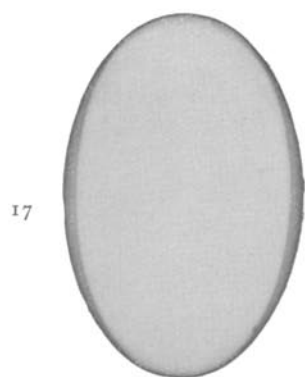
<sup>2)</sup> A. EINSTEIN, Berlin. Ber. 1925, S. 6ff.

<sup>3)</sup> Ann. d. Physik 79, 361, 489, 734. 1926; weitere Mitteilungen im Druck.

<sup>4)</sup> d. i. ein Massenpunkt von der Masse  $m$ , der, auf







Polynome<sup>1)</sup>. Mit  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  und mit dem „Normierungsfaktor“  $(2^n n!)^{-\frac{1}{2}}$  multipliziert, werden sie als HERMITESCHE Orthogonalfunktionen bezeichnet. Diese bilden also die Amplituden der Eigenschwingungen. Die ersten fünf sind in Fig. 1 dargestellt. Die Ähnlichkeit mit dem wohlbekannten Bild der Saitenschwingungen ist hier sehr weitgehend.

Es mutet im ersten Moment recht bizarr an, einen Vorgang, der nach der bisherigen Auffassung der Punktmechanik angehört, durch ein System solcher Eigenschwingungen zu beschreiben. Ich möchte hier an dem gewählten einfachen Beispiel den Übergang zur makroskopischen Mechanik in

zusammengefaßt, was, wie man leicht überlegt<sup>1)</sup>, darauf hinauskommt, eine relativ schmale Gruppe in der Umgebung des  $n$ -Wertes

$$n = \frac{A^2}{2} \quad (6)$$

herauszugreifen. Die Ausführung der Summe in (4) wird geleistet durch die in  $x$  und  $s$  identische Beziehung<sup>2)</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = e^{-s^2 + 2sx - \frac{x^2}{2}}. \quad (7)$$

Also

$$\psi = e^{\pi i \nu_0 t - \frac{A^2}{4}} e^{4\pi i \nu_0 t} + A x e^{2\pi i \nu_0 t - \frac{x^2}{2}}. \quad (8)$$

Nimmt man nun, wie vorgesehen, den reellen Teil

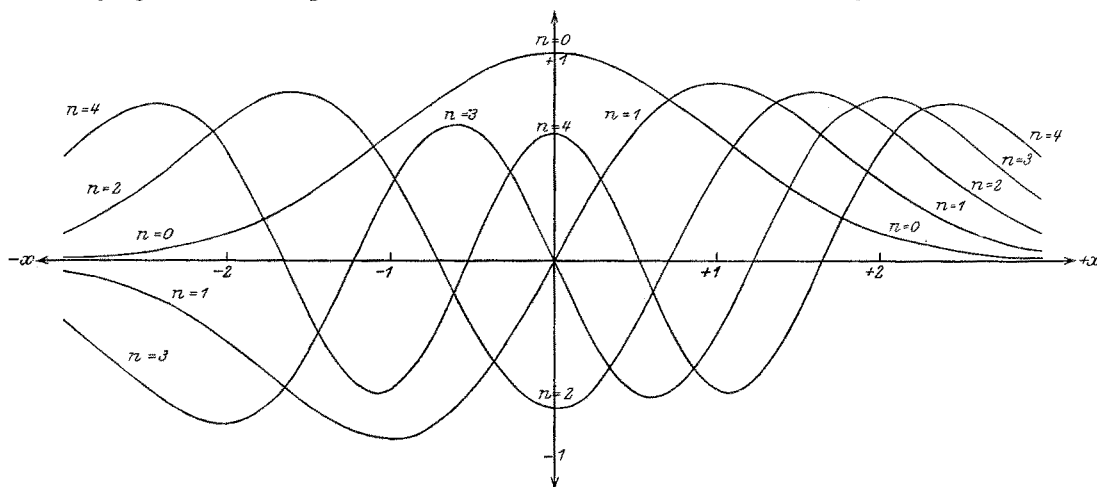


Fig. 1. Die ersten fünf Eigenschwingungen des PLANCKSchen Oszillators nach der Undulationsmechanik. (Außerhalb des dargestellten Bereiches  $-3 \leq x \leq +3$  nähern sich alle fünf Funktionen monoton der  $x$ -Achse.)

concreto demonstrieren, indem ich zeige, daß eine Gruppe von Eigenschwingungen mit hoher Ordnungszahl  $n$  („Quantenzahl“) und relativ kleinen Ordnungszahldifferenzen („Quantenzahldifferenzen“) einen „Massenpunkt“ darzustellen vermag, welcher die nach der gewöhnlichen Mechanik zu erwartende „Bewegung“ ausführt, d. h. mit der Frequenz  $\nu_0$  oszilliert. Ich wähle eine Zahl  $A \gg 1$  (d. h. „groß gegen 1“) und bilde folgendes Aggregat von Eigenschwingungen

$$\psi = \left. \begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{2}\right)^n \frac{\psi_n}{n!} \\ &= e^{\pi i \nu_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{2} e^{2\pi i \nu_0 t}\right)^n \frac{1}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Es werden also die normierten Eigenschwingungen (s. o.) mit den Koeffizienten

$$\frac{A^n}{\sqrt{2^n n!}} \quad (5)$$

der rechten Seite, so kommt nach kurzer Zwischenrechnung

$$\psi = e^{\frac{A^2}{4} - \frac{1}{2}(x - A \cos 2\pi \nu_0 t)^2} \cdot \cos \left[ \pi \nu_0 t + (A \sin 2\pi \nu_0 t) \cdot \left( x - \frac{A}{2} \cos 2\pi \nu_0 t \right) \right] \quad (9)$$

Dies das *Endresultat*, an dem zunächst der erste Faktor von Interesse ist. Er stellt einen relativ hohen und schmalen „Buckel“ von der Gestalt einer „GAUSSSchen Fehlerkurve“ dar, welcher jeweils in der Umgebung der Stelle

$$x = A \cos 2\pi \nu_0 t \quad (10)$$

liegt. Die Breite des Buckels ist von der Größenordnung 1, also nach Voraussetzung sehr klein gegen  $A$ . Nach (10) oszilliert der Buckel genau

<sup>1)</sup>  $\frac{z^n}{n!}$  hat für großes  $z$  als Funktion von  $n$  ein einziges extrem hohes und relativ sehr scharfes Maximum bei  $n = z$ . Durch Quadratwurzelziehen erhält man mit  $z = \frac{A^2}{2}$  die Zahlenreihe (5).

<sup>2)</sup> COURANT-HILBERT, l. c. Gleichung (58).

<sup>1)</sup> Vgl. COURANT-HILBERT, Methoden der mathematischen Physik I, Kap. II, § 10, 4, S. 76 (Berlin: Springer 1924).

nach demjenigen Gesetz, das sich für einen Massenpunkt mit der Energiefunktion (1) aus der gewöhnlichen Mechanik ergeben würde. Die Amplitude, in  $x$  gemessen, ist  $A$ , in  $q$  gemessen also

$$a = \frac{A}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar}{m\nu_0}}. \quad (11)$$

Für die *Energie* eines Massenpunktes  $m$ , der mit dieser Amplitude und mit der Frequenz  $\nu_0$  oszilliert, ergibt die gewöhnliche Mechanik

$$2\pi^2 a^2 \nu_0^2 m = \frac{A^2}{2} \hbar \nu_0 \quad (12)$$

d. i. nach (6), gerade  $n\hbar\nu_0$ , wo  $n$  die mittlere Quantenzahl der herausgegriffenen Gruppe. Die „Korrespondenz“ ist also auch in dieser Hinsicht eine vollkommene.

Der *zweite* Faktor in (9) ist im allgemeinen sowohl von  $x$  als auch von  $t$  eine sehr rasch veränderliche Funktion vom Absolutbetrag  $\leq 1$ , welche

ständig — doch möchte ich an dieser Stelle hierauf nicht näher eingehen.

*Unsere Wellengruppe hält dauernd zusammen*, breitet sich *nicht* im Laufe der Zeit auf ein immer größeres Gebiet aus, wie man es sonst, z. B. in der Optik, gewohnt ist. Das will freilich hier im eindimensionalen nicht viel sagen, ein Buckel auf einer Saite verhält sich ganz ähnlich. Man erkennt aber leicht, daß sich durch Multiplikation von zwei bzw. drei Ausdrücken wie (4), der eine in  $x$ , der andere in  $y$ , der dritte in  $z$  geschrieben, auch der *ebene* bzw. der *räumlichen* Oszillator darstellen läßt, d. h. eine ebene oder eine räumliche Wellengruppe, die auf einer harmonischen Ellipse umläuft<sup>1)</sup>. Auch eine solche Wellengruppe bleibt dauernd beisammen, im Gegensatz z. B. zu einem Wellenpaket der klassischen Optik, das sich im Laufe der Zeit zerstreut. Der Unterschied dürfte davon herrühren, daß unsere Gruppe aus einzelnen *diskreten* harmonischen Komponenten aufgebaut ist, nicht aus einem *Kontinuum* von solchen.

Ich möchte schließlich noch erwähnen, daß eine

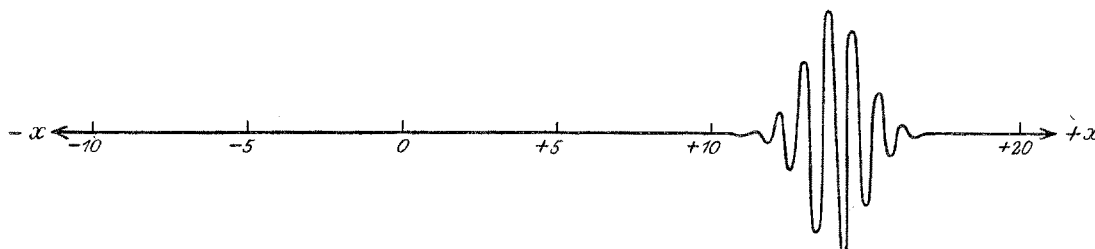


Fig. 2. Pendelnde Wellengruppe als undulationsmechanisches Bild des Massenpunktes.

viele tiefe und schmale Furchen in das Antlitz des ersten Faktors gräbt und so eine *Wellengruppe* daraus macht, deren Bild — nur ganz schematisch — in Fig. 2 wiedergegeben ist. Der Abszissenmaßstab der Fig. 2 ist natürlich viel kleiner als in Fig. 1; Fig. 2 müßte fünfmal vergrößert werden, um mit Fig. 1 direkt vergleichbar zu sein. Eine genauere Betrachtung des zweiten Faktors in (9) offenbart folgendes interessante Detail, das in der Fig. 2, die nur *ein* Stadium darstellt, nicht zum Ausdruck kommt. Die *Anzahl* und *Breite* der „Furchen“ oder „Wellchen“, welche den Massenpunkt durchsetzen, ist zeitlich veränderlich. Die Wellchen sind am *zahlreichsten* und *schmälsten* beim Durchgang durch die Mitte  $x = 0$ ; sie werden *völlig ausgeglättet* an den Umkehrstellen  $x = \pm A$ , weil dort nach (10) der  $\cos 2\pi\nu_0 t = \pm 1$  und daher der  $\sin 2\pi\nu_0 t = 0$  wird, so daß der zweite Faktor in (9) gar nicht von  $x$  abhängt. Die gesamte Ausdehnung der Wellengruppe („Dicke des Massenpunktes“) bleibt jedoch stets dieselbe. Die Veränderlichkeit der „Kräuselung“ ist als eine Abhängigkeit von der *Geschwindigkeit* aufzufassen und als solche nach allgemeinen undulationsmechanischen Gesichtspunkten vollkommen ver-

gemeinsame additive Konstante, sagen wir  $C$ , die eigentlich in (3) zu allen  $\nu_n$  hinzuzufügen ist (entsprechend der „Ruhenergie“ des Massenpunktes) nichts wesentliches ändert. Es tritt nur in der eckigen Klammer in (9) der Addend  $2\pi Ct$  hinzu. Dadurch werden die Oszillationen *innerhalb* der Wellengruppe *zeitlich* sehr viel rascher, während das durch (10) beschriebene Pendeln der Gruppe als ganzer und ebenso ihre Kräuselung davon ganz unberührt bleiben.

Es läßt sich mit Bestimmtheit voraussehen, daß man auf ganz ähnliche Weise auch die Wellengruppen konstruieren kann, welche auf hochquantigen Keplerellipsen umlaufen und das undulationsmechanische Bild des Wasserstoffelektrons sind; nur sind da die rechen-technischen Schwierigkeiten größer als in dem hier behandelten, ganz besonders einfachen Schulbeispiel.

<sup>1)</sup> Es sei hier die interessante Bemerkung eingeschaltet, daß für den *ebenen* Oszillator die Quantenniveaus *ganzzahlig*, für den *räumlichen* dagegen wieder „halbzahlig“ werden. Ähnliches gilt für den Rotator. Die spektroskopisch so bedeutungsvolle Halbzahligkeit hängt also mit der *ungeraden* Dimensionszahl des Raumes zusammen.