Zur vorgriechischen Mathematik

Von

Otto Neugebauer (Göttingen)

Fragen aus der Geschichte der Mathematik, insbesondere aus der der antiken Mathematik, lassen sich unter zwei Gesichtspunkten betrachten: I. orientiert an der zeitlichen Sukzession und räumlichen Abhängigkeit (hierher gehören Fragen, wie die nach der Entdekkungszeit der Hauptsätze der Elementargeometrie oder die der wechselseitigen Beziehungen zwischen Indien und Griechenland), II. aber unabhängig von jeder zeitlichen Fixierung, sozusagen rein als logisches Phänomen (Beispiel: die Frage nach der gegenseitigen Stellung von Ordinalzahl- zu Kardinalzahlbegriff, zu deren Untersuchung sowohl sämtliche antike Zeugnisse wie moderne Eingeborenensprachen heranzuziehen sind; oder die Frage nach der Entstehung von Begriffen wie „ideale Elemente", deren Ausbildung in allen Kulturkreisen verfolgt werden muß, unabhängig von ihren Relativbeziehungen). In der Kombination *beider* Gesichtspunkte (ich bezeichne sie im folgenden kurz durch I und II) sehe ich ein notwendiges Erfordernis für die Behandlung von Fragen der antiken Mathematik. Der Neuheit des sachlichen Materials wegen wird hier allerdings der erste Gesichtspunkt äußerlich mehr in den Vordergrund treten müssen; trotzdem führt der zweite zu den im gegenwärtigen Zusammenhang eigentlich entscheidenden Fragestellungen.

Eine zweite Vorbemerkung hat das Wort „vorgriechisch" genauer zu umgrenzen. Zunächst hinsichtlich I: dem Mangel an sicheren und zusammenhängenden Quellen uns beugend, beschränken wir uns auf die Betrachtung der beiden Kulturkreise Ägypten („*A*") und Babylonien („*B*"). „*A*" ist ein einigermaßen einheitlicher Kulturkreis ausgeprägter Eigengesetzlichkeit; „*B*" dagegen nur ein Notbehelf zur Zusammenfassung einer Anzahl heute noch nicht in allen Einzelheiten trennbarer Komponenten. In ganz wesentlichen Punkten aufbauend auf sumerischer Grundlage (so geht die „Keilschrift" auf das Sumerische zurück, dessen Rolle in allen Kulturäußerungen man sehr treffend mit der des Lateinischen des Mittelalters verglichen hat), entwickelt sich allmählich eine neue Kultur der semitischen Akkader, in allen Übergängen immer wieder beeinflußt von den Kulturen aller Nachbarvölker. Von einer gegenseitigen Beeinflussung der beiden Kreise *A* und *B* ist in den hier vorliegenden Fragen einstweilen nichts zu erkennen — die folgenden Ausführungen werden zeigen, daß eine solche auch wenig wahrscheinlich ist. Zeitlich genommen führen unsere wesentlichsten Quellen sowohl bei *A* wie *B* etwa in den Anfang des —2. Jahrtausends zurück, vielleicht mit einem relativ geringen Vorsprung von 2 bis 3 Jahrhunderten bei *B*. Vor *A* hat *B* den Vorzug, daß wir von der Existenz mathematischen Wissens explizite Zeugnisse bis weit in hellenistische Zeit hinein haben — eine Tatsache, die offenbar für die Frage der Übernahme orientalischen Wissens durch die Griechen von entscheidender Bedeutung ist. — Die Abgrenzung „vorgriechisch" ist aber doch nicht nur eine Bezugnahme auf den Gesichtspunkt I: hinsichtlich II ist sie fast mit der Unterscheidung „moderne Betrachtungsweise der Mathematik" gegen „vorwissenschaftliche Mathematik" äquivalent — alle Fragen nach Entstehung des Beweisbegriffs, der Formel, des algebraischen Operierens hängen mit dieser Einstellung aufs engste zusammen und rechtfertigen so auch in dieser Hinsicht die Lage der Trennungslinie.

1. Zahlbegriff und Rechentechnik

Eine Betrachtung unter dem Gesichtspunkt I läßt schon in der Ziffernschreibung einschneidende Unterschiede zwischen *A* und *B* erkennen. *A* kennt nur Individualzahlzeichen für die einzelnen Zehnerpotenzen: 𓏺 𓎆 𓍢 𓆼 ... usw. mit rein additiver Zusammenstellung (𓍢𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺 = 132). *B* kennt zwar auch Individualzahlzeichen für 1 und 10 (𒁹 bzw. 𒌋 und 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹 = 32), benutzt sie aber nur zum Ausdruck von Zahlen $\geqq 1$ und $\leqq 59$, indem alle anderen Zahlen durch eine sexagesimale *Positionsbewertung* eben dieser Zahlzeichen ausgedrückt werden ($75 = 1{,}15$, d. h. $1.60 + 15$, aber $1{,}15 = 1.60^k + 15.60^{k-1}$, da es kein Zeichen für „Null" gibt, ein Übelstand, der dadurch ausgeglichen zu werden pflegt, daß die Grundangaben der Rechnung durch bestimmte Maße oder in Zahlworten ausgedrückt werden, woraus sich dann leicht der Stellenwert der abgeleiteten Zahlen ergibt). Ähnlich scharf ist der Unterschied bei den Brüchen: *A* kennt nur für $n > 4$ eine einheitliche Bruchbezeichnung (*r*ꜣ $n = 1/n$, etwa als „Teil *n*" zu übersetzen), während für $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$ Individualzahlzeichen gebraucht sind ($^1/_3 =$ *r*ꜣ 1, $^2/_3 =$ *r*ꜣ 2, dabei in glattem Gegensatz gegen den Sprachgebrauch $r^{2} n = 1/n$ für $n > 4$); B dagegen kennt im mathematischen Sprachgebrauch höchstens eine Sonderbezeichnung für $^{1}/_{2}$, verwendet aber sonst entweder die Wortumschreibung *igi n gál* für $1/n$ oder drückt den Bruch als Sexagesimalbruch aus, sofern dies mit einer endlichen Entwicklung möglich ist (n darf also nur die Primzahlen 2, 3, 5 enthalten; Beispiel: $^{1}/_{2}$ = 30 d. h. 0; 30 = 30/60 oder 1 : 81 (d. h. 1 : 1,21) = 44, 26, 40).

Ähnlich scharf sind die Unterschiede in der Rechentechnik der beiden Kulturkreise. A kennt nur eine rein dyadische additive Multiplikation (schrittweises Verdoppeln und geeignetes Zusammenfassen zur Herstellung des einen Faktors); B entnimmt die Werte der Produkte fertigen Tabellen, die sämtliche Produkte von a (der sog. „Kopfzahl" der betreffenden Tabelle) mit 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40, 50 angibt. Analog die Division: A stellt die Frage $a \cdot x = b$ und beantwortet sie durch schrittweisen dyadisch-additiven Aufbau von x bis zur Erreichung von b; dagegen dienen in B wieder Tabellen für $1/a$ zur Aufsuchung der entsprechenden Sexagesimalbruchentwicklung um dann den gefundenen Wert mit b zu multiplizieren — wenigstens soweit a zu einem endlichen Sexagesimalbruch $1/a$ Anlaß gibt; andernfalls dient ebenfalls die Formulierung $a \cdot x = b$ zum Ausgangspunkt, ohne daß man aber heute die dann einzuschlagende Methode noch ganz übersieht (die Besprechung gewisser Anhaltspunkte für den Fortgang der diesbezüglichen Untersuchung würde hier viel zu weit führen). Am deutlichsten dokumentieren sich diese Unterschiede zwischen A und B naturgemäß in der Bruchrechnung, in der auf Grund der dyadischen Methodik der Multiplikation in A die Frage nach der Umwandlung von $1/n + 1/n$ in eine Summe $1/m_1 + 1/m_2 + \ldots$ das Hauptproblem bildet, während B den Bruch b/a einfach in $b \cdot 1/a$ umsetzt.

Die Schärfe der Unterschiede zwischen A und B, die wir eben konstatieren mußten, erfährt aber einen wesentlichen Ausgleich, sobald man mehr die prinzipiellen Gesichtspunkte in den Vordergrund stellt. Als die in dieser Hinsicht bemerkenswerteste Tatsache erscheint mir hier die besonders bei A deutlich hervortretende *Inhomogenität* der Bruchreihe, die sich in dem Wechsel der Bruchbezeichnungen am deutlichsten markiert, die aber, wie eine ins einzelne gehende Untersuchung zeigt, ihren Einfluß weit in die ganze Rechentechnik hinein erstreckt, insbesondere auch das Grundmotiv für den komplizierten Algorithmus der ägyptischen Bruchrechnung abgibt (vgl. das Literaturverzeichnis am Schluß Nr. 1 und 2). Wir stehen hier an einem jener Punkte historischen Geschehens, wo man deutlich erkennen kann, daß Einflüsse „prälogischer" Art (um einen von Lévy-Bruhl geprägten Ausdruck zu verwenden) das Aussehen großer Gebiete des geistigen Lebens, die sich später direkt in die Wissenschaft fortsetzen, entscheidend beeinflussen können: in unserem Zusammenhange ist es die „Anschauungsgebundenheit" des primitiven Zahlbegriffs, die sich auch heute noch bei primitiven Sprachen deutlich nachweisen läßt (3), die einem gewissen Bereich „natürlicher" Zahlen und „natürlicher" Brüche einen ausgezeichneten Individualcharakter verleiht und ihm damit die wichtige Rolle einer sozusagen „a priori" als gegeben empfundenen Bezugsbasis aller Operationen der allmählich sich entwickelnden Rechentechnik zuteilt. — Diese Betrachtungsweise ist es auch, die zu der Einsicht führt, daß die Unterschiede zwischen Zahlbildung und Rechentechnik von *A* und *B* doch nur verschiedene Entwicklungsstadien, aber nicht prinzipielle Gegensätze verkörpern. Denn die beiden markantesten Eigentümlichkeiten von *B*, sexagesimale Position und daraus entwickelte volle Beherrschung der Bruchrechnung, ruhen in letzter Linie auf denselben Fundamenten wie bei *A*. Positionssystem und spezielle Basis hängen aufs engste mit der Entstehung des Bruchbegriffs aus anschaulichen metrologischen Begriffen (Gewichte und Gewichtsbruchteile als Wertmesser d. h. „Geld"! — man vgl. die römische Bruchbezeichnung) und der Bevorzugung eines bestimmten Kernes „natürlicher" Brüche (kombiniert mit der ersichtlich ursprünglich dezimalen Struktur des Zahlensystems) zusammen (4), während eine genauere Untersuchung der oben erwähnten Multiplikationstabellen zeigt, daß sie ursprünglich gänzlich auf die Bruchrechnung zugeschnitten waren, indem sie als Kopfzahlen gerade solche Zahlen enthalten, die als sexagesimale (endliche!) Entwicklung von Brüchen $1/a$ deutbar sind, also speziell zur Berechnung des sexagesimalen Äquivalents von b/a dienen (und nicht beliebiger Produkte $a.b$). Erst die Elastizität der allmählich entwickelten Positionsschreibung, verbunden mit den glücklichen Teilbarkeitseigenschaften der Basis 60, haben bewirkt, daß dem babylonischen Kulturkreis die Umständlichkeit der ägyptischen Bruchrechnung erspart geblieben ist. Daß dies aber nur ein historisches Zufallsprodukt ist und in keiner Weise mit wirklicher Einsicht in den mathematischen Sachverhalt verbunden ist, zeigen zwei Tatsachen mit besonderer Deutlichkeit: einmal, daß innerhalb des babylonischen Kulturkreises nie der doch so naheliegend scheinende Schritt zu einer absoluten Position gemacht wurde (keine Null!), dann aber, daß sich die griechische Logistik der ägyptischen Bruchrechnung angeschlossen hat, obwohl die Kenntnis der babylonischen Methode doch kaum bezweifelt werden kann — hat ja doch z. B. wenigstens die hellenistische Astronomie sich der sexagesimalen Teilung bedient, aber auch ohne sich der prinzipiellen Tragweite des Verfahrens je voll bewußt geworden zu sein.

Schon aus den wenigen hier skizzierten Tatsachen wird man, wie ich hoffe, ersehen können, daß es erst eines langen historischen Prozesses bedurfte, um zu einer Art empirischen Erschließung der Bereiche der positiven Rationalzahlen und seiner Homogenität zu gelangen — ich möchte hierin geradezu eine der entscheidendsten Leistungen der „vorgriechischen" Kulturen sehen. Und es scheint mir für die Beurteilung der berühmten griechischen Irrationalzahltheorie, wie sie uns durch Euklids „Elemente" erhalten ist, durchaus wesentlich zu sein, daß man beachtet, daß auch die Griechen an dieser empirischen Gegebenheit der Rationalzahlen nichts Wesentliches geändert haben und, wenigstens soweit wir wissen, nicht zu einer einheitlichen Theorie der reellen Zahlen überhaupt gelangt sind.

2. Geometrie

Aus der ägyptischen Geometrie ist bekannt, daß man mit den elementaren Eigenschaften von Drei- und Vierecken Bescheid wußte, daß man einfache Volumina beherrschte, eine recht gute Approximation von π besaß, einen unserem tg bzw. ctg entsprechenden „Böschungs"-Begriff kannte usw. Von prinzipieller Bedeutung sind aber neuere Einsichten in den Inhalt eines (von Struve edierten) Papyrus der Moskauer Sammlung (6); er enthält die Formel

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

für das Volumen des (geraden quadratischen) Pyramidenstumpfs (a, b die Kantenlängen, h die Höhe), ferner eine Formel für die Oberfläche der Halbkugel, die auf der Kenntnis der Beziehung

$$O = \tfrac{1}{2} \cdot 4 F_K$$

hinauskommt, wo F_K die Fläche eines Großkreises bedeutet. Die geschichtliche Bedeutung dieser Tatsachen braucht wohl nicht besonders betont zu werden.

B zeigt wieder wesentliche Unterschiede gegen *A*. Zunächst gibt es hier eine Gruppe geometrischer Beispiele, die man als „Belagerungsrechnungen" bezeichnen kann, da sie ihre Aufgaben in die Form der Berechnung von Wall-Graben-Volumina u. dgl. kleiden; sie laufen meist auf Trapezaufgaben hinaus (die Profile sind Trapeze), sind aber häufig von großer Kompliziertheit und verlangen mehrmals die Lösung quadratischer Gleichungen, die man auch in der heute bekannten Weise gab. Neben der Kenntnis der elementargeometrischen Beziehungen an einfachen Figuren verwendet man auch Beziehungen, die man heute mit den Namen von Thales und Pythagoras zu verbinden pflegt; so sind z. B. für die Sehne s eines Kreises des Durchmessers d und die Maximalhöhe a des Bogens über dieser Sehne (später auch als „sinus versus" bezeichnet) die Beziehungen bekannt (7):

$$s = \sqrt{d^2 - (d - 2a)^2}$$

$$a = \tfrac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - s^2}).$$

Auf die Frage der Approximation irrationaler Quadratwurzeln führt die Berechnung der Rechtecksdiagonale d aus Länge l und Breite b auf Grund von (8, 9 und 10):

$$d = l + \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{l}$$

oder

$$d = l + \frac{2\,b^2\,l}{2\,l^2 + b.}$$

Schließlich sei noch auf Dreiecks- und Trapezaufgaben hingewiesen, die aus einer großen Zahl von Angaben die restlichen Stücke von Teiltrapezen zu berechnen verlangen, Aufgaben, die teils auf lineare, teils auf quadratische Gleichungssysteme für mehrere Unbekannte führen (11).

Man wird wohl sagen dürfen, daß schon aus den eben genannten Tatsachen eine unerwartet umfangreiche Kenntnis geometrischer Beziehungen in den vorgriechischen Kulturen erkennbar wird. Die Frage wird unabweislich, wie man sich bei aller zuzugestehenden Empirie die Gewinnung von Formeln, wie der des Pyramidenstumpfvolumens in ihrer symmetrischen Gestalt, zu denken hat. Das heißt, daß man immer mehr dazu gedrängt wird, sich nach Möglichkeiten formaler Umwandlung empirisch gewonnener Resultate umzusehen (um etwa die Formel für den Pyramidenstumpf aus der Differenz $\frac{h_1}{3}a^2 - \frac{h_2}{3}b^2$ herzuleiten). Man wäre damit auch in der Frage nach der Geschichte des Beweisbegriffes ein gutes Stück weitergekommen, denn die Möglichkeit, aus als gegeben anzusehenden Relationen andere abzuleiten, heißt ja fast schon so viel, als die letzteren zu „beweisen". Man sieht: die Frage nach der Existenz

„algebraischer“ Umformungsmöglichkeiten hängt ganz unmittelbar mit den prinzipiellsten Problemen zusammen, welche uns die Geschichte der antiken Mathematik stellt. Daß sie heute noch keineswegs abschließend beantwortet werden kann, braucht kaum betont zu werden; doch will ich in dem folgenden Abschnitt versuchen, einige Momente hervorzuheben, die vielleicht für ein Vorwärtskommen in dieser Richtung wichtig werden können.

3. Algebraisches

Seit langem ist bekannt, daß die ägyptische Mathematik Aufgaben stellt und löst, die ganz ungeometrischen Charakters sind. So wird z. B. eine unbekannte „Größe“ (x) aus einer Relation gewonnen, die mit $x + 1/3 \cdot x + 1/4 \cdot x = 2$ äquivalent ist. Doch ist hervorzuheben, daß dieser ganze Aufgabenkreis sein Hauptinteresse durchaus auf die Beherrschung der bei der Auflösung dieser linearen Gleichungen entstehenden Aufgaben der Bruchrechnung verlegt, wie ja überhaupt das rein Rechentechnische, das Umgehen mit den Zahlen als solches, das eigentliche Kernproblem der ägyptischen Mathematik ausmacht. Dies gilt auch noch von so komplizierten Beispielen, wie etwa dem des Moskauer Papyrus: Aus den beiden Bedingungen $G = \frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2}$ und $\alpha p_1 = p_2$ sind p_1 und p_2 zu berechnen, was richtig durch $p_1 = \frac{1}{G}(\frac{1}{\alpha} A_2 + A_1)$ geleistet wird, denn die einzelnen Schritte der Rechnung haben durchaus konkrete Bedeutung (es handelt sich um Getreiderechnungen der Grundrelation $G \cdot p = A$, die hier in zwei Teile zerspalten ist — vgl. (2)). Es ist also das eigentlich „algebraische“ Element in diesem ganzen Zweig der ägyptischen Mathematik noch äußerst schwach.

Ganz anders steht es mit *B*. Schon die oben der „Geometrie“ zugezählten Beispiele, die aus Trapezzerlegungen auf ganze Gleichungs*systeme* führen, lassen es als durchaus möglich erscheinen, daß die geometrische Fassung nur eine äußere Einkleidung darstellt. Dies wird um so wahrscheinlicher, wenn man Beispiele wie das folgende betrachtet: aus einer bekannten „Länge“ l (und vier als gegeben zu betrachtenden Parametern, α, β, γ, δ, deren Bedeutung im Augenblick nebensächlich ist) wird eine „Breite“ b durch die Formel berechnet:

$$b = \frac{\delta}{1 + \frac{\alpha + l\beta}{\gamma}} \frac{1}{l};$$

die darauf folgende Aufgabe bestimmt nun umgekehrt l aus b (und den vier Parametern) durch eine Formel, die genau mit der Auflösung der aus der ersten Beziehung resultierenden quadratischen Gleichung identisch ist:

$$l = \frac{1}{b\beta}\left\{\sqrt{\left(\frac{b(\gamma+\alpha)}{2}\right)^2 + \beta\gamma\delta b} - \frac{l(\gamma+\alpha)}{2}\right\}.$$

Man sieht, daß trotz der geometrischen Formulierung das rein formale Rechnen bereits zu einer nicht mehr nach geometrischer „Veranschaulichung" aussehenden Entwicklung gelangt ist, die beispielsweise mit ihrer vollen Beherrschung der quadratischen Gleichungen weit über das uns bei den Griechen bekannte Niveau hinausgeht. Dies wird noch deutlicher, wenn man Beispiele wie $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{xy}{7} = a$, $x + y = b$ mit *inhomogener* Verknüpfung der Unbekannten heranzieht (12). Und die geometrische Repräsentierung der Rechnungen an Trapezaufgaben wird entgültig ausgeschlossen, wenn die Lösung heißt:

$$b = \frac{1}{(1-\alpha)F}\left\{\frac{1}{2}\frac{\beta m b_0 l'}{c} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta m b_0 l'}{c}\right)^2 + 2FF'}\right\};$$

dabei ist zu beachten, daß der Text *beide* Faktoren des unter der Wurzel stehenden Produktes $F \cdot F'$ als „Fläche" bezeichnet, das Produkt also von 4-ter Potenz einer Länge sein müßte. Eine Dimensionsbetrachtung läßt aber erkennen, daß F' dimensionslos ist (denn b ist eine Länge, α und β dimensionslos, b_0, m, c sind Längen, l dimensionslos); also steht man der Tatsache einer bereits so abgeschliffenen Terminologie gegenüber, daß man sich nicht scheut, eine dimensionslose Größe (nämlich das Produkt zweier Streckenverhältnisse) als „Fläche" zu bezeichnen und „Flächen" zu multiplizieren. Ich glaube, man hat das gute Recht, diesen ganzen Aufgabenkreis als Ausdruck einer sehr wesentlichen algebraischen Komponente in der vorgriechischen Mathematik anzusehen. — Es ist nur der Schlußstein dieser Betrachtungsweise, wenn ich auf eine Aufgabengruppe hinweise, die auch noch auf die geometrische Einkleidung ganz verzichtet: es sind Beispiele, die man wohl am besten als Vorläufer der für die Geschichte der Algebra so wichtigen arabischen „Erbteilungsaufgaben" ansehen kann, und die sich damit befassen, Geldsummen, Land usw. nach einem bestimmten Schlüssel (z. B. in arithmetischer Progression — vgl. (12)) unter „Brüder" zu verteilen.

Wenn schon die geometrischen Beispiele die Frage nach formalen Umformungen, als deren Resultat bestimmte *Formeln* erscheinen, in den Vordergrund geschoben hatten, so gilt dies erst recht von den algebraischen Aufgaben in *B*. Und wenn sich auch einstweilen kaum etwas über den Algorithmus solcher Transformationen einer Relation in eine andere etwas Sicheres aussagen läßt, so kann man wenigstens das eine sagen, daß man das Rechnen mit den gegebenen bestimmten Zahlwerten durchaus als Spezialfall des Einsetzens in eine Formel empfunden hatte. Dies läßt sich aus den verschiedensten Anzeichen erkennen; so finden sich Wendungen wie „addiere und subtrahiere die Länge" für unser $\pm l$, oder „bilde die Wurzel aus der Summe" usw. *ohne* besondere Zahlwerte. Auch werden die einzelnen Schritte längerer Rechnungen, wie der Auflösung quadratischer Gleichungen, durch eine feste Phraseologie markiert, so z. B. der halbe Koeffizient des linearen Gliedes immer als Größe „welche quadriert wurde" (bei der Bildung der Diskriminante) oder ähnlich bezeichnet; analog werden Parameter eines Beispiels oft besonders hervorgehoben, auch wenn sie etwa durch den speziellen Zahlwert 1 in dem Zahlenbild der eigentlichen Ausrechnung nicht mehr hervortreten. Zur Ausschaltung solcher Zufälligkeiten werden auch oft einander völlig äquivalente Beispiele, aber mit anderen Parametern, durchgerechnet, so daß die *Gesamtheit* der Beispiele einer allgemeinen Formel gleichwertig ist. (Nebenbei bemerkt, ist dieses Verfahren für die Erschließung dieser Texte von der größten Wichtigkeit, denn es liefert die nötigen „Paralleltexte", die oft allein die Schwierigkeiten der Lesung, der Terminologie, der Interpretation aufzuklären gestatten.) Dieser stark formelmäßige Typus unserer Texte wird noch durch ein nicht zu übersehendes Moment verstärkt, nämlich durch den oft rein ideographischen Charakter der Schrift, insbesondere der Termini (die meist dem Sumerischen entnommen sind); denn ein solches Ideogramm oder eine einheitliche Zeichengruppe spielt bei ihrer ganz fest geregelten Anwendung eben sehr leicht genau die Rolle, die unsere konventionellen Symbole, wie $\int$, Σ, log, sin usw. spielen, so daß die babylonischen Rechnungen durchaus nicht den schleppenden Charakter eines mittelalterlichen lateinischen Traktats über Mathematik haben, sondern sich meist ganz unmittelbar in unsere Formeln umsetzen lassen (was z. B. für die ägyptische Mathematik bei weitem nicht in diesem Maße gilt).

In der Ausgeprägtheit der formalen algebraischen Komponente scheint mir der wesentlichste Gegensatz von *B* gegen die noch mit der elementaren Rechentechnik ringende ägyptische Mathematik zu liegen. Trotzdem ist auch in diesem Zusammenhang darauf hinzuweisen, daß dieser Vorsprung von *B* gegen *A* ohne den Vorsprung gerade der Rechentechnik undenkbar wäre, der einerseits nur eine besonders glückliche Variante in einem Entwicklungsprozeß darstellt, dessen Ausganspunkt in *B* keine prinzipiell andere geistige Struktur voraussetzt als in *A*. Für die geschichtliche Forschung aber liefern die beiden Kulturkreise in ihren Analogien wie in ihren Unterschieden ein Vergleichsmaterial von größter Bedeutung. —

Wir haben zum Schluß noch einen Blick auf die historische Situation in ihrer Gesamtheit zu werfen. Wir haben den indischen Kulturkreis ganz beiseitegelassen, weil wir von ihm nichts wissen. Wir wissen auch nichts von den gegenseitigen Einflüssen, die zwischen *A* und *B* denkbar wären, wenn ich auch glaube, daß wir bei ihrer Ignorierung viel weniger übersehen als bei der Ausschaltung Indiens. Wir wissen praktisch nichts von der ägyptischen Astronomie, nichts von ihrer eventuellen Beziehung zur Mathematik. Daß dieser zweite Satz auch für *B* gilt (wenigstens so viel man heute sieht), ist aber eine durchaus unerwartete Tatsache; schon seit über 40 Jahren besitzt man weitgehende Einsicht in das Getriebe der babylonischen Astronomie, und die weiterschreitende Forschung hat ein imponierendes Gebäude astronomischen Wissens rekonstruieren können (13) —, aber nirgends spannt sich einstweilen eine Brücke von den mathematischen Texten zu den astronomischen (selbstverständlich kommt die Höhe der Rechentechnik von selbst der Astronomie zugute, deren Tabellen etwa mit ägyptischen Bruchregeln undenkbar wären). Diese Beziehungslosigkeit zwischen babylonischer Mathematik und Astronomie erklärt sich vielleicht dadurch, daß einerseits die antike Mathematik doch keinesfalls das Rüstzeug für eine wirklich *rechnende* Astronomie liefern konnte, daß deren Resultate vielmehr nur aus der Superposition ungeheurer Beobachtungsreihen stammen, und daß die ganze babylonische „Astronomie" keineswegs dem Ziel einer exakten *Beschreibung* der Bewegung der Himmelskörper zustrebt, sondern astronomische Phänomene *zusammen* mit Wolkenbildungen, Wasserständen, Erdbeben usw. zu „astrologischen" Zwecken benutzt. Sehr viel mehr schiebt sich aber andererseits die Beziehung zur Metrologie in den Vordergrund. Ich habe schon eingangs angedeutet, daß die Metrologie für die Ausbildung des sexagesimalen Zahlensystems von wesentlicher

Bedeutung gewesen ist; dieses setzt sich fort in der Tatsache, daß die Rechentabellen oft mit metrologischen Tabellen verkoppelt sind; und schließlich zeigen auch die mathematischen Texte immer wieder wesentliche Beziehungen zu metrologischen Dingen —, gar nicht zu gedenken der geradezu ungeheuren Fülle von „Wirtschaftstexten" seit ältester Zeit und jener „Felderpläne", die schon die Anwendung der elementargeometrischen Beziehungen für die Praxis des Katasterwesens erweisen. Der innere Zusammenhang aller dieser Dinge ist nicht zu verkennen, so daß die babylonische Astronomie vielleicht wirklich nur ein später Nutznießer des allgemeinen mathematischen Niveaus ist.

Wie jede neue Einsicht, so bringt uns auch die in die mathematischen Texte der vorgriechischen Kulturen die Lücken unserer Kenntnisse mit besonderer Deutlichkeit zum Bewußtsein. Wie sehr dies für die vorgriechischen Kulturen selbst gilt, geht wohl schon aus den letzten Bemerkungen hervor. Es gilt aber nicht weniger für Griechenland. Denn die Tatsache, daß uns datierte Keilschrifttexte der Seleukidenzeit (d. h. *nach* Alexander dem Großen!) aus Uruk erhalten sind, die u. a. auch die Lösung quadratischer Gleichungen vorführen (14), spiegelt sich an keiner Stelle der uns überlieferten griechischen Mathematik, während andererseits kein Zweifel über engste Beziehungen zwischen Griechen und „Chaldäern" (auch explizite in Uruk) bestehen kann. So wird man sich daran gewöhnen müssen, ein Werk wie Euklids „Elemente" nicht für einen Art Schlußstein der *ganzen* griechischen Mathematik der älteren Periode anzusehen, das für die griechische Mathematik als solche charakteristisch ist, sondern man wird ihm etwa dieselbe Rolle zuteilen müssen, wie Hilberts „Grundlagen der Geometrie" im Rahmen der modernen Mathematik, die auch als *einziges* Dokument unserer Epoche nicht ausreichen würde, den vollen historischen Sachverhalt zu rekonstruieren. Vor allem wird man, glaube ich, die algebraische Komponente der antiken Mathematik, von der uns Diophant nur eine sehr unzureichende, späte und abgeschwächte Vorstellung geben konnte, gegen das geometrische Element immer mehr in den Vordergrund schieben müssen; *denn algebraisches Denken scheint aus den historisch grundlegendsten Begriffsbildungen der Mathematik ebensowenig austilgbar zu sein, wie es in der modernen Mathematik der Fall ist.*

Literaturverzeichnis

(1) Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Springer, Berlin 1926. — (2) Neugebauer, Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, B I, S. 301 ff. — (3) Lévy-Bruhl, Das Denken der Naturvölker, Braumüller, Wien und Leipzig 1926, insb. Kap. V. — (4) Neugebauer, Zur Entstehung des Sexagesimalsystems, Abh. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. NF 13, 1, 1927. — (5) Neugebauer, Sexagesimalsystem und ägyptische Bruchrechnung, Quellen und Studien, B I, S. 183 ff. — (6) Struve, Mathem. Papyrus d. staatl. Mus. d. sch. K. i. Moskau, Quellen und Studien, A I, 1930. — (7) Neugebauer und Struve, Über die Geometrie des Kreises in Babylonien, Quellen und Studien, B I, S. 81 ff. — (8) Weidner, Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke bei den Akkadern um 2000 v. Chr., Orient. Lit. Ztg., 19, 1916, Sp. 257 ff. — (9) Neugebauer, Zur Geschichte des Pythagoräischen Lehrsatzes, Nachr. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, math.-phys. Klasse, 1928, S. 45 ff. — (10) Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Quellen und Studien, A II (in Vorbereitung). — (11) Neugebauer, Zur Geschichte der babylonischen Mathematik, Quellen und Studien, B I, S. 67 ff. — (12) Neugebauer, Beiträge zur Geschichte der babylonischen Arithmetik, Quellen und Studien, B I, S. 120 ff. — (13) Forschungen von Epping, Kugler, Schiaparelli, Weidner, Schnabel, Schoch, Fotheringham u. a. m. — (14) Schuster, Quadratische Gleichungen der Seleukidenzeit aus Uruk, Quellen und Studien, B I, S. 194 ff. — Soweit die textlichen Belege zu den vorstehenden Ausführungen über babylonische Mathematik noch nicht in den zitierten Abhandlungen veröffentlicht sind, wird dies in (10) geschehen.

Nachtrag

Die seit Erstattung dieses Berichtes verflossene Zeit hat es ermöglicht, das Bild der vorgriechischen Mathematik in einigen wesentlichen Punkten schärfer zu umreißen. So ist Peet die Einsicht zu verdanken, daß die oben zitierten Schlüsse über die ägyptische Halbkugeloberflächenberechnung nicht aufrechterhalten werden können und durch geschichtlich sehr viel natürlicher einzuordnende Überlegungen ersetzt werden können (15). Andererseits ist für *B* weiteres Material hinzugekommen, das beispielsweise gestattet, eine sich etwa über ein Jahrtausend fest erhaltende Ordnung des Rechentabellenmaterials nachzuweisen (16). Ferner lassen sich bei den oben genannten Approximationen irrationaler Quadratwurzeln Verbindungen zu den entsprechenden griechischen Methoden herstellen, die, wie schon Tannery gezeigt hat, mit dem Irrationalenproblem einerseits, mit der Musiktheorie andererseits (Intervallteilung!) eng verknüpft sind (17). Schließlich beginnt auch das zentrale Problem der antiken Algebra festere Gestalt anzunehmen durch unmittelbare Analogien zwischen babylonischen Methoden, wie sie auch oben gestreift wurden, und den Methoden der „geometrischen Algebra" (Zeuthen), die vor allem durch Euklid, Buch VI, überliefert sind und das Fundament für die antike Theorie der Kegelschnitte abgegeben haben.

(15) T. E. Peet, Journal of Eg. Arch. 7, S. 100 ff., 1931. Vgl. auch Quellen und Studien B 1, S. 424 ff. — (16) Neugebauer, Quellen und Studien B 1, S. 183 ff. und S. 452 ff. (im Druck). — (17) Tannery, Mém. sc. III, S. 68 ff.; ferner Neugebauer, Arch. f. Orientforschg. 7, Heft 3 (im Druck).