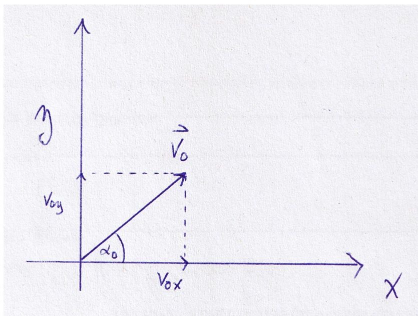
Der schiefe Wurf (ohne Luftreibung)

Liegt bei einem Wurf sowohl eine Anfangsgeschwindigkeit in x als auch in y-Richtung vor (siehe nebenstehendes Koordinatensystem) spricht man von einem „schiefen Wurf“. Man kann nun die Anfangsgeschwindigkeiten $v_{0,x}$ und $v_{0,y}$ durch den Abwurfwinkel α_0 und den Betrag der Geschwindigkeit v_0 beschreiben:
$v_{0,x} = v_0 \cdot \cos\alpha_0$ und
$v_{0,y} = v_0 \cdot \sin\alpha_0$.



Flugbahn

Die Gleichungen, die Geschwindigkeit und Ort als Funktion der Zeit beschreiben, lauten:

$$\begin{aligned}
\text{Geschwindigkeit:}\quad v_x(t) &= v_{0,x} = v_0 \cdot \cos\alpha_0 \\
v_y(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha_0 - g \cdot t \\
\text{Ort:}\quad x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha_0 \cdot t \\
y(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2
\end{aligned}$$

Man beachte: in x-Richtung wirkt keine Kraft; deshalb bleibt hier die Anfangsgeschwindigkeit unverändert! Ausserdem haben wir als Anfangsort (0|0) gewählt! Die obigen Gleichungen beschreiben Geschwindigkeit und Ort als Funktion der Zeit. Die „tatsächliche“ Bahnkurve (d.h. die Flugbahn, die tatsächlich beobachtet werden kann) ist eine Funktion $y(x)$! Um sie zu erhalten muss man $x(t)$ nach t auflösen und in $y(t)$ einsetzen. Formt man geschickt um findet man (beachte: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$):

$$y(x) = x \tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2$$

Diese Kurve ist eine Parabel (d.h. „quadratisch in x“)! Wegen des negativen Vorzeichens ist sie nach unter geöffnet.

Flugdauer, Wurfweite und optimaler Wurfwinkel

Um die **Wurfdauer** zu berechnen, muss man die Nullstelle von $y(t)$ suchen! Schließlich bechreibt $y(t)$ die Höhe des Wurfes – und bei $y = 0$ ist der Ball (oder was auch immer) wieder am Boden und der Flug vorbei!

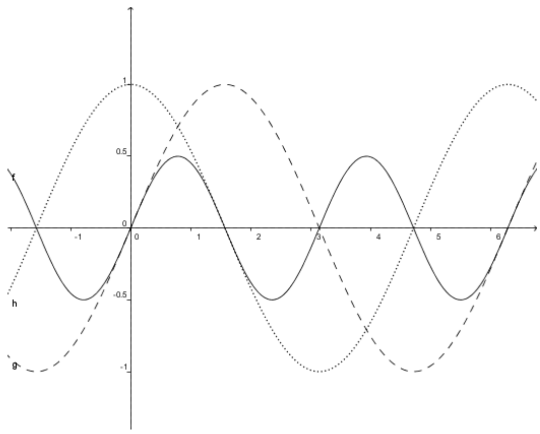
$$\begin{aligned}
y(t) &= 0 \\
v_0 \cdot \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 &= 0 \\
t \cdot \left(v_0 \cdot \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g \cdot t \right) &= 0
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat also 2 Nullstellen[1]: bei $t = 0$ (d.h. während des Abwurfs) und wenn die Klammer 0 wird. Diese 2. Nullstelle ist natürlich die Interessante. Man findet für die **Wurfdauer** also $T = \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}$.

Setzt man dieses Ergebnis in $x(t)$ ein, findet man die **Wurfweite**! $x_{max} = x(T) = \frac{2v_0^2 \cos\alpha_0 \sin\alpha_0}{g}$.

[1] Beachte: man muss weder quadratisch ergänzen noch die „p-q Formel“ anwenden, um die Nullstelle dieser quadratischen Gleichung zu bestimmen! Weil kein konstantes Glied vorkommt, kann t ausgeklammert werden...

Bekanntlich ist bei $\alpha_0 = 45°$ die Weite am größten. Warum eigentlich? Betrachten wir den Ausdruck $x_{max} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha_0 \sin\alpha_0}{g}$. Im Zähler steht das Produkt $\cos \cdot \sin$. Für welchen Winkel ist dieser Ausdruck am größten? Nebenstehende Abb. zeigt den Graphen von Sinus (gestrichelt), Kosinus (gepunktet) und dem Produkt (durchgezogen). Bei 45° ist ein Maximum! (Achtung: in der Abbildung werden die Winkel im Bogenmaß angegeben. 180° entspricht also π.)
Übrigen gilt $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$! Deshalb ist $\sin 45° \cdot \cos 45° = 0,5$!



Möchte man noch wissen welche maximale Höhe der Wurf hat, kann man z. Bsp. $T/2$ in die Gleichung $y(t)$ einsetzen. Die Flugbahn ist nämlich symmetrisch! Lösung: $y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}$.

Übungsaufgabe: Ein Kugelstoßer erreicht eine Weite von ca. 20m. Schätze ab, wie groß die Anfangsgeschwindigkeit des Stoßes ist!

Lösung: Wir wissen $x_{max} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha_0 \sin\alpha_0}{g}$. Wenn unser Kugelstoßer $\alpha_0 = 45°$ wählt, gilt $x_{max} = \frac{2v_0^2 \cdot 0,5}{g}$, also $x_{max} = \frac{v_o^2}{g}$. Das muss für $x_{max} = 20m$ einfach nach v_0 aufgelöst werden. man findet $v_0 \approx \sqrt{200}\frac{m}{s}$. Allerdings tun wir so, als wenn der Stoßer vom Erdboden stößt...

Historische Bemerkung

Die Herleitung der Wurfparabel gelang Galilei in seinen berühmten *Discorsi* (1638). Der entscheidende Punkt besteht darin, die unabhängige Überlagerung der verschiedenen Bewegungsformen anzunehmen! Durch die Vernachlässigung der Luftreibung ist die Parabelform allerdings nicht streng gültig bzw. beobachtbar. Die nebenstehende Abbildung zeigt ältere Darstellungen von Wurfbahnen. In *dieser* Form sind sie aber sicherlich nie beobachtet worden! Vielmehr drückt sich in diesen Abbildungen die antike „Impetus Theorie“ aus, nach der der geworfenen Körper eine „Bewegungskraft“ (der sog. „Impetus“) besitzt, die sich während des Wurfes „aufzehrt“. Hier erfolgt der steile Sturz erst nachdem der Impetus aufgebraucht ist.