Musterlösungen zu den Übungen

Physik für Naturwissenschaftler

WS 2003/04 Prof. L. Paul

Oliver Passon

14. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Die folgenden Seiten enthalten Musterlösungen für die (meisten) Übungsaufgaben der Veranstaltung “Physik für Naturwissenschaftler” aus dem WS 2003/04. Für die Richtigkeit wird selbstverständlich keine Gewähr übernommen! Im besonderen können beim Einsetzen der Zahlwerte Flüchtigkeitsfehler aufgetreten sein!

Physik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 1

Winter-Semester 2003/2004 — zum 20.Oktober 2003

1. **Trigonometrische Funktionen**
   (a) Wie sind die trigonometrische Funktionen sin, cos, tan und cot definiert?
   (b) Welche Vorzeichen haben diese Funktionen in den vier Quadranten des Einheitskreises?
   (c) Skizzieren Sie die Funktionen im Winkelbereich -2π bis 2π.
   (d) Welche einfachen Beziehungen gelten zwischen den trigonometrischen Funktionen?
      i. zwischen sin und cos ?
      ii. zwischen tan, sin und cos ?
      iii. zwischen tan und cot ?
      iv. zwischen $\sin(x)$ und $\sin(-x)$? Entsprechend für die anderen Funktionen?
      v. Welche Phasenbedingungen gelten zwischen sin und cos bzw. tan und cot?
   (e) Überprüfen Sie folgende Beziehungen:

   $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

   (f) Wie mißt man Winkel im Bogenmaß?
   (g) Wann gelten die folgenden Beziehungen mit einer Genauigkeit von 1% (0,1%)?

   $$\sin x = x \qquad \tan x = x$$

2. **Differentialrechnung**
   (a) Erläutern Sie anschaulich die Bedeutung der Ableitung einer Funktion $f(t)$ nach t.
   (b) Geben Sie die Summen-, Produkt-, Ketten- und Quotienten-Regel an.
   (c) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen (a und ω sind konstant).

   $$f(x) = a \qquad f(x) = x^n \qquad f(t) = e^t \qquad f(y) = a^y \qquad f(x) = \sqrt{x}$$
   $$f(x) = 1/x \qquad f(x) = \sin x \qquad f(t) = \frac{a}{\sqrt{x}} \qquad f(y) = \cos y \qquad f(x) = e^a$$

   $$f(x) = a^{x^2} \qquad f(y) = y^y \qquad f(t) = 2\sin\omega t + \cos\omega t \qquad f(t) = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t$$

3. **Vektoralgebra**
   In einem Orthogonalen Koordinaten-System mit der Basis $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben:

   $$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z \qquad \vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \cdot \vec{e}_z$$

   Ein Vektor $\vec{a}$ hat einen Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ **und** eine Richtung! Ein Vektorfeld ordnet jedem Raumpunkt $\vec{r} = (x, y, z)$ einen Vektor (d.h. Betrag und Richtung) zu. Ein Skalarfeld hingegen ordnet jedem Raumpunkt nur einen Betrag zu.

(a) Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Welche anschauliche Bedeutung hat dieses Produkt? Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ selbst Vektorfelder sind (also $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$, $\vec{b}$ entsprechend), was ist dann $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

(b) Wann gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

(c) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$. Welche anschauliche Bedeutung hat dieses Produkt? Zu welchem Typ Feld gehört $\vec{a} \times \vec{b}$?

(d) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{a}$.

(e) Wann gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$?

(f) Wann gilt $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$?

(g) Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$.

4. **Größenordnungen**
Ordnen Sie die folgenden Dinge bzw. Zeiträume in logarithmischen Skalen!

(a) Längenskala (in m)
Mond, Erde, Sonne, Kind, Atom, Kern, Abstand Sonne-Erde, Virus, Abstand Sonne-Zentrum der Milchstraße, Radius des Universums.

(b) Zeitskala (in s)
Tag, Erdalter, Herzschlag, eine Molekülschwingung, mittlere Lebensdauer von Radium, unterer Grenzwert der Protonlebensdauer, die Zeit die Licht braucht um folgende Abstände zu durchqueren: Kerndurchmesser Atomradius, einen Meter, Sonne-Erde, Mond-Erde.

5. **Physikalische Größen**
Eine physikalische Größe besteht aus Zahlwert und Einheit. Je nach verwendeter Einheit ergeben sich stark unterschiedliche Zahlwerte für eine Größe. Um Fehler beim Rechnen mit physikalischen Größen zu vermeiden, sollte man immer Zahlwerte **und** Einheiten in eine Rechnung einbeziehen.

(a) Was bedeuten die Abkürzungen: a (atto), f (femto), p (piko), n (nano), μ (mikro), k (kilo), M (mega), G (giga), T (tera)?

(b) Laut Spiegel beträgt die in Deutschland im Jahr von Kernkraftwerken produzierte elektrische Arbeit 30000GW/h. Kann diese Angabe stimmen?

(c) Welche Einheit haben h, κ, t und x in den folgenden physikalischen Formeln:

$$p(h) = p_0 \exp^{-\frac{h}{h_0}} \qquad p \cdot V^\kappa = const. \qquad y(t) = y_0 \sin(\omega t + k \cdot x)$$
$$h_0 = 8km \qquad \omega = 5/s \quad k = 2\pi/m$$

Lorenz Paul
29. Oktober 2003

II

Physik für Naturwissenschaftler I
Ü"bungsblatt 2

Winter-Semester 2003/2004 zum 03.November 2003

1. **Beschleunigung eines Automobils**
Ein Fahrzeug wird aus der Ruhe 5,5 s mit 2,4 m/s^2 beschleunigt, fährt dann 3,5 s mit der erreichten Geschwindigkeit weiter und beschleunigt dann nochmals mit 10,5 m/s^2 für 6 s.
   (a) Welche Wege legt es zurück?
   (b) Welche Endgeschwindigkeit erreicht es?
   (c) Zeichne Sie die s-t; a-t-Diagramme, und bestätigen Sie die Werte aus a) und b).

2. **Schwimmer bei einer Flussueberquerung**
Sie sollen einen Fluß mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit (v =2km/h) und 300m Breite schwimmend überqueren. Sie schwimmen mit einer Geschwindigkeit von v_s =3km/h und wählen Ihre Richtung wenn Sie in den Fluß springen.
   (a) Wie müssen Sie schwimmen um den Fluß in kürzestmöglicher Zeit zu überqueren? Welche Zeit brauchen Sie dann? Wie weit werden Sie abgetrieben?
   (b) Fertigen Sie eine Skizze an, welche Bahnkurve erwarten Sie?
   (c) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und zerlegen die Geschwindigkeit in Komponenten. Bestimmen Sie Ihren Geschwindigkeitsvektor.
   (d) Bestimmen Sie den Ausdruck für die Überquerungszeit. Wann wird sie minimal?
   (e) Bestimmen Sie Ihre Richtung im Wasser und die Abdrift.
   (f) Wie müssen Sie schwimmen um nicht abgetrieben zu werden. Wie lange brauchen Sie dann?
   (g) Ein anderer Schwimmer schwimmt mit v_s den Fluß eine Flußbreite hinab und sofort wieder zurück. Bestimmen Sie die Zeit die er benötigt. Wie ist der Zusammenhang zum letzten Punkt? Was geschieht, wenn $v_s = v$ oder $v_s < v$?

3. **Abstand zweier Massepunkte**
Die Bewegungen zweier Massenpunkte werden beschrieben durch die Ortskurven : $\vec{r}_1 = (4, 3, 0)\text{m} + (-1, -1, 2)\text{m/s} \cdot t$ und $\vec{r}_2 = (-10, 5, 6)\text{m} + (1, -2, -1)\text{m/s} \cdot t$. Geben Sie an zu welcher Zeit t_{min} die Massenpunkte den kürzesten Abstand voneinander haben. Welche Position und Geschwindigkeit besitzen die Massenpunkte zur Zeit $t = t_{min}$.

4. **Rotation der Erde**
Die Erde dreht sich gleichförmig um ihre Achse. Der Erdradius beträgt $r_E = 6.37 \cdot 10^6 m$.
   (a) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit (ohne die Drehung der Erde um die Sonne zu berücksichtigen).
   (b) Wie groß sind die Bahngeschwindigkeit und die Zentripetalbeschleunigung eines Punktes an der Erdoberfläche als Funktion der geographischen Breite ?
   (c) Wo liegen die Punkte minimaler und maximaler Geschwindigkeit?

1 Musterlösung für Blatt 1

Alles elementare Aufgaben...!

2 Musterlösung für Blatt 2

2.1 Aufgabe 1: Autobeschleunigung

Ein Auto wird aus der Ruhe $5.5s$ mit $2.4m/s^2$ beschleunigt, fährt dann mit der errichten Geschwindigkeit $3.5s$ weiter und beschleunigt dann nochmals mit $10.5m/s^2$ für $6s$.

a) zurückgelegter Weg?

Der Zusammenhang zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung lautet: $x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$. Es werden $268m$ zurückgelegt.

b) Endgeschwindigkeit?

Die Endgeschwindigkeit beträgt $13.2m/s$

c) Skizze

2.2 Aufgabe 2: Flussüberqerung

Die x-Achse sei entlang der Uferlinie, die y Achse senkrecht dazu. Die Geschwindigkeit als Funktion des Winkels α zur Uferlinie lautet somit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{sch} \cos\alpha + v_{st} \\ v_{sch} \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Dabei ist v_{sch} die Schwimmgeschwindigkeit $(3km/h)$ und v_{st} die Strömmungsgeschwindigkeit $(2km/h)$. Man beachte: die Strömmungsgeschwindigkeit trägt nur in der x-Komponente bei.

Die Zeit für die Flussüberquerung $(300m)$ folgt aus der Beziehung $v_y \cdot t = 300m$, sie beträgt $t_{ü} = 360s/\sin\alpha$. Für $\alpha = 90°$ ist sie minimal. In dieser Zeit driftet man die Strecke A ab, mit:

$$\begin{aligned} A &= v_x \cdot t_{ü} \\ &= (v_{sch} \cos\alpha + v_{st}) \cdot t_{ü} \end{aligned}$$

Im Falle von $\alpha = 90°$ ist $A = 200m$. Den Abtrieb vermeidet man, wenn man den Winkel $\cos\alpha = -v_{st}/v_{sch} = -2/3$ wählt. $(\alpha = 146°)$

2.3 Aufgabe 3: Abstand zweier Massepunkte

Der Differenzvektor lautet $\vec{d}(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Berechnet werden muss die Nullstelle der ersten Ableitung des Betrages dieses Vektors!

2.4 Aufgabe 4: Rotation der Erde

$\omega = 2\pi/86400s = 7.2 \cdot 10^{-5} s^{-1}$. Die Bahngeschwindigkeit beträgt $v = R\omega\cos\alpha$. In unseren Breiten ($\alpha \approx 50°$) sind das ca. $320m/s$. Die Zentripetalbeschleunigung beträgt $a = v^2/r = R\cos\alpha\omega^2$. Sie ist maximal am Äquator und minimal an den Polen.

Physik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 3

Winter-Semester 2003/2004 — zum 10.November 2003

1. **Integralrechnung**

   Das unbestimmte Integral von $f(x)$ sei definiert als : $F(x) = \int f(x)dx$.

   Es gilt $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

   (a) Zeigen Sie, daß auch $F(x) + C$ (C unabh. von x) ein unbestimmtes Integral von $f(x)$ ist.

   (b) Geben sie die Rechenregeln an für

   $$\int af(x)dx = \dots \qquad \text{(a unabh. von x)}$$
   $$\int (f(x) + g(x))\, dx = \dots$$
   $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \dots$$

   (c) Leiten Sie die Regel für die partielle Integration aus der Produktregel der Differentialrechnung ab :

   $$\int f(x)g'(x)dx = \dots$$

   (d) Integration durch Substitution : Vervollständigen Sie

   $$\int f(x)dx = \dots \qquad \text{, wenn gilt : } x = g(y)$$

   (e) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale : (a, b unabhängig von x)

   $$\int x^n dx, \int e^x dx, \int \frac{1}{x}dx, \int \sin x dx, \int \frac{dx}{dy}dy, \int (x^2+2)(x+1)dx$$

   *partielle Integration : $\int xe^x dx, \int \ln x dx,$

   *Substitution : $\int \frac{1}{\sqrt{2x-5}}dx, \int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$

2. **Flächenberechnung**
   Berechnen Sie mit Hilfe des bestimmten Integrals die Fläche eines Viertelkreises mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1.

3. **Flug nach Manila**
   Sie fliegen von Washington (30° nördl. Breite, 77° westl. Länge) nach Manila ($15°N, 121°O$). Berechnen Sie die Länge Ihres Verschiebungsvektors (d.h. die Flugstrecke).

3 Musterlösung für Blatt 3

3.1 Aufgabe 1: Integralrechnung

Alles elementare Aufgaben...in Teil **e)**: Substitution $y = 2x - 5$ und $y = \cos^2 x$

3.2 Aufgabe 2: Flächenberechnung

$$F = \int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$$

Substitution: $y = sin\alpha$: $dx = \cos\alpha d\alpha$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\alpha}\cos\alpha d\alpha \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha d\alpha \end{aligned}$$

Mit partieller Integration: $\int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha d\alpha = \pi/4$

3.3 Aufgabe 3: Flug nach Manila

Lösungsweg: Die Angaben in Längen– und Breitengraden entsprechen Polarkoordinaten. Die kartesischen Ortskoordinaten können aus den Umrechnungsformeln Polar $\rightarrow$ Kartesisch gewonnen werden. Durch Multiplikation gewinnt man den Winkel zwischen den Ortsvektoren. Aus diesem kann der Bruchteil des Erdduchmessers bestimmt werden, der der Flugstrecke entspricht.

Physik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 4

Winter-Semester 2003/2004 — zum 17.November 2003

1. **Überhöhung von Kurven**
   Wie muß eine Bahnstrecke in einer Kurve mit dem Radius R=500m geneigt sein, damit auf einen Zug, der mit einer Geschwindigkeit von 90km/h fährt keine resultierende seitliche Kraft wirkt?

2. **Gravitationsgesetz**
   Das Gravitationsgesetz beschreibt die Anziehungskraft der Masse M auf die Masse m beim Abstandsvektor $\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$.

   $$\vec{F}(r) = -G\frac{m \cdot M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

   Mit der Gravitationskonstanten $G = 6.673 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}/\mathrm{s}^2$.

   (a) Warum taucht in dieser Kraft das negative Vorzeichen auf?
   (b) Berechnen Sie die Änderung der Kraft $\Delta|\vec{F}|(R,h) = F(R+\Delta h) - F(R)$ für $R \gg \Delta h$. (*Gibt es einen Zusammenhang von $\Delta|\vec{F}|$ mit einem wichtigen mathematischen Konstrukt?*)
   (c) Nehmen Sie an $R \simeq 6370$km ist der Erdradius. Begründen Sie warum man in der Nähe der Erdoberfläche die Gravitationskraft als $F = m \cdot g$ schreiben kann?
   (d) Berechnen Sie g aus dem Gravitationsgesetz. Die Erdmasse ist ca. $M = 5.97 \cdot 10^{21}$t.

3. **Gravitations- und Coulombkraft**
   Die Coulombkraft beschreibt die Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen Q und q (in Coulomb 1C = 1As). Die Form des Coulombgesetzes entspricht der des Gravitationsgesetzes.

   $$\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q \cdot Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

   Mit der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums $\epsilon_0 = 8.85$As/Vm.

   (a) Die elektrische Ladung kann positiv oder negativ sein. Was bedeutet das für die Kraft?
   (b) Fassen Sie alle alle Terme im Coulombgesetz außer der Ladung q zum Elektrischen Feld $\vec{E}$ zusammen. Für kleine Änderungen des Radius können wir $\vec{E}$ als fest annehmen.
   (c) Die Erdbeschleunigung g und die Elektrische Feldstärke $\vec{E}$ nehmen in den mathematischen Ausdrücken für die Kräfte äquivalente Stellungen ein. Es ist üblich den Vektor $\vec{E}$ zu benutzen und g als Skalar anzunehmen. Warum? (N.B. Es ist einfach auch nicht zentralsymmetrische elektrische Felder zu erzeugen.)
   (d) Vergleichen Sie jetzt die Beschleunigung eines Körpers der Masse m im Elektrischen Feld und im "Gravitations Feld". Nehmen Sie wieder kleine Radiusänderungen an. Warum taucht im Gravitationsfall die Masse m nicht im Ausdruck für die Beschleunigung auf?

4. **Schiefe Ebene (nach Galilei)**
   Zeigen Sie folgenden, Von Galilei stammenden Satz:

I

Zieht man vom höchsten oder tiefsten Punkt eines senkrecht aufgestellten Kreises Sehnen auf seinen Umfang, dann benötigt ein Massepunkt zum Durchfallen der sich daraus ergebenden schiefen Ebenen (S oder S') immer die gleiche Zeit. Diese Zeit ist gleich der Zeit, die der Körper beim senkrechten, freien Fall durch den Kreisdurchmesser benötigt.

5. **Freier Fall mit Reibung***
Die Geschwindigkeit eines frei in der Atmosphäre fallenden Körpers soll berechnet werden. Er unterliegt der Schwerkraft und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung (z.B. laminare Strömung, $\vec{F}_R = -a\vec{v}, a = const.$)

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\vec{v}(t)$ auf.

   (b) Lösen Sie zunächst diese Differentialgleichung erster Ordnung nach folgendem Verfahren:
      - Substitution: $u(t) = v(t) \pm \frac{mg}{a}$ (Das Vorzeichen hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab).
      - Separation der Variablen (u, t).
      - Integration von $t = 0$ bis $t = T$.

      Alternativ sollten Sie folgenden Weg beschreiten:
      - Benutzen Sie den Exponentialansatz um die homogene Lösung zu bestimmen.
      - Machen Sie einen Ansatz in "Form des Störgliedes" für die spezielle Lösung.

   (c) Skizzieren und diskutieren Sie die Lösung für $v(0) = 0$. Was gilt für $t \to \infty$? Gibt es einen Zusammenhang mit dem Störterm aus 5b?

   (d) Bestimmen Sie die Bahnkurve $x(t)$ durch nochmalige Integration. Skizzieren Sie $x(t)$.

6. **Sport und Physik I**
Bei einem Hallenhandball-Länderspiel Deutschland-CSSR (lange her!) erzielte der deutsche Torwart mit einem Abwurf aus dem eigenen Torraum einen Treffer (der tschechoslowakische Torwart hatte sein Tor verlassen, Abwurfhöhe ist, obwohl unrealistisch, 0m). Der Abstand Torwart - Tor ist 40m, die Höhe des Tors ist 2m, die Erdbeschleunigung sei $10 \mathrm{m/s}^2$.

   (a) Bestimmen Sie den Abwurfwinkel Θ_0, für den die horizontale Abwurfweite maximal wird.

   (b) Nehmen Sie an, der Ball wird unter Θ_0 geworfen und trifft direkt ins Tor. In welchem Bereich liegt dann die horizontale Abwurfgeschwindigkeit v_x^0?

   (c) Hätte der Versuch, das gegnerische Tor direkt zu treffen, in einer 8m hohen Halle (bei einer geeigneten Wahl von v_x^0) Aussicht auf Erfolg?

   (d) Im Abstand von 6m vor dem gegnerischen Tor steht ein Abwehrspieler, der Bälle bis zu einer Höhe von 2.5m abfängt. Wie groß muss v_x^0 sein, damit dieser Spieler den Ball nicht abfangen kann?

[1]

Lorenz Paul
9. November 2003

[1] *die mit einem Stern versehenen Aufgaben können fakultativ bearbeitet werden. Alle übrigen Aufgaben sind obligatorisch!

4 Musterlösung für Blatt 4

4.1 Aufgabe 1: Kurvenüberhöhung

Die Bahnstrecke wird wie eine schiefe Ebene mit Neigung α senkrecht zur Bewegungsrichtung angelegt. Zentrifugal– und Abtriebskaft müssen sich die Waage halten:

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R}\cos\alpha &= mg\sin\alpha \\ \tan\alpha &= \frac{v^2}{Rg} \end{aligned}$$

Mit $v = 90km/h = 25m/s$ und $R = 500m$ folgt $\alpha = 8°$

4.2 Aufgabe 2: Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

a) negatives Vorzeichen

Die Kraft ist anziehend, d.h. verkürzt den Abstand!

b) $\Delta F = F(r + \Delta h) - F(r)$ mit $\Delta h \ll R$

$$\begin{aligned} \Delta|F| &= F(r+\Delta h) - F(r) \\ &= -GmM\left(\frac{1}{r^2 + 2\Delta h r + \underbrace{(\Delta h)^2}_{\approx 0}} - \frac{1}{r^2}\right) \\ &= -GmM\frac{1-(1+2\frac{\Delta h}{R})}{r^2\left(1+2\frac{\Delta h}{R}\right)} \\ &= -GmM\frac{2\Delta h}{r^3\left(1+2\underbrace{\frac{\Delta h}{R}}_{\approx 0}\right)} \\ &= 2G\Delta h\frac{mM}{r^3} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta h} = \frac{2GmM}{r^3} \end{aligned}$$

$\frac{\Delta F}{\Delta h}$ entspricht der Ableitung $dF/dr = 2GmM/r^3$. Es wurden die Näherungen $(\Delta h)^2 \approx 0$ und $\Delta h/R \approx 0$ verwendet.

c) und d) F_G in der Nähe der Erdoberfläche

Für $r_E = 6370km/h$ (Erdradius), $G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3/kgs^2$ und $M_E = 5.97 \cdot 10^{24} kg$ (Erdmasse) findet man $GM_E/r_E^2 = 9.81m/s^2$. Diese Näherung (d. h. konstante Erdbeschleunigung) ist gut, da der Fehler wie $\Delta h/r_E^3$ geht (nach Augabenteil b)). Selbst in einigen $100km$ Höhe besitzt die Erdbeschleunigung g noch gut 90% ihres Wertes!

4.3 Aufgabe 3: Vgl: Gravitation und Coulombkraft

a) Bedeutung der Vorzeichen der elektrischen Ladung für die Kraft

Anziehende und abstoßende Kraft.

b) Elektrische Kraft und Feld

$$\vec{F}_{el} = q \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{=\vec{E}(r)}$$

c) Warum g skalar und $\vec{E}$ vektoriell ?

Im Falle der Erdbeschleunigung ist die Richtung "zum Erdmittelpunkt" ausgezeichnet. In vielen Zusammenhängen reduzieren sich die Probleme dadurch zu Eindimensionalen. Betrachtet man jedoch schiefen Wurf etc., muss die Richtung der Erdbeschleunigung (also $\vec{g}$) ebenfalls berücksichtigt werden! Im Falle elektrische kraftwirkungen gibt es keine bevorzugte Geometrie mit ausgezeichneter Symmetrieachse. Hier muss im allg. also immer der vektorwertige Charakter des E-Feldes berücksichtigt werden.

d)

Ladung und Masse sind unabhängige Eigenschaften! Die (schwere) Masse des Gravitationsgesetz und die (träge) Masse des newtonschen Axioms sind jedoch identisch (genauer: proportional zueinander...)

4.4 Aufgabe 4: schiefe Ebene nach Galilei

Zu zeigen: Die Fallzeiten auf den schiefen Ebenen, die als Sekanten eines Kreises (Scheitelpunkt des Kreises als Anfangspunkt) konstruiert werden, sind alle identisch und gleich der Zeit, die ein Körper vom Scheitelpunkt im freien Fall braucht.

(i) Für den freien Fall aus dem Scheitelpunkt eines Kreises mit Radius R braucht der Körper:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} g t^2 \\ &\Rightarrow 2R = \frac{1}{2} g t_f^2 \\ &\Rightarrow t_f = \sqrt{4R/g} \end{aligned}$$

(ii) Eine Sekante (d.h. schiefe Ebene) die den Winkel α mit dem Lot einschließt, dass vom Scheitelpunkt gefällt wird, hat die Länge $2R\cos\alpha$. Auf dieser schiefen Ebene wirkt die Kraft $mg\cos\alpha$. Also:

$$\begin{aligned} 2R\cos\alpha &= \frac{1}{2}g\cos\alpha t_f^2 \\ &\Rightarrow t_f = \sqrt{4R/g} \end{aligned}$$

4.5 Aufgabe 5: freier Fall mit Reibung

Wir betrachten den freien Fall ($m\ddot{x} = mg$) mit Reibung ($m\ddot{x} \sim \dot{x}$). Dabei wird das Verfahren "**Trennen der Variablen**" angewendet.

Die BWGl für $v(t) = \dot{x}$ lautet:

$$\begin{aligned} mg - av(t) &= m\dot{v}(t) \\ \dot{v}(t) + \frac{a}{m}v(t) &= g \end{aligned}$$

Diese DGL ist also *erster* Ordnung in $v(t)$. Um den Ort als Funktion der Ort zu gewinnen, muß die Lösung später noch einmal integriert werden. Wichtig ist das relative Vorzeichen zwischen der Erdanziehungskraft mg und der Reibungskraft av. Die eine beschleunigt, die andere bremst ab! An dieser Stelle ist der inhomogene Term ("g") störend, und wir substituieren[1] $v(t) = u(t) + \frac{mg}{a}$. Dadurch erhalten wir in der Variablen u die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{u} + \frac{a}{m}(u + \frac{mg}{a}) - g &= 0 \\ \dot{u} + \frac{a}{m}u &= 0 \end{aligned}$$

In der folgenden Schreibweise ist die Variablenseparation besonders intuitiv:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{a}{m}u &= 0 \\ \frac{1}{u}\frac{du}{dt} + \frac{a}{m} &= 0 \\ \frac{1}{u}du &= -\frac{a}{m}dt \end{aligned}$$

nun können beide Seiten integriert werden:

$$\begin{aligned} \int_{u(0)}^{u(T)} (1/u)du &= -(a/m)\int_0^T dt \\ \ln|u(T)| - \ln|u(0)| &= -(a/m)T \\ \ln|u(T)| &= -(a/m)t + \ln|u(0)| \\ |u(T)| &= |u(0)| \cdot e^{-(a/m)\cdot T} \end{aligned}$$

[1] Durch diesen Trick vereinfacht sich die Rechnung, allerdings kann die DGL auch direkt gelöst werden! Siehe hierzu den Abschnitt "Alternativer Lösungsweg"

Mit Hilfe der Beziehung $u(t) = v(t) - \frac{mg}{a}$ kann wieder zur tatsächlichen Geschwindigkeit v rücksubstituiert werden, und man findet (für T ist nun wieder t geschrieben):

$$
\begin{aligned}
v(t) - \frac{mg}{a} &= (v_0 - \frac{mg}{a}) \cdot e^{-(a/m) \cdot t} \\
v(t) &= v_0 \cdot e^{-(a/m) \cdot t} + \frac{mg}{a}(1 - e^{-(a/m) \cdot t})
\end{aligned}
$$

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen dieser Funktion für $v_0 = 0$ und $\frac{mg}{a} = 1$. Man erkennt, daß die Funktion sich der Grenzgeschwindigkeit $v_g = \frac{mg}{a}$ annähert. Diese Geschwindigkeit kann aber gerade aus der Bedingung $mg = av$ (sprich: Reibung und Erdanziehung halten sich die Waage) abgelesen werden! $v_g = \frac{mg}{a}$ wird immer größer je kleiner der Reibungskoeffizient ist, und schließlich unendlich für $a \to 0$. Hier geht die Bewegung in den freien Fall ohne Reibung über.

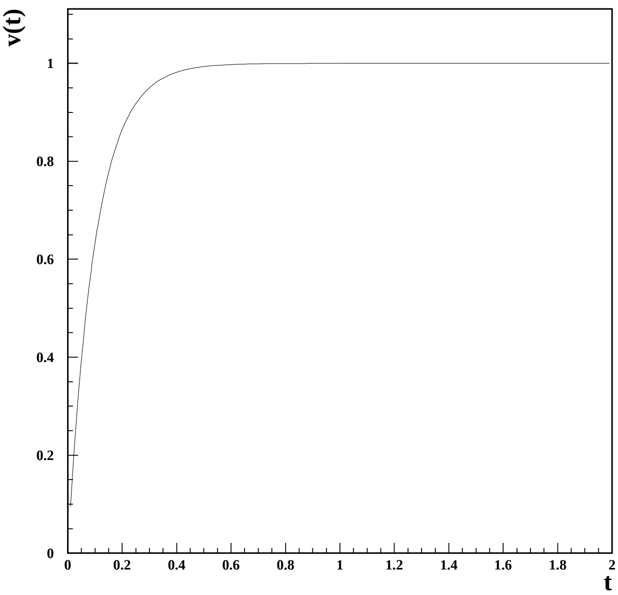


Abbildung 1: Geschwindigkeit des freien Falles mit Reibung für $v_0 = 0$ und $\frac{mg}{a} = 1$.

Integrieren der Geschwindigkeit liefert (für $v_0 = 0$) den Ort als Funktion der Zeit:

$$
\begin{aligned}
x(t) - x_0 &= \int_0^t v_g(1 - e^{-(a/m) \cdot t'}) dt' \\
x(t) &= x_0 - v_g(m/a) + v_g t + v_g(m/a) e^{-(a/m) \cdot t} \\
x(t) &= x_0 + v_g[t + (m/a) e^{-(a/m) \cdot t} - (m/a)]
\end{aligned}
$$

Die Abbildung 2 zeigt den Graphen dieser Funktion für $x_0 = 0$ und wiederum $\frac{mg}{a} = 1$. Man erkennt, daß die Funktion sich einer Geraden mit der Steigung v_g annähert! Im Limes $t \to \infty$ geht der Ausdruck in der eckigen Klammer nämlich gegen t.

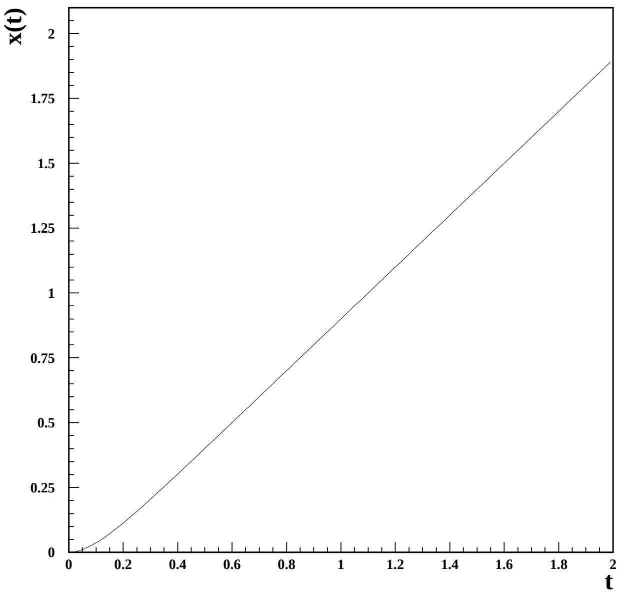


Abbildung 2: Ort als Funktion der Zeit beim freien Fall mit Reibung (mit $x_0 = 0$ und $v_g = \frac{mg}{a} = 1$) Der Graph nähert sich einer Geraden mit der Steigung v_g an.

Alternativer Lösungsweg

In obiger Lösung wurde durch die Substitution $v(t) = u(t) + \frac{mg}{a}$ ein gewisser Rechenvorteil erzielt. Wer Zweifel daran hat auf diesen Trick auch selber gekommen zu sein mag es beruhigend finden, daß man die selbe Lösung auch direkt gewinnen kann:

Unser Ausgangspunkt war die Gleichung

$$m\dot{v}(t) = mg - av(t)$$

löst man nach der Ableitung auf gewinnt man:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - av(t)}{m}$$

Nun kann wieder die "Trennung der Variablen" vorgenommen werden:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{mg - av} &= \frac{dt}{m} \\
\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv'}{mg - av'} &= \int_0^t \frac{dt'}{m} \\
\left[-\frac{\ln mg - av'}{a} \right]_{v(0)}^{v(t)} &= \frac{t}{m} \\
\ln \frac{mg - av(t)}{mg - av(0)} &= -\frac{a}{m} t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{mg - av(t)}{mg - av(0)} &= e^{-\frac{a}{m}t} \\ mg - av(t) &= (mg - av(0))e^{-\frac{a}{m}t}\end{aligned}$$

Schließlich findet man (für $v(0)$ ist wieder v_0 geschrieben worden) die selbe Lösung:

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-(a/m)\cdot t} + \frac{mg}{a}(1 - e^{-(a/m)\cdot t})$$

In diesem Lösungsweg ist also die einzige "Schwierigkeit", die Stammfunktion von $\frac{1}{mg-av}$ zu finden.

4.6 Aufgabe 6: Sport und Physik

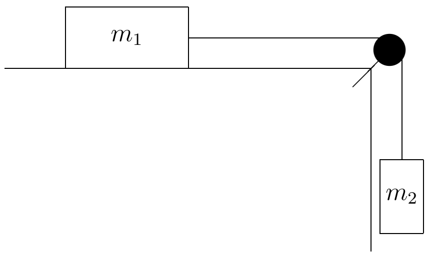
Einfache Anwendung des schiefen Wurfes...

Physik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 5

Winter-Semester 2003/2004 — zum 24.November 2003

1. **Bewegung gekoppelter Massen**
Die beiden Massen $m_1 = 1$ kg und $m_2 = 0.5$ kg sind über einen Faden verbunden, der über eine reibungsfreie und masselose Rolle geführt wird.

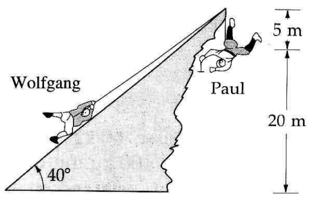
(a) Zwischen dem Tisch und der Masse m_1 trete zunächst keine Reibung auf. Bestimmen Sie die Beschleunigung des Systems und die Kraft in dem Faden.



(b) Zwischen dem Tisch und der Masse m_1 trete Reibung auf. Der Reibungskoeffizient sei $\mu = 0,15$. Bestimmen Sie die Beschleunigung des Systems und die Fadenkraft.

2. **lebensrettende Seilschaft***
Zwei Bergsteiger an einem vereisten (reibungsfreien!)Abhang seien durch ein 30 m langes Seil verbunden und - wie aus nebenstehender Abbildung ersichtlich - in eine Notlage geraten. Der obere Kletterer Paul (52 kg) war einen Schritt zu weit gegangen und sein Freund Wolfgang (74 kg) hat vor Schreck seinen Eispickel verloren.Zur Zeit $t = 0$ sei ihre Geschwindigkeit gleich null.

(a) Bestimmen Sie die Zugkraft im Seil, während Paul fällt, und die Geschwindigkeit, mit der er am Boden auftrifft.



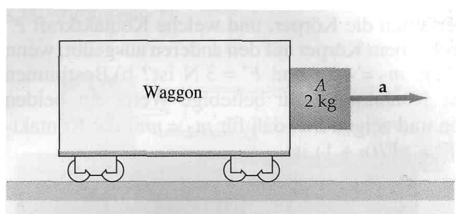
(b) Paul löst das Seil, nachdem er am Boden angekommen ist. Mit welcherGeschwindigkeit erreicht Wolfgang dann den Boden?

3. **Reibungskraft durch beschleunigte Bewegung**

Der Haftreibungskoeffizient μ zwischen dem Körpers A und dem Waggon in der nebenstehenden Abbildung betrage 0,6. Der Körper habe eine Masse von 2kg.

(a) Bestimmen Sie die kleinste Beschleunigung a, bei der der Körper nicht nach unten fällt.

(b) Wie groß ist die Reibungskraft in diesem Falle?



(c) Wenn die Beschleunigung über diesen kleinstenn Wert ansteigt, wird dann auch die Reibungskraft größer als im Falle b)? Geben Sie eine Erklärung.

(d) Zeigen Sie, daß der Körper bei beliebiger Masse nicht nach unten fällt, wenn $a \geq g/\mu$.

4. **Kirmesvergnügen**
Auf der Kirmes ist häufig ein rotierender Zylinder aufgebaut (Rotor), in dem Personen mit

dem Rücken zur Innenwand stehen können. Nun wird der Boden abgesenkt, aber die Personen fallen wegen der Reibung nicht nach unten. Mit welcher Frequenz mut der Zylinder zumindest rotieren, wenn er einen radius von $4m$ besitztund der Reibungskoeffizient zwischen Person und Wand 0,4 beträgt?

5. **Aerosole in der Luft**
   Kleine kugelförmige Rußpartikel erfahren nach dem Stokesschen Gesetz eine viskose Reibungskraft $F = K \cdot \eta v$ wobei R der Radius der Teilchen, v ihre Geschwindigkeitund η die Viskosität des Mediums darstellt.

   (a) Schätzen Sie die Endgeschwindigkeit in Luft von kugelförmigen Staubteilchen ($K = 6\pi R$) ab. Sie haben einen Radius von $10^{-5}m$ und eine Dichte (Masse pro Volumeneinheit)von $2g/cm^3$. Nehmen Sie an, dass die Luft in Ruhe ist und dass $\eta = 1,810^{-5}Ns/m^2$ beträgt.

   (b) Schätzen Sie ab, wie lange es dauert, bis ein solches Teilchen von einem 100 m hohen Schornstein heruntergefallen ist.

[1]

Lorenz Paul
16. November 2003

[1] *die mit einem Stern versehenen Aufgaben können fakultativ bearbeitet werden. Alle übrigen Aufgaben sind obligatorisch!

5 Musterlösung für Blatt 5

5.1 Aufgabe 1: gekoppelte Massen

Die Masse m_1 (auf dem Tisch) und m_2 (hängend) sind über einen Faden mit Umlenkrolle verbunden. Berechnen sie Beschleunigung und Fadenkraft.

a) ohne Reibung

Die wirkende Kraft ist $m_2 g$. Daraus resultiert die gesucht Beschleunigung a der Gesamtmasse $m_1 + m_s$. Also:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)a &= m_2 g \\ a &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \end{aligned}$$

Der Faden zieht die Masse m_1 mit dieser Beschleunigung. Die Fadenspannung beträgt also $m_1 \cdot a = m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} g$. Folgende Betrachtung zeigt, dass diese Fadenspannung sinnvoll ist: Im Falle $m_1 \to \infty$ sollte die Fadenspannung $m_2 g$ betragen. Tatsächlich findet man:

$$\begin{aligned} F_f &= m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \\ &= \frac{m_2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} g \\ &\Rightarrow \lim_{m_1 \to \infty} F_f = m_2 g \end{aligned}$$

b) mit Reibung

Bei zusätzlicher Reibung zwischen m_1 und der Unterlage liest sich die Kraftbilanz wie folgt:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)a &= m_2 g - \mu m_1 g \\ a &= \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g \end{aligned}$$

Für die Fadenkraft gilt dann

$$\begin{aligned} F_f &= m_1 a + \mu m_1 g \\ &= m_1 (a + \mu g) \end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 2: gekoppelte Massen II

Lösung analog zu Auf. 1 + Anwendung der Energieerhaltung ($mgh_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$).

5.3 Aufgabe 3: Reibung durch Beschleunigung

a) Mindestbeschleunigung

Die Beschleunigung a bewirkt die Reibungskraft $ma\mu$ (mit $m = 2kg$ und $\mu = 0.6$). Diese muss größer als die Erdanziehung sein:

$$\begin{aligned} \mu ma &\geq mg \\ a &\geq \frac{g}{\mu} = 16.35m/s^2 \end{aligned}$$

b) Reibungskraft

Die Reibungskraft beträgt dann $2kg \cdot 0.6 \cdot 16.35m/s^2 = 19.6N$

c) Wächst die Reibung im Falle größerer Beschleunigung?

Naive Erwartung könnte sein, dass im Falle einer weiteren Beschleunigung $a > \frac{g}{\mu}$ die Reibungkraft größer als die Erdanziehung wird und somit die Masse nach oben gleitet! Tatsächlich ist die Reibungskraft jedoch eine "Gegenkraft", d.h. sie tritt nur als Reaktion auf eine Bewegung auf. Falls der Körper aber ruht, ist sie nicht wirksam. Inhaltlich argumentiert: Die Reibung ist Folge mikroskopischer Unebenheiten auf der Oberfläche der sich berührenden Körper. Diese Unebenheiten "verhaken" sich im Falle der Bewegung. Ohne Bewegung tritt dieser Effekt also nicht auf.

5.4 Aufgabe 4: Kirmesvergnügen

In einem rotierenden Zylinder (r=4m) werden Personen durch die Reibungskraft ($\mu = 0.4$) an der Wand fixiert. Wie groß muss die Frequenz sein?

Es wirken zwei Beschleunigungen: Zentrifugalbeschleunigung $F_z = \omega^2 r$ und dadurch die Reibungkraft $\mu\omega^2 r$ sowie die Erdbeschleunigung g (bzw. Schwerkraft mg). Um nicht zu fallen, muss gelten:

$$\begin{aligned} \mu\omega^2 r &\geq g \\ \omega &\geq \sqrt{g/(\mu r)} \end{aligned}$$

Für die Frequenz muss also gelten $f = \frac{\omega}{2\pi} \geq \frac{\sqrt{g/(\mu r)}}{2\pi} = 0.32s^{-1}$

5.5 Aufgabe 5: viskose Reibung

Wir betrachten die Bewegung von Rußpartikeln unter dem Einfluss viskoser Reibung. Es gilt:

$$\begin{aligned} r &= 10^{-5}m \quad \text{Radius der (kugelförmigen) Teilchen} \\ \eta &= 1.8 \cdot 10^{-5} Ns/m^2 \quad \text{Viskosität des Mediums} \\ \rho &= 2000kg/m^3 \quad \text{Dichte der Rußpartikel} \end{aligned}$$

Die Stokesche Reibungskraft beträgt $F_s = K \cdot \eta \cdot v$, mit $K = 6\pi r$ bei Kugelförmigen Körpern. Zuerst müssen wir aus der Dichte auf die Masse der Rußpartikel schließen: $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 8.4 \cdot 10^{-12} kg$.

a) Endgeschwindigkeit

Die Reibungskraft wirkt entgegen der Erdanziehung mg. Die Endgeschwindigkeit ist dadurch charakterisiert, dass diese beiden Kräfte sich kompensieren:

$$\begin{aligned} F_s &= mg \\ 6\pi\eta r v &= mg \\ &\Rightarrow \quad v = \frac{mg}{6\pi\eta r} = 0.02 m/s \end{aligned}$$

a) Falldauer von 100m hohem Schornstein

Näherungsweise ist die Bewegung gleichförmig, d.h. $s = vt$. Bei v aus Teil a) und $s = 100m$ gilt $t = 83min$.

Physik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 6

Winter-Semester 2003/2004 — zum 1.Dezember 2003

1. **Schwingungen eines harmoniachen Oszillators**
   Eine Masse $m = 0,5[kg]$ hängt an einer Feder mit der Federkonstante $k = 2[N/m]$ und schwingt.
   (a) Welche Kräfte wirken auf die Masse?
   (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie jeweils mit den Ansätzen
   $$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad \text{bzw.} \quad x(t) = C\sin(\omega t + \phi) \tag{1}$$
   (c) Diskutieren Sie die Lösung und bestimmen Sie die Schwingungsdauer.
   (d) Welche Anfangsbedingungen müssen Sie vorgeben, um das Problem eindeutig festzulegen?
   (e) Wie sind die freien Parameter A, B (C, ϕ) zu wählen, wenn zur Zeit $t = 0$ der Oszillator durch die Gleichgewichtslage schwingt bzw. wenn er sich im Umkehrpunkt befindet?

2. **Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld***
   Die Bahnkurve eines Elektrons in einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B}$ ist durch $\vec{r}(t) = (r\sin\omega t, r\cos\omega t, v_z t + z_0)$ gegeben.
   (a) Wie sieht die Bahnkurve aus ?
   (b) Wie ist die Geschwindigkeit (Beschleunigung) des Elektrons abhängig von der Zeit ?
   (c) Zerlegen Sie die Geschwindigkeit in zwei, dem Betrag nach konstanten Anteile. Welche Bewegungen entsprechen diese Anteile ?

3. **Die Zyklotronfrequenz verschiedener Teilchen im Magnetfeld**
   Berechnen Sie die Winkelfrequenz ω_c (Zyklotronfrequenz) für verschiedene Bahngeschwindigkeiten $\vec{v}_0$, mit der ein Proton in einem Magnetfeld $|\vec{B}| = 1$ Tesla$= N \cdot s/C \cdot m$ (senkrecht zu $\vec{v}_0$) umläuft. Vergleichen Sie die Zyklotronfrequenzen für Elektron ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$), Proton ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27)} kg$) und einfach ionisiertes U^{238} ($m_{238} = 3,96 \cdot 10^{-25} kg$).

4. **Corioliskraft**
   Der Niederrhein hat eine Breite von ca. 500 m und fließt mit einer Geschwindigkeit von etwa 5 km/h. Bestimmen Sie den zusätzlichen Druck (Kraft pro Einheitsfläche) auf das Ufer, der durch die Corioliskraft erzeugt wird, wenn der Fluß genau in nördlicher Richtung fließt. (Die Dichte ρ ist definiert als die Masse pro Volumeneinheit. Für Wasser findet man: $\rho = 10^3 kg/m^3$)

5. **Die Waage im Aufzug**
   Ein Mann stellt sich in einem Aufzug auf eine Personenwaage (Federwaage). Solange der Aufzug steht, zeigt die Waage 750 N Gewicht an; während des Anfahrens zeigt sie 820 N.
   (a) Fährt der Aufzug aufwärts oder abwärts?
   (b) Welche Beschleunigung hat er?
   (c) Was würde eine austarierte Dezimalwaage (Balkenwaage) unter gleichen Bedingungen anzeigen?

I

(d) Wie groß ist während des Anfahrens der Zug im Tragseil, wenn der leere Aufzug $4 \cdot 10^{+3}$ N wiegt?

[1]

Lorenz Paul
21. November 2003

[1] *die mit einem Stern versehenen Aufgaben können fakultativ bearbeitet werden. Alle übrigen Aufgaben sind obligatorisch!

6 Musterlösung für Blatt 6

6.1 Aufgabe 1: Der harmonische Oszillator

a) Welche Kräfte wirken?

Die Feder bewirkt eine rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung x: $F = -kx$. Im Schwerefeld der Erde wirkt zusätzlich die Gravitation. Diese bewirkt aber lediglich eine Veränderung der Ruhelage der Feder. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems (d.h. Ursprung in der Ruhelage) kann diese "ignoriert" werden.

b), c), d) und e)

Die Bewegungsgleichung lautet $m\ddot{x} = -kx$. Wir bringen die DGL durch Division mit m auf die Standardform:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Üblich ist nun die Definition $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, denn wir werden später als Lösung eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 finden.

Das Problem ist erst eindeutig definiert, wenn zusätzlich die Randbedingungen bekannt sind. Deren Anzahl entspricht gerade der Ordnung der DGL. In unserem Fall können etwa $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ vorgegeben sein.

- **Ansatz:** $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t \\ \ddot{x} &= -\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\omega^2 x \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL führt auf:

$$\begin{aligned} -\omega^2 x + \omega_0^2 x &= 0 \\ x(\omega_0^2 - \omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten ("Werte von t") erfüllt sein soll, gilt offensichtlich $\omega^2 = \omega_0^2$. Die Parameter A und B werden erst durch die Forderung bestimmter Randbedingungen eindeutig festgelegt. Die Forderung eines bestimmten Ortes zur Zeit $t = 0$ führt auf:

$$\begin{aligned} x_0 &= A\sin 0 + B\cos 0 \\ B &= x_0 \end{aligned}$$

und analog für v_0:

$$\begin{aligned} v_0 &= A\omega\cos 0 - B\omega\sin 0 \\ A &= v_0/\omega \end{aligned}$$

- **Ansatz:** $x(t) = C \sin \omega t + \phi$

  Das eine Linearkombination von Sinus und Cosinus äquivalent zu einem Ansatz mit $\sin \omega t$ und Phase ϕ ist, ersieht man unmittelbar der Beziehung:

  $$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

  Durch zweimaliges Ableiten und Einsetzen des Ansatzes wird man wiederum unmittelbar auf die Beziehung $\omega^2 = \omega_0^2$ geführt. Nun müssen also noch C und die Phase durch die Anfangsbedingungen ausgedrückt werden. Man findet $\tan \phi = \frac{\omega x_0}{v_0}$ und $C = \frac{x_0}{\sin \phi}$

6.2 Aufgabe 2: Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld

a) Bahnkurve

Die Bahn verläuft längs einer Spiralkurve

b) Geschwindigkeit und Beschleunigung Geschwindigkeit und Beschleunigung findet man durch komponentenweises Ableiten:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} r\omega \cos \omega t \\ -r\omega \sin \omega t \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \sin \omega t \\ -r\omega^2 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Zerlegung der Geschwindigkeit in betraglich konstante Anteile

Offensichtlich gilt: $v_z = const.$ und $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = const.$

6.3 Aufgabe 3: Die Zyklotronfrequenz

Die Zyklotonfrequenz ist die Umlauffrequenz eines geladenen Teilchens senkrecht zur Richtung eines konstanten Magnetfeldes: $\omega_Z = \frac{QB}{m}$, mit Q der Ladung des Teilchens, m seiner Masse und B der Magnetfeldstärke. (Herleitung: Da die Lorentzkraft $\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}$) senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, zwingt sie geladene Teilchen auf eine Kreisbahn. Sie entspricht also einer Zentripetalkraft $F = mr\omega^2$ (mit $v = \omega r$). Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= QvB \\ m\omega v &= QvB \\ &\Rightarrow \omega = \frac{QB}{m} \end{aligned}$$

In unserer Aufgabe ist die Stärke des B Felds vorgegeben, und ω soll für verschiedene Massen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \omega_e &= 1.76 \cdot 10^{11} s^{-1} \\ \omega_P &= 9.6 \cdot 10^{7} s^{-1} \\ \omega_U &= 4 \cdot 10^{5} s^{-1} \end{aligned}$$

6.4 Aufgabe 4: Die Corioliskraft

Vorbemerkung: Herleitung der Corioliskraft

Ein Beobachter in einem *rotierenden* Bezugssystem drückt Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe seines Koordinatensystems $\hat{e}_i$ $(i \in 1, 2, 3)$ aus:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\hat{e}_i(t) \tag{1}$$

$$\vec{v}_R(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i(t)\hat{e}_i(t) \tag{2}$$

$$\vec{a}_R(t) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i(t)\hat{e}_i(t) \tag{3}$$

Der Index R deutet an, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung sich auf das rotierende System beziehen. **Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ ist mit Bedacht nicht indiziert worden, da er (bezüglich seiner Koordinaten) den physikalischen Ort bezeichnet!** Da die Basisvektoren $\hat{e}_i$ also ebenfalls Zeitabhängig sind, ergeben sich die Geschwindigkeit und Beschleunigung aus Sicht eines Inertialsystems zu:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \sum_i \frac{dr_i}{dt}\hat{e}_i(t) + \sum_i r_i \frac{d}{dt}\hat{e}_i(t) \\ &= \vec{v}_R + \sum_i r_i \frac{d}{dt}\hat{e}_i(t) \end{aligned}$$

und für die zweite Ableitung des Ortes:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_i \frac{d^2 r_i}{dt^2}\hat{e}_i(t) + 2\sum_i \frac{dr_i}{dt}\frac{d}{dt}\hat{e}_i + \sum_i r_i \frac{d^2}{dt^2}\hat{e}_i(t) \tag{4}$$

$$= \vec{a}_R(t) + 2\sum_i \frac{dr_i}{dt}\frac{d}{dt}\hat{e}_i + \sum_i r_i \frac{d^2}{dt^2}\hat{e}_i(t) \tag{5}$$

Für den wichtigen Spezialfall eines rotierenden Systems mit *konstanter* Winkel–geschwindigkeit[2] ω (d.h. $\dot{\omega} = 0$), ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_i(t) = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\hat{e}_i(t)\right) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \hat{e}_i}_{=0} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d}{dt}\hat{e}_i}_{=\vec{\omega}\times\hat{e}_i} \tag{7}$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) \tag{8}$$

[2]Man beachte, dass die Darstellung der Winkelgeschwindigkeit im Inertial– bzw. rotierenden System sich um ein Vorzeichen unterscheiden!

Einsetzen der Beziehungen 6 und 8 in Gleichung 5 führt auf:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \vec{a}_R(t) + 2\sum_i \frac{dr_i}{dt} \underbrace{\frac{d}{dt}\hat{e}_i}_{=\vec{\omega}\times\hat{e}_i} + \sum_i r_i \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\hat{e}_i(t)}_{=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{e}_i)} \\
&= \vec{a}_R(t) + 2\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i \frac{dr_i}{dt}\hat{e}_i}_{=\vec{v}_R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i r_i\hat{e}_i)}_{=\vec{r}} \\
&= \vec{a}_R(t) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})
\end{aligned}$$

Besteht der rotierende Beobachter auf der Beschreibung bezüglich seiner Koordinaten, so ist er gezwungen zusätzliche Kräfte einzuführen. Wir lösen die letzte Gleichung nach $\vec{a}_R(t)$ auf und multiplizieren sie mit der Masse m. $m\vec{a}_R$ bezeichnet dabei die Kraft, die der Beobachter im rotierenden System wahrnimmt:

$$m\vec{a}_R = \underbrace{m(d^2\vec{r}/dt^2)}_{\text{physikalische Kraft}} \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Fliehkraft}}$$

Die Corioliskraft tritt also nur dann auf, wenn das System eine nichtverschwindene Geschwindigkeit $\vec{v}_R$ aufweist. Die Fliehkraft hingegen ist von dieser Bedingung unabhängig.

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Die relevante Winkelgeschwindigkeit resultiert aus der Erdrotation: $2\pi/86400 = 7.2 \cdot 10^{-5} s^{-1}$. Senkrecht zur Flussgeschwindigkeit wirkt jedoch nur ein Anteil, der vom Breitengrad abhängt ($\approx 50°$).

Die Strömunggeschwindigkeit beträgt $5km/h = 1.39m/s$. Senkrecht zu einem Quadratmeter Ufer liegt eine Wassersäule von $5 \cdot 10^5 kg$ (500m Flussbreite). Damit ergibt dich die Corioliskraft auf einem m^2 Ufer zu:

$$F_C = 2 \cdot \underbrace{5 \cdot 10^5 kg}_{Masse} \cdot \underbrace{7.2 \cdot 10^{-5} s^{-1} \sin 50°}_{Winkelgeschwindigkeit} \cdot \underbrace{1.4m/s}_{Geschw.} \approx 77N$$

6.5 Aufgabe 5: Waage im Aufzug

a) Fahrtrichtung des Aufzuges

nach oben!

b) Beschleunigung?

Die Beschleunigung vergrößert das Gewicht der $75kg$ schweren Person um $70N$, d.h. $ma = 70N \Rightarrow a = 70N/75kg = 0.9m/s^2$.

c) Was zeigt eine Balkenwaage an?

Kein Effekt, da beide Arme der selber Wirkung unterliegen!

d) Zug im Tragseil

Aufzug und Person haben eine Masse von ca. $475kg$. Die Beschleunigung beträgt $0.9m/s^2$. Damit wirkt eine Kraft von $428N$

Physik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 7

Winter-Semester 2003/2004 zum 8.Dezember 2003

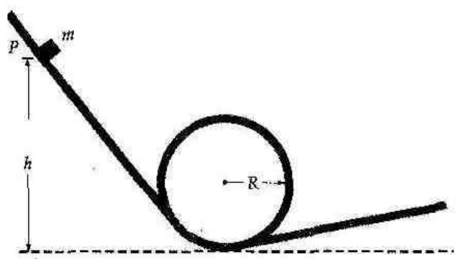
1. **Physik des Loopings**

   Ein kleiner Körper der Masse m gleite eine schiefe Ebene hinunter und durchlaufe einen Looping mit dem Radius R. Der Körper starte vom Punkt P in einer Höhe h über dem tiefsten Punkt des Loopings. Die Neigung beträgt den Winkel $\phi = 30^0$, die Masse sei $m = 1[kg]$ und der Radius $R = 1[m]$

   (a) Welche kinetische Energie besitzt der Körper am höchsten Punkt des Loopings?

   (b) Welche Beschleunigung erfährt der Körper am höchsten Punkt des Loopings, vorrausgesetzt, er bleibt in Kontakt zur Bahn?

   (c) Auf welcher Höhe muß der Körper starten, damit er auch am höchsten Punkt die Bahn nicht verläßt? Die Reibung soll zunächst vernachlässigt werden.



   (d) Wie muß die Anfangshöhe geändert werden, um die Reibungsarbeit entlang der schiefen Ebene zu berücksichtigen? ($\mu = 0,2$)

2. **Wechselwirkung zwischen Molekülen**
   Die Wechselwirkung zwischen zwei Mölekülen kann näherungsweise durch die folgende Funktion für die potentielle Energie beschrieben werden:

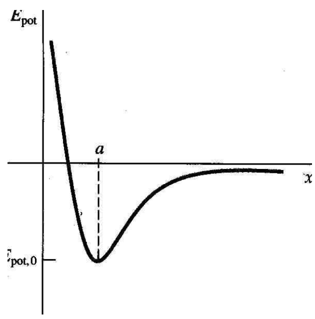
$$E_{pot} = E_{pot,0}[(\frac{a}{x})^{12} - 2(\frac{a}{x})^6] \quad (1)$$

   , wobei $E_{pot,0}$ und a Konstanten sind.

   (a) Bei welchem Wert von x ist die potentielle Energie gleich null?

   (b) Bestimmen Sie die Kraft $F_x(x)$

   (c) Für welchen Wert von x besitzt die Potentielle Energie ein Minimum ?



3. **Die Kernwechselwirkung nach Yukawa**
   Die potentielle Energie, die auf den Kernkräften zwischen zwei Protonen oder Neutronen beruht, kann nach Yukawa wie folgt beschrieben werden::

$$E_{pot} = E_0[(\frac{a}{x}) \cdot e^{-x/a}] \quad (2)$$

   , wobei E_0 und a Konstanten sind. Setzen Sie für $E_0 = 4 \cdot 10^{-12} J$ und $a = 2,5 \cdot 10^{-13} cm$.

   (a) Skizzieren Sie den Verlauf der potentiellen Energie in Abhängigkeit von x.

   (b) Ermitteln Sie die Funktion der Kraft $F_x(x)$

(c) Vergleichen Sie die Beträge der Kraft für $x = a$ und $x = 2a$ bzw. $x = 5a$

4. **Myonen in der Atmosphäre**
Myonen werden durch die kosmische Strahlung in der Erdatmosphäre in circa 8km Höhe erzeugt. Ihre Lebensdauer ist sehr kurz, selbst wenn sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegten, kämen sie nach der nichtrelativistischen Mechanik nur 600m weit, bevor sie zerfallen.

   (a) Wie groß ist die Lebensdauer eines Myon?

   (b) Warum erreichen dennoch viele Myonen den Erdboden?

   (c) Mit welchem Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit muss sich ein Myon bewegen, um in relativistischer Rechnung den Erdboden zu erreichen?

   (d) Betrachten wir nun das Problem aus dem Ruhesystem des Myons! Auf Grund der Lorentzkontraktion erscheint der zurückzulegende Weg kürzer. Zeigen sie, dass die dazu notwendige Geschwindigkeit dieselbe ist, die Sie in Teil 3 berechnet haben!

   (e) Berechnen Sie die von der Erde aus gesehene Masse des Myons, wenn seine Ruhemasse $m_0 = 1,810^{-28}$ kg beträgt

[1]

Lorenz Paul
2. Dezember 2003

[1]*die mit einem Stern versehenen Aufgaben können fakultativ bearbeitet werden. Alle übrigen Aufgaben sind obligatorisch!

7 Musterlösung für Blatt 7

7.1 Aufgabe 1: Physik des Loopings

Ein Körper der Masse m gleite eine schiefe Ebene hinunter und durchlaufe einen Looping mit Radius R. Der Körper startet von einer Höhe h, die Neigung der Rampe betrage den Winkel α

a) Kinetische Energie des Wagens am höchsten Punkt?

Der Körper starte aus Ruhe. Dann ist seine Gesamtenergie mgh. An der höchsten Stelle A ist die Energie $mg2R$ aufgezehrt. Seine verbleibende Bewegungsenergie also:

$$\begin{aligned} E_{kin}^A &= mg(h-2R) = \frac{1}{2}mv_A^2 \\ &\Rightarrow v_A = \sqrt{2g(h-2R)} \end{aligned}$$

b) Beschleunigung des Wagens am höchsten Punkt?

Auf den Körper wirken zwei Beschleunigungen: Die Erdbeschleunigung g sowie die Zentrifugalbeschleunigung v^2/R (mit v aus Aufgabenteil a))

c) Wie muss h gewählt werden, um den Looping zu passieren?

Am Scheitelpunkt muss die Zentrifugalbeschleunigung die Erdbeschleunigung mindestens kompensieren, also:

$$\begin{aligned} \frac{v_A^2}{R} &\geq g \\ \frac{2g(h-2R)}{R} &\geq g \\ &\Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R \end{aligned}$$

d) Wie muss h verändert werden, falls auf der Rampe die Reibung $\mu = 0.2$ wirkt. (Der Looping sei weiterhin Reibungsfrei!)

Durch die Reibung auf der Rampe hat der Körper am Fuß der schiefen Ebene nur noch die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2hg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}}$$

(Herleitung etwa über Lösung der Bewegungsgleichung $F_{Reibung} + F_{Abtrieb} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$). Dies entspricht einer Gesamtenergie von

$$E_{ges} = \frac{1}{2}m\frac{2hg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

Aus der Beziehung $E_{ges} - mg2R = 1/2mv^2$ gewinnt man die neue Geschwindigkeit am Scheitelpunkt des Looping. Diese muss zu einer Zentrifugalbeschleunigung führen, die die Erdbeschleunigung kompensiert. Für die neue Starthöhe folgt daraus die Bedingung:

$$h \geq \frac{5}{2}R \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$$

7.2 Aufgabe 2 Wechselwirkungen zwischen Molekülen

Gegeben ist das Potential:

$$E_{pot}(x) = E_0 \left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6} \right]$$

a) Wann verschwindet die potentielle Energie

Die Nullstelle dieser Funktion liegt bei $x = \frac{a}{\sqrt[6]{2}}$. Da ein Potential nur bis auf einen additiven Term bestimmt ist, kommt dieser Stelle keine besondere physikalische Bedeutung zu.

b) Welche Kraft ist wirksam?

Der Zusammenhang zwischen Potential und Kraft lautet $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, V$. In unserem 1-dimensionalen Fall entspricht der Gradient gerade der Ableitung nach x: $F = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$.

Es gilt also:

$$F(x) = -E_0 \left(12\frac{a^{12}}{x^{13}} - 12\frac{a^6}{x^7} \right)$$

c) Wann liegt ein Minimum des Potentials vor?

Die Nullstelle der Ableitung von V lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 0 \\ \left(12\frac{a^{12}}{x^{13}} - 12\frac{a^6}{x^7} \right) &= 0 \\ \frac{12}{x} \underbrace{\left(\frac{a^{12}}{x^{12}} - \frac{a^6}{x^6} \right)}_{=0} &= 0 \\ &\Rightarrow x_0 = a \end{aligned}$$

An dieser Stelle wirkt also keine Kraft: Es ist der bevorzugte Abstand der beiden Moleküle, bzw. eine Gleichgewichtslage des Systems.

7.3 Aufgabe 3: Das Yukawapotential

a) Skizze des Potentialverlaufs

Abbildung 3 stellt den Graphen dieser Funktion dar.

b) Wie sieht die Kraft aus?

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = E_0 \exp(-x/a) \frac{a}{x} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right]$$

c) Vergleichen sie die Beträge der Kraft für x=a, 2a und 5a

Einsetzen!

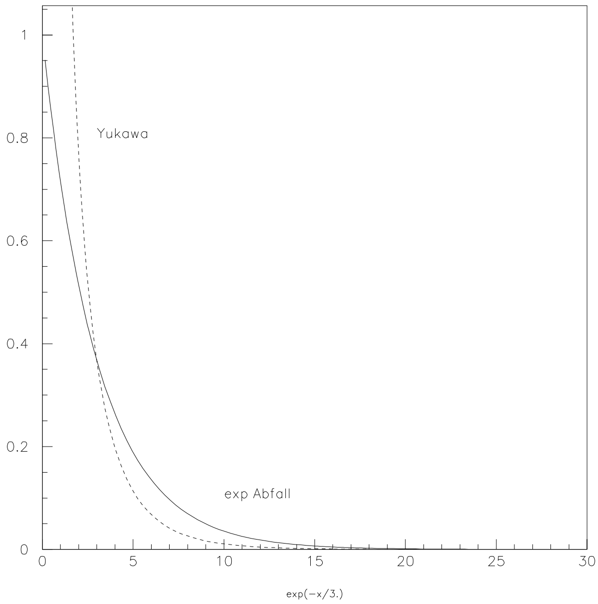


Abbildung 3: Verlauf des Yukawapotentials (gestrichelte Linie) für a=3. Zum Vergleich ist ebenfalls ein exponentieller Abfall (exp(-x/a)) dargestellt. Durch den zusätzlichen a/x Term fällt das Yuakapotential rascher ab. Inhaltlich: “Die Kernkräfte sind sehr kurzreichweitig.”

7.4 Aufgabe 4: Myonen in der Atmosphäre

a) Myonlebensdauer?

In der Aufgabenstellung wird erwähnt, dass Myonen nichtrelativistisch selbst bei Lichtgeschwindigkeit nur 600m zurücklegen könnten. Ihre Lebensdauer beträgt also $600m/(3 \cdot 10^{10}m/s) = 2 \cdot 10^{-8}s = \tau_\mu$

b) Warum erreichen die dennoch den Erdboden

Ihre Lebensdauer erscheint von der Erde aus betrachtet vergrößert (relativistische Zeitdilatation):

$$\tau'_\mu = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit der Myonen.

c) Welcher Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit ist dafür erforderlich?

Gesucht wird die Geschwindigkeit v, sodass gilt:

$$\tau'_\mu \cdot v \geq 8 \cdot 10^3 m$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit führt auf $v \approx 0.997c$.

d) Diskutieren sie das Problem aus dem Ruhesystem des Myons

Im Ruhesystem des Myons ist seine Lebensdauer besagte $2 \cdot 10^{-8}s$. Dafür "fällt" die Erde mit enormer Geschwindigkeit dem Myon entgegen, sodass der Abstand Längenkontrahiert ist (relativistische Längenkontraktion):

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e) Welche Masse ordnet ein Beobachter auf der Erde dem Myon zu?

Schließlich lautet der Zusammenhang zwischen Ruhemasse m_0 und bewegter Masse:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Physik für Naturwissenschaftler I
Übungsblatt 9

Winter-Semester 2003/2004 — zum 15.Dezember 2003

1. **Ein Meteorit aus heiterem Himmel**
   Betrachten Sie den Fall eines Meteors auf die Erde aus sehr großer Entfernung, d.h. die anziehende Kraft ist nicht konstant.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

   (b) Vereinfachen Sie die Gleichung aus (a) für den Fall auf die Erdoberfläche (Radius $= r = R_E$). Drücken sie Ihre Ergebnisse in Einheiten von R_E aus.

   (c) Berechnen Sie die potentielle Energie. Nehmen Sie dazu den Nullpunkt bei unendlicher Entfernung an.

   (d) Stellen Sie den Energieerhaltungssatz auf. Die Anfangsentfernung vom Erdmittelpunkt sei R. Leiten Sie die Ausdrücke für die Fallzeit und die Endgeschwindigkeit her.

   (e) Betrachten Sie die Spezialfälle :

      i. $R = \infty$; $r = R_E$

      ii. $R = R_E + h$; $h \ll R_E$; $r = R_E$

   Berechnen Sie für beide Fälle die Geschwindigkeit, mit der der Meteor am Erdboden auftrifft. (Im 2.Fall handelt es sich um eine Korrektur der Fallgeschwindigkeit wegen der abnehmenden Schwerebeschleunigung.)

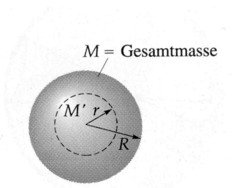
2. **Gravitationsfeld einer Vollugel**
   Gegeben sei eine homogene Kugel mitkonstanter Massendichte ρ_0 und dem Radius R. Ein schmaler Kanal führe vom Nord- zum Südpol der Kugel, durch den sich ein Körper der Masse m bewege. ρ_0,

   (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß' schen Satzes das Gravitationsfeld und das Gravitationspotential der Vollkugel außerhalb mit $r > R$. sowie im Inneren mit $r < R$.

   (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Körper auf.

   (c) Welche Bewegung führt der Körper aus? item Welche Zeit benötigt er für die Strecke vom Nord- zum Südpol?

   (d) Welche maximale Geschwindigkeit erreicht er dabei?



3. **Gravitationsfeld eines Stabes***
   Ein homogener Stab der Länge ℓ mit der Masse M liege auf der x-Achse und habe seinen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Betrachten Sie ein Teilstück der Länge dx im Abstand x vom Ursprung.

   (a) Zeigen Sie, dass dieses Element am Punkt $x_0 > \ell/2$ vom Ursprung auf der x- Achse ein Feld G erzeugt, das gegeben ist durch

$$dG_x = \frac{\gamma \cdot M}{\ell (x_0 - x)^2} \cdot dx \tag{1}$$

(b) Integrieren Sie über die Länge des Stabes, um das Gesamtfeld G am Punkt x_0 zu erhalten.

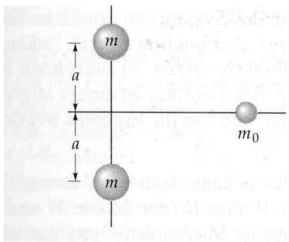
(c) Bestimmen Sie de Kraft, die ein Körper der Masse m_0 am Ort x_0 im Gravitationsfeld erfährt.

4. **Gravitationspotential zweier Massen**
Zwei Punktmassen befinden sich an den Orten $y = +a$ und $y = -a$ Ein drittes Teilchen der Masse m_0 befinde sich auf der x-Achse im Abstand x vom Ursprung.

(a) Zeigen Sie dass die Kraft, die von den beiden Punktmassen auf m_0 ausgeübt wird, gegeben ist durch:

$$F = -\frac{2\gamma m m_0 x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\vec{e_x} \quad (2)$$

(b) Ermitteln Sie das durch die beiden Massen auf der y-Achse hervorgerufene Gravitationsfeld G auf der x-Achse.



(c) Zeigen Sie, daß die beiden auf der y-Achse befindlichen Massen hervorgerufene Gravitationsfeld G_x annähernd $-2\gamma m/x^2$ ist, wenn x wesentlich größer als a ist.

(d) Zeigen Sie, dass $|G_x|$an den Punkten $x = \pm a/\sqrt{2}$

[1]

Lorenz Paul
5. Dezember 2003

[1]*die mit einem Stern versehenen Aufgaben können fakultativ bearbeitet werden. Alle übrigen Aufgaben sind obligatorisch!

8 Musterlösung für Blatt 8

8.1 Aufgabe 1: Meteoritenfall

Der Meteorit ruht zu Beginn (Entfernung R vom Erdmittelpunkt). Er besitzt also auch keinen Drehimpuls und führt eine geradlinige Bewegung zum Erdmittelpunkt aus. Das Problem ist also eindimensional!

Die Bewegungsgleichung lautet: $m\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2}$

Das Gravitationpotential lautet: $V = -G\frac{mM}{r}$. Die Gesamtenergie lautet somit: $E_{tot} = -G\frac{mM}{R}$. Die Energieerhaltung ergibt:

$$-G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \tag{9}$$

Die Endgeschwindigkeit (beim Aufschlag auf die Erde) gewinnt man aus Gleichung 9, wenn man für $r = R_E$ einsetzt:

$$\begin{aligned} -G\frac{mM}{R} &= -G\frac{mM}{R_E} + \frac{1}{2}mv_{max}^2 \\ v_{max} &= \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R}\right)} \\ &= \sqrt{2gR_E(1 - R_E/R)} \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde die Beziehung $GM/R_E^2 = g$ ausgenutzt, mit $g = 9.81m/s^2$ der Erdbeschleunigung. Durch Trennen der Variablen kann aus Gl. 9 auch die Fallzeit bestimmt werden:

$$t_0 = -\frac{1}{\sqrt{2gR_E^2}}\int_R^{R_E}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} \tag{10}$$

Die Lösung von Gl. 10 ist etwas länglich (Tip: Substitution $u = \sqrt{1 - (r/R)}$). Man findet schließlich:

$$t_0 = \sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\frac{R}{R_E}\right)\left[\sqrt{\frac{R_E}{R}(1 - (R_E/R))} + \arcsin\sqrt{1 - (R_E/R)}\right]$$

Für $R \gg R_E$ findet man näherungsweise:

$$\begin{aligned} v_{max} &= \sqrt{2gR_E}\left(1 - \frac{1}{2}(R_E/R)^2 + \cdots\right) \\ t_0 &= \frac{\pi}{2}\frac{R^{3/2}}{\sqrt{2gR_E^2}} \end{aligned}$$

Diese Geschwindigkeit nähert sich der Fluchtgeschwindigkeit ($11.2km/s$) an.

Bei $R = R_E + h$ mit $R_E \gg h$ liefert die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} v_{max} &= \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{R_E} + \cdots\right) \\ t_0 &= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1 + \frac{5}{6}\frac{h}{R_E} + \cdots\right) \end{aligned}$$

8.2 Aufgabe 2: Gravitationsfeld einer Vollkugel

a) Außerhalb lautet die Kraft: $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$. Im inneren einer Hohlkugel wirkt keine Kraft (nach Gauss: "Feld $\propto$ einegeschlossene Ladung"). Im inneren der Kugel mit Radius R und konstanter Dichte ρ trägt also nur noch die "verbleibende Masse", d. h. Masse der inneren Kugel bei:

$$\begin{aligned} F(r) &= -G\frac{mM(r)}{r^2} \\ &= -G\frac{m\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} \\ &= -Gm\rho\frac{4}{3}\pi r \end{aligned}$$

Die Dichte ρ kann im Falle der Erde durch Erdradius und Erdmasse ausgedrückt werden: $\rho = M_E/(4/3\pi R_E^3)$. Das Feld im Inneren lautet also:

$$F(r) = \underbrace{-G\frac{mM_E}{R_E^3}}_{=const.} \cdot r$$

b) BWGl

Die BWGl. lautet also:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} + G\frac{mM_E}{R_E^3}r &= 0 \\ \ddot{r} + \underbrace{G\frac{M_E}{R_E^3}}_{=\omega^2} r &= 0 \end{aligned}$$

c) Bewegungsform und Dauer des Falls vom Nord- zum Südpol

Die BWGl. ist eine Schwingungsgleichung (die Kraft ist proportional zur Auslenkung $F \propto r$). Die Kreisfrequenz kann sofort abgelesen werden: $\omega^2 = G\frac{mM_E}{R_E^3}$. Die Periode folgt ebenfalls direkt:$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

d) maximale Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit einer harmonischen Schwingung ($r(t) = A\sin(\omega t + \phi)$) lautet:$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$). Die Amplitude ist in unserem Fall aber gerade der Erdradius R_E. Die maximale Geschwindigkeit lautet somit ωR_E.

8.3 Aufgabe 3: Gravitationsfeld eines Stabes

8.4 Aufgabe 4: Gravtationspotential zweier Massen

Physik für Naturwissenschaftler I Übungsblatt 9	
Winter-Semester 2003/2004	zum 5.Januar 2004

1. **Der elastische Stoß**
   Ein Physik-Professor läßt in der Vorlesung einen Hand- und einen Tennisball, den er geringfügig über den Handball hält, gemeinsam fallen. Nach einer Fallstrecke h berührt der Handball den Boden und wird reflektiert. Der Tennisball stößt dann mit dem aufsteigenden Handballzusammen. Alle Stöße werden als elastisch angenommen.
   (a) Berechnen Sie die maximale Steighöhe des Tennisballs nach dem Stoß mit dem Handball.
   (b) Berechnen Sie die kinetischen Energien der Bälle nach dem Stoß.
   (c) Berechnen Sie den relativen Energieverlust des Handballs (d.h. die Energie des Handballs nach dem Stoß dividiert durch die Energie des Handballs vor dem Stoß) abhängig vom Massenverhältnis m_H/m_T und tragen Sie ihr Resultat halblogarithmisch (m_H/m_T logarithmisch) auf.

2. **Der inelastische Stoß**
   Ein Körper der Masse m_1 treffe mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ auf eine im Laborsystem ruhenden Körper der Masse m_2. Welche Energie steht beim Stoß als innere Energie $E_i = Q$ (z. B. zur Verformung der Körper) zur Verfügung .
   (a) Formulieren Sie die Erhaltungssätze, die bei diesem Vorgang zu beachten sind. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die Vektoren in Komponenten an (Zeichnung).
   (b) Stellen Sie die Gleichung für die innere Energie E_i als Funktion der Geschwindigkeitskomponenten beider Körper auf. Drücken Sie E_i als Funktion der Geschwindigkeitskomponenten eines(!) Teilchens aus , indem Sie den Impulssatz berücksichtigen.
   (c) Wann wird E_i maximal? In welche Richtung müssen die Körper dann fliegen? Berechnen Sie die Geschwindigkeit v', bei der E_i(v') maximal wird.
   (In welche Richtung fliegen die Körper, damit E_i für festen Betrag der Geschwindigkeit maximal wird? Für welche Geschwindigkeit wird E_i maximal, wenn er in die bestimmte Richtung fliegt?)
   (d) Berechnen Sie den Bruchteil der kinetischen Primärenenergie, der in innere Energie verwandelt wird.

3. **Vorsicht: Bewegliche Unterlage**
   Ein 5 kg schwerer Hund steht 10 m vom Ufer entfernt auf einem 40 kg schweren Floß. Er geht 6 m auf dem Floß auf das Ufer zu. Wie nahe kommt der Hund an das Ufer heran, wenn man die Reibung zwischen Floß und Wasser vernachlässigt? Wie bewegt sich der Schwerpunkt des Systems Hund + Floß?

4. **Schwerpunkt des Sonnensystems**
   Die Massen der Planeten und ihre Abstände von der Sonne sind unten angegeben. Berechen Sie den ungefähren Schwerpunkt des Sonnensystems, indem Sie nur die Sonne, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun berücksichtigen. Gehen Sie von einem ebenen Sonnensystem aus. Verteilen Sie dabei

- die Planeten dem wachsenden Abstand nach gleichmäßig auf dem vollen Winkel (d.h. der Winkel zwischen zwei Planeten ist $\pi/2$) oder
- ordnen Sie sie auf einer Geraden an.

Himmelskörper	Masse in Erdmassen	Sonnenabstand in AE $(1,5 \cdot 10^{11} m)$
Sonne	333 000	-
Merkur	0.06	0.39
Venus	0.82	0.72
Erde	1.	1.
Mars	0.11	1.52
Jupiter	318	5.2
Saturn	95	9.5
Uranus	14.5	19.2
Neptun	17.2	30.1
Pluto	0.002.	39.5

Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Durchmesser der Sonne. Den Sonnendurchmesser können Sie abschätzen, wenn Sie wissen, dass der Öffnungswinkel unter dem man die Sonne sieht ca. $0,6°$ ist. Warum spielen die anderen Planeten für den Schwerpunkt eine untergeordnete Rolle?

5. **mit der Rakete ins Neue Jahr***
Eine Rakete mit der Startmasse $M_0 = 1000$kg starte im Weltraum (d.h. ohne äußeren Kräfte) in z-Richtung. Aus den Düsen strömt Treibgasfluß α (in kg/s) mit einer Austrittsgeschwindigkeit $\beta = 5$km/s. Betrachten Sie den Vorgang von einem ruhenden Koordinatensystem aus.

   (a) Die Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t sei v. Wie groß ist die Geschwindigkeit des zur Zeit t austretenden Treibgases?

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Impulserhaltung und der Beziehung $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ die auf die Rakete wirkende Kraft.

   (c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Raketengeschwindigkeit v(t) auf und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung v(t=0) = 0.

   (d) Diskutieren Sie die Lösung. Warum verwendet man bei Raketen hochexplosive Chemikalien?

   (e) Modifizieren Sie die Bewegungsgleichung für den Fall, daß sich die Rakete im Schwerefeld der Erde (g=const.) befindet.

   (f) Bei welchem Treibstoffverbrauch α hält sich die Rakete nach der Zündung gerade in der Schwebe?

   (g) Nehmen Sie an, α_0 sei 5 kg/s und der Treibstoff sei nach 100 s verbraucht. Welche Höhe hat die Rakete zu diesem Zeitpunkt erreicht?

   (h) Welche Endhöhe erreicht die Rakete?

6. **Fröhliche Weihnachten und ein gesundes und erfolgreiches 2004!!!**

[1]

Lorenz Paul
11. Dezember 2003

[1] *die mit einem Stern versehenen Aufgaben können fakultativ bearbeitet werden. Alle übrigen Aufgaben sind obligatorisch!

II

9 Musterlösung für Blatt 9

9.1 Aufgabe 1: Der elastische Stoß

Vorbemerkung:

Beim elastischen (eindimensionalen) Stoß zweier Körper gelten Impuls– und kinetische Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_{n1} + m_2 v_{n2} \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 v_{n1}^2 + m_2 v_{n2}^2 \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v_{n1}) &= m_2(v_{n2} - v_2) && (11) \\ m_1(v_1^2 - v_{n1}^2) &= m_2(v_{n2}^2 - v_2^2) && (12) \end{aligned}$$

Es gilt jedoch $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ ("Binomi"). In Gleichung 12 kann also die Ersetzung $(v_1^2 - v_{n1}^2) = (v_1 - v_{n1})(v_1 + v_{n1})$ sowie $(v_{n2}^2 - v_2^2) = (v_{n2} - v_2)(v_{n2} + v_2)$ vorgenommen werden. Teilt man nun Gleichung 12 duch Gleichung 11 findet man:

$$v_1 + v_{n1} = v_2 + v_{n2}$$

Diese Beziehung kann nach v_{n1} bzw. v_{n2} aufgelöst werden. Einsetzen in Gleichung 11 führt auf die Geschwindigkeiten *nach* dem Stoß als Funktion der Geschwindigkeiten *vor* dem Stoß:

$$\begin{aligned} v_{n1} &= v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} && (13) \\ v_{n2} &= v_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} && (14) \end{aligned}$$

Nun können wir unsere Aufgabe betrachten: Hand– und Tennisball durchfallen (näherungsweise) beide die Höhe h. Ihre Geschwindigkeit vor dem Stoß ist also:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\sqrt{2gh} \\ v_2 &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Das Vorzeichen reflektiert die entgegengesetzte Geschwindigkeit von Handball (schon reflektiert) und Tennisball (noch fallend). Aus den Beziehungen 13 und 14 (und den neuen Bezeichnungen $n1 = T$ bzw. $n2 = H$) folgt für Hand- und Tennisball *nach* dem Stoß:

$$\begin{aligned} v_T &= \sqrt{2gh}\left(\frac{3m_H - m_T}{m_H + m_T}\right) \\ v_H &= \sqrt{2gh}\left(\frac{m_H - 3m_T}{m_H + m_T}\right) \end{aligned}$$

a) maximale Steighöhe des Tennisballs

Bei h_{max} ist die gesamte kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt:

$$\begin{aligned} m_T g h_{max} &= \frac{1}{2} m_T v_T^2 \\ m_T g h_{max} &= \frac{1}{2} m_T 2gh \left(\frac{3m_H - m_T}{m_H + m_T}\right)^2 \\ h_{max} &= h \left(\frac{3m_H - m_T}{m_H + m_T}\right)^2 \end{aligned}$$

b) kinetische Energie nach dem Stoß

$$\begin{aligned} E_T &= m_T g h \left(\frac{3m_H - m_T}{m_H + m_T}\right)^2 \\ E_H &= m_H g h \left(\frac{m_H - 3m_T}{m_H + m_T}\right)^2 \end{aligned}$$

c) relativer Energieverlust des Handballs als Funktion von m_H/m_T

Vor dem Stoß: $E_H = m_H g h$
Nach Stoß: $\overline{E}_H = m_H g h \left(\frac{m_H - 3m_T}{m_H + m_T}\right)^2$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{E}_H}{E_H} &= \left(\frac{m_H - 3m_T}{m_H + m_T}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\frac{m_H}{m_T} - 3}{\frac{m_H}{m_t} + 1}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Abbildung 4 stellt diese Funktion dar.

9.2 Aufgabe 2: Der inelastische Stoß

Ein Körper mit Masse m_1 und Geschwindigkeit v_1 trifft *inelastisch* auf einen im Laborsystem ruhenden Körper mit Masse m_2.

a) Erhaltungssätze?

Impulserhaltung: $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ und Energieerhaltung: $E_1 = E_1' + E_2' + E_i$

Die Aufgabe enthält keine Information darüber, ob der Stoß zentral ist. Im allg. werden sich die Körper nach dem Stoß also in verschiedene Richtungen bewegen. Der vektorielle Charakter des Impulses und der Geschwindigkeit muss berücksichtigt werden. Wählt man die Richtung des ersten Körpers entlang der x-Achse ergibt sich:

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} &= m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' \\ 0 &= m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \end{aligned}$$

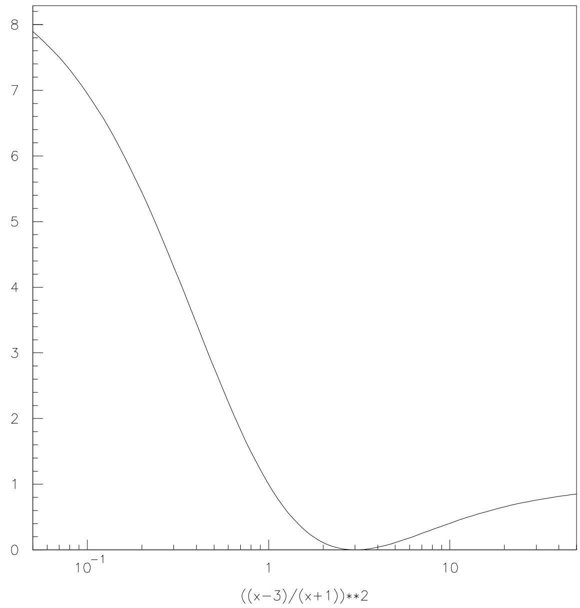


Abbildung 4: Relativer Energieverlust des Handballs als Funktion des Massenverhältnisses. Diese Funktion geht durch (1,1) (d.h. bei Massengleichheit ist die Energie vor und nach dem Stoß identisch). Bei $m_H/m_T = 3$ liegt eine Nullstelle vor. Falls der Tennisball also drei mal schwerer als der Handball ist, hat dieser nach dem Stoß keine Energie mehr und ruht!

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1x}^2 \;=\; \frac{1}{2}m_1(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2) + \frac{1}{2}m_2(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2) + E_i \tag{15}$$

b) Innere Energie als Funktion der Geschwindigkeit

Aus Gleichung 15 folgt:

$$E_i \;=\; \frac{1}{2}m_1(v_{1x}^2 - v_{1x}'^2 - v_{1y}'^2) - \frac{1}{2}m_2(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2) \tag{16}$$

Aus dem Impulssatz folgt: $v_{2x}' = \frac{m_1}{m_2}(v_{1x} - v_{1x}')$ und $v_{2y}' = -\frac{m_1}{m_2}v_{1y}'$. Mit Gleichung 16 kann die innere Energie also als Funktion der Geschwindigkeitskomponenten des ersten Teilchens ausgedrückt werden:

$$E_i \;=\; \frac{1}{2}m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)v_{1x}^2 - \frac{1}{2}m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2) + \frac{m_1^2}{m_2}v_{1x}v_{1x}'$$

c) E_i maximal?

Richtung für die E_i maximal wird: Der mittlere Term des obigen Ausdrucks trägt ein negatives Vorzeichen. Für $v_{1y}' = 0$ wird E_i also maximal! Die Flugrichtung nach dem Stoß ändert sich in diesem Fall also nicht (mit anderen Worten: der Stoß ist zentral...).

Geschwindigkeit für die E_i maximal wird: Nullstelle der Ableitung von E_i nach v'_{1x} liefert: $v'_{1x} = v_{1x}$. Dies bedeutet jedoch $v'_{2x} = v'_{1x}$. Mit anderen Worten: E_i wird maximal, wenn beide Körper nach dem Stoß sich mit der selben Geschwindigkeit weiterbewegen, also aneinander haften.

d) Bruchteil der Primärenergie, der in innere Energie umgewandelt wird.

$E_{prim}/E_{i,max} = (m_1 + m_2)/m_2$

9.3 Aufgabe 3: Bewegliche Unterlage:

Der Gesamtimpuls des Systems Floß–Hund ist Null:

$$m_H v_H + m_F v_F = 0$$

es gilt also: $-v_F/v_H = 5/40 = 0.125$. Bei 6 Metern Strecke des Hundes auf dem Floß, bewegt sich dieses also um $6m \cdot 0.125 = 75cm$ in die Gegenrichtung. Der Hund kommt dem Ufer also nur $5.25m$ näher. Der Schwerpunkt ist definiert als:

$$x_s = \frac{\Sigma x_i m_i}{m_{ges}}$$

Seine zeitliche Änderung ($\dot{x}_s$) ist also proportional zur Impulsänderung (bei $m = const.$). Somit bleibt der Schwerpunkt unverändert.

9.4 Aufgabe 4: Schwerpunkt des Sonnensystems

a) Planetenzwischenwinkel $\pi/2$

Wie in Teil b). Die Koordinaten des Schwerpunktes können komponentenweise berechnet werden.

b) Planeten auf einer Geraden

Es gilt: $x_s = \frac{\Sigma x_i m_i}{m_{ges}}$. Einsetzen der Tabellenwerte (Ursprung im Mittelpunkt der Sonne) führt auf $x_s = 0.1AE$. Bei Einem Öffnungswinkel von $0.6°$ schätzt man den Sonnenradius auf $1AE \cdot \sin 0.3° = 0.005AE$ ab.

9.5 Aufgabe 5: Raketengleichung

Eine Rakete mit $m_0 = 1000kg$ startet im Weltraum (keine äußere Kraft!). Aus der Düse strömt Treibgas mit der Geschwindigkeit $\beta = 5km/s = 5000m/s$ und einem Fluss α (in kg/s).

a) Geschwindigkeit des Treibgases

Im Ruhesystem der Rakete offensichtlich β, im "Weltraumsystem" $\beta - v$...was soll die Frage?

b) Kraft auf Rakete

Durch das Ausströmen ändert sich die Masse der Rakete ($\frac{dm}{dt} = \alpha$), also auch der Impuls $\frac{dp}{dt} = -\beta\alpha$ (das Minuszeichen reflektiert die Massen**ab**nahme). Die Impulsänderung ist aber gerade gleich der wirkenden Kraft:

$$F = \frac{dp}{dt} = -\beta\alpha$$

c) Bewegungsgleichung für v(t)

Die BWGl lautet

$$m\ddot{x} = -\beta\alpha$$

Die Gewinnung von v(t) kann in zwei Schritten erfolgen:

$$\begin{aligned}
-\beta\frac{dm}{dt} &= m\frac{dv}{dt} \\
-\beta dm &= mdv \\
-\frac{dm}{m} &= \frac{1}{\beta}dv \\
-\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} &= \frac{1}{\beta}\int_{v_0}^{v} dv \\
-\ln\frac{m}{m_0} &= \frac{v}{\beta} \qquad \text{da } v_0 = 0
\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit als Funktion der Masse lautet also:

$$v(m) = \beta \ln \frac{m_0}{m}$$

Die Masse nimmt aber gemäß der Beziehung $m(t) = m_0 - \alpha t$ ab. Damit lautet $v(t)$:

$$v(t) = \beta \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t}$$

d) Diskussion der Lösung

Abbildung 5 zeigt den Graphen der Funktion $v(t)$ für zwei Werte von β. Die Geschwindigkeit ist proportional zur Ausströmgeschwindigkeit, weshalb hochexplosive Antriebsgase bevorzugt sind.

e) Bwgl im Schwerefeld der Erde (g=const.) und f) α um in der Schwebe zu bleiben

Im Schwerefeld der Erde lautet die BWGl

$$m\ddot{x} = -\beta\alpha - mg$$

Um abheben zu können, muss $\beta\alpha > mg$ gelten, die Bedingung für den "Schwebezustand" lautet also $\alpha = \frac{mg}{\beta}$

g) Endhöhe bei $\alpha = 5kg/s$ nach t=100s

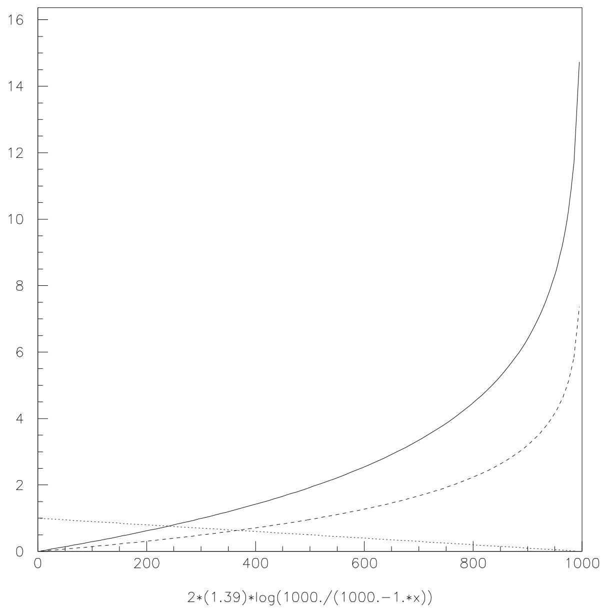


Abbildung 5: Raketengeschwindigkeit als Funktion der Zeit für Ausströmgeschwindigkeit β (gestrichelte Linie) und $2 \cdot \beta$ (durchgezogene Linie). Dargestellt ist ebenfalls die verbliebene (relative) Masse der Rakete (gepunktete Linie). Offensichtlich sind alle Geschwindigkeiten jenseits von ≈ 200–$300s$ unphysikalisch, da eine Rakete kaum mehr als 20%–30% ihrer Masse in Form von Treibstoff mitführen kann.

Lösung der BWGl führt auf:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \beta \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} - gt \\ &= v_0 - \beta \ln \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t\right) - gt \end{aligned}$$

Nochmalige Integration liefert:

$$\begin{aligned} z(t) &= v_0 t - \beta \int \ln \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t\right) - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= (v_0 + \beta) t + \beta \cdot \left(\frac{m_0}{\alpha} - t\right) \ln \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t\right) - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

(beachte: $\int \ln x = x \ln x - x$). Mit $v_0 = 0$, $\beta = 5000 m/s$, $\alpha = 5 kg/s$ und $t = 100s$ führt das auf eine Höhe von $z = 105 km$.

h) Endhöhe falls nach t=100s der Antrieb aufhört

Die Geschwindigkeit der Rakete beträgt nach $t = 100s$ $v = 5000 m/s \cdot \ln 2 - g \cdot 100s = 2480 m/s = 690 km/h$. Von da an (Ende der Brennphase) fliegt sie gemäß der Beziehung $z(t) = v_{100} t - 0.5 g t^2$ und $v = v_{100} - gt$ weiter. Daraus liest man ab, welche weitere Strecke zurückgelegt werden kann.

Physik für Naturwissenschaftler I Übungsblatt 10	
Winter-Semester 2003/2004	zum 26.Januar 2004

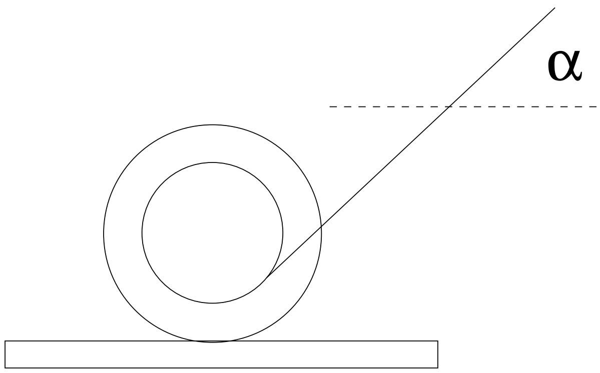
1. **das Hantelmodell eines Moleküls**
Ein zweiatomiges Molekül wird oft als Hantel (Länge l, sog. internuklearer Abstand) beschrieben, an deren Enden sich die Kerne der beiden Atome befinden. Diese Hantel ist in die negative Ladungswolke der Elektronen eingebettet. Welche Energie ist erforderlich, um ein Cl_2-Molekül in Rotation zu versetzen, so daß der Drehimpuls $|\vec{J}| = \hbar$ ist,

   (a) um eine Hauptträgheitsachse senkrecht zur Hantel ,

   (b) um die Hantelachse selbst (parallel zur Hantel) .

   Vergleichen Sie mit der Rotationsenergie eines Elekrons, das im Abstand r_e um die Hantelachse rotiert ($|\vec{J}| = \hbar$).
Zahlenwerte: $l = 2 \cdot 10^{-10}$m, $A = 35$, $r_e = 1 \cdot 10^{-10}$m, $\hbar = h/2\pi = 1.0545 \cdot 10^{-34}$Js, Kernradius= $1.2 \cdot 10^{-15}\text{m} \cdot A^{1/3}$, Elektronenmasse $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$kg, Protonenmasse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$kg.

2. **Das Geheimnis einer Garnrolle**
Die Abbildung zeigt eine Garnrolle, auf die ein Faden aufgewickelt ist. Die Radien der inneren



   bzw. äußeren Rolle seinen R_1 und R_2. Zieht man an dem Faden, so rollt er sich je nach der Größe von α auf oder ab. Um welchen Punkt dreht sich die Rolle? Bestimmen Sie den Winkel, bis zu dem sich der Faden aufrollt! Was passiert, wenn Sie genau unter dem Winkel α ziehen? Unternehmen Sie das Heimexperiment!

3. **Gyrobus**
In der Schweiz wurden in den fünfziger Jahren von der Firma Oerlikon sogenannte Gyrobusse gebaut. Der Gyrobus hatte ein $1,5t$ schweres Schwungrad mit einem Durchmesser von 1,5 m. Dieses Schwungrad trieb einen Generator an, der seinerseits den Strom für den Elektroantrieb des Fahrzeugs lieferte. An bestimmten Haltestellen, alle $1,2\S bis 2$ Kilometer, wurde das Schwungrad binnen 40 Sekunden wieder auf die volle Drehzahl von 3000 Upm gebracht. Der Generator arbeitete dann im Motorbetrieb und beschleunigte das Schwungrad. Den Strom lieferte ein spezieller Lademast. Ohne Nachladen hätte der Bus etwa sechs Kilometer weit fahren können. Ein vollökologischer Gyrobus (m=5t, Spurweite 2m, Geschwindigkeit $v = 36km/h$) ist zum Antrieb mit einem Kreisel ausgerüstet (Scheibe mit vertikaler Achse, $m = 1t, r = 0,7m, 3770U/min$).

I

(a) Wie groß ist die kinetische Energie des Kreisels?

(b) Welche Höhendifferenz kann der Bus überwinden? Vernachlässigen Sie Reibung!

(c) Wie groß ist die Geschwindigkeit am Rand des Schwungrades?

4. **ideales versus reales Gasgesetz**
Welche Temperatur haben 3.5g Sauerstoff, die bei einem Druck von 2.836MPa ein Volumen von 90cm^3 einnehmen. Gehen Sie davon aus, daß

   (a) das Gas ideal ist.

   (b) das Gas real ist. Die Van der Waals Konstanten sind: $\text{a} = 1.36 \cdot 10^5 \text{Nm}^4\text{kmol}^{-2}$, $\text{b} = 3.16 \cdot 10^{-2}\text{m}^3\text{kmol}^{-1}$.

5. ***Das Eletronengas**
egeben sei ein System von N_0 idealen Gasteilchen. Ihre kinetische Energie folge der Maxwell' schen Geschwindigkeitsverteilung:

$$dN(v^2) = N_0 \frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

Daraus berechnet sich die Zahl der Teilchen mit einer Energie, größer als eine Mindestenergie E_{min}:

$$N = \int_{E_{min}}^{\infty} dN(E) = \frac{2}{h^3}\sqrt{(2\pi mkT)^3} \cdot e^{-\frac{E_{min}}{kT}}$$

Gegeben sei ein metallischer Leiter mit einer Teilchendichte von $n = 10^{29} m^{-3}$. Die Elektronen lassen sich im Inneren wie ein ideales Gas beschreiben.Allerdings sind sie an den Leiter mit einer Energie von 4,5 eV gebunden.

   (a) Wie groß ist der Stoßquerschnitt der Elektronen und die mittlere freie Weglänge, wenn sie selbst als punktförmig, die Metallatome dagegen als Kugeln mit einem Radius von $10^{-10} m$ angenommen werden?

   (b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit im Elektronengas und die mittlere Stoßzeit? Welchen Druck besitzen sie im Inneren des Leiters bei Raumtemperatur (300 K)

   (c) Wieviel Elektronen können pro Volumeneinheit bei Raumtemperatur bzw. bei 2400 K ausdampfen?

[1]

Lorenz Paul
19. Januar 2004

[1] *die mit einem Stern versehenen Aufgaben können fakultativ bearbeitet werden. Alle übrigen Aufgaben sind obligatorisch!

10 Musterlösung für Blatt 10

Vorbemerkung: Translation vs. Rotation

Translation	Rotation
Geschwindigkeit $v = \frac{dr}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\phi}{dt}$
Masse m	Trägheitsmoment $T = \sum_i r_i^2 m_i = \int r^2 dm$
Impuls $p = m \cdot v$	Drehimpuls $J = T\omega$
Kraft $F = m\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$	Drehmoment $D = T\frac{d\omega}{dt} = \frac{dJ}{dt}$
kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}T\omega^2$

Für das Drehmoment gibt es auch die Darstellung $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$, d. h. es steht senkrecht auf der Ebene die Kraft und Hebelarm aufspannen. Die Winkelgeschwindigkeit ist ebenfalls ein Vektor, der in Richtung der Drehachse zeigt.

Einige Trägheitsmomente:

Kreisscheibe/Zylinder mit Radius r bei Rotation um die Achse senkrecht zum Mittelpunkt: $T = \frac{1}{2}mr^2$.

Stab der Länge l bei Rotation um die senkrechte Achse durch den Schwerpunkt: $T = \frac{1}{12}ml^2$.

Vollkugel mit Radius r bei Rotation um Achse durch den Mittelpunkt: $T = \frac{2}{5}mr^2$.

Man beachte: Das Trägheitsmoment ist eine Eigenschaft von Körper *und* jeweiliger Rotationsachse!

10.1 Aufgabe 1: Hantelmodell des Moleküls

Welche Energie ist notwendig um ein Cl_2 Atom in Rotation mit Drehimpuls $|J| = 1.05 \cdot 10^{-34} Js$ zu versetzen?

a) Bei Rotation senkrecht zur Achse?

Das Cl_2 Atom entspricht einer Hantel mit $l = 2 \cdot 10^{-10} m$ und Massen von $m_{Cl} = 35 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} kg$. Das Trägheitsmoment bezüglich Rotation senkrecht zur Achse lautet somit (wir nehmen an dieser Stelle die Atome als punktförmig an...):

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot m_{Cl} \\ &= 1.1 \cdot 10^{-45} kgm^2 \end{aligned}$$

Gemäß $J = T\omega$ beträgt die Winkelgeschwindigkeit also: $\omega = 0.95 \cdot 10^{11} s^{-1}$. Die Rotationsenergie ist durch die Beziehung $E_{rot} = \frac{1}{2}T\omega^2$ gegeben. Es folgt also $E_{rot} = 4.96 \cdot 10^{-24} J$.

b) Bei Rotation parallel zur Hantel?

Nun ist die Näherung punktförmiger Atome nicht mehr sinnvoll, denn in diesem Fall verschwindet die Rotationsenergie. Der Radius der Cl-Atome beträgt (mit $A = 35$) $r = 1.2 \cdot 10^{-15} A1/3m = 3.9 \cdot 10^{-15} m$. Ihr Trägheitsmoment also

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{5} m_{Cl} r^2 \\ &= \frac{2}{5} 35 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} kg \cdot (3.9 \cdot 10^{-15} m)^2 \\ &= 3.6 \cdot 10^{-55} kgm^2 \end{aligned}$$

Da 2 Cl Atome voliegen, ist das Gesamtträgheitsmoment bei uns $T = 7.2 \cdot 10^{-55} kgm^2$.

Gemäß $J = T\omega$ beträgt die Winkelgeschwindigkeit also: $\omega = 1.5 \cdot 10^{20} s^{-1}$. Die Rotationsenergie ist durch die Beziehung $E_{rot} = \frac{1}{2} T\omega^2$ gegeben. Es folgt also $E_{rot} = 8.1 \cdot 10^{-15} J$. Die Energie ist 10^9 Grössenordnungen kleiner, da die Massen nun viel dichter an der Rotationsachse liegen!

c) Vgl. mit Elektron

$T = m_e r_e^2 = 9.1 \cdot 10^{-51} kgm^2$. $E_{rot} = 6.1 \cdot 10^{-19} J$.

10.2 Aufgabe 2: Garnrolle

Abbildung 6 zeigt die Garnrollenanordnung. Wichtig: Die momentane Auflage der Rolle ist der Punkt, um den die Drehbewegung stattfindet. Zieht man unter dem Winkel α mit $\cos\alpha = \frac{R_1}{R_2}$ zeigt die Verlängerung des Fadens (= Richtung der Kraftwirkung) gerade durch den Auflage/Drehpunkt, d. h. der Hebelarm und somit das Drehmoment ($\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$) sind Null. Zieht man unter kleineren Winkeln, liegt die Verlängerung des Fadens *links* von der Auflage, bei größeren Winkeln *rechts* von der Auflage. Dadurch wechselt das Drehmoment seine Richtung. Bei konstantem Drehmoment $\vec{D}$ ist seine Richtung jedoch parallel zu $\vec{\omega}$, d. h. auch die Drehrichtung wechselt ihr Vorzeichen. Analyse mit rechter-Hand-Regel ergibt:

$$\alpha < \arccos\frac{R_1}{R_2} \qquad \text{:Rolle rollt sich auf}$$
$$\alpha > \arccos\frac{R_1}{R_2} \qquad \text{:Rolle rollt sich ab}$$

10.3 Aufgabe 3: Gyrobus

Vorbemerkung:

Ein Gyrobus ist ein Autobus mit Gyroantrieb, einem Elektroantrieb, der seine Energie aus einem Schwungrad (gr: Gyros) bezieht. Seine Vorteile: leise und umweltfreundlich, kommt ohne Fahrleitung aus und kann damit auch flexibel an wechselnden Strecken verkehren. Sein Nachteil ist das hohe Gewicht der Schwungradmasse. Ihre hohe Rotationsgeschwindigkeit erfordert zudem besondere Befestigung und Sicherheitsmassnahmen.

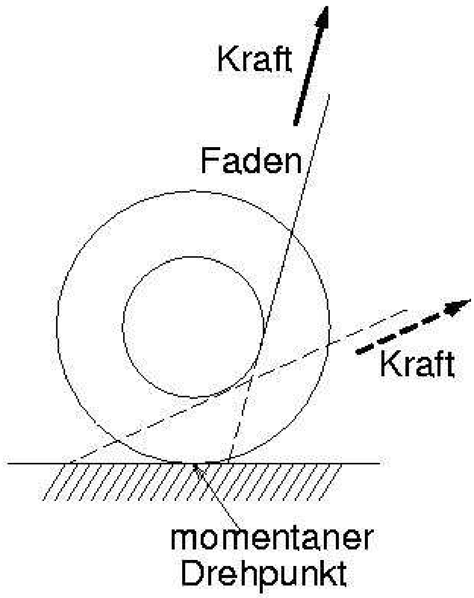


Abbildung 6: Die Garnrolle mit Innenradius R_1 und Aussenradius R_2. Je nach Winkel rollt sie vor- bzw. rückwärts!

Auch ist die Fahrweise eines Gyrofahrzeugs in den Kurven nicht ganz einfach, versucht doch das Schwungrad die Lage immer gleich zu halten. An den Endstationen wird eine Verbindung mit Stromnetz hergestellt und das Schwungrad wird wieder beschleunigt, auch das Bremsen kann in Form von Energierecycling wieder zurück auf das Schwungrad übertragen werden. Die Versuche in den 50er Jahren waren recht hoffnungsvoll, doch die fortschreitende Motorisierung und der Wunsch der Betreiber nach Flexibilität haben diese Forschung vorzeitig beendet. Die Abb. 7 zeigt einen solchen Bus aus den 50er Jahren.

a) kinetische Energie des Kreisels?

Das Trägheitsmoment eines Zylinders beträgt $T = \frac{1}{2}mr^2$. Mit $m = 1000kg$ und $r = 0.7m$ folgt $T = 245kgm^2$. Das Rad schafft 3770 Umdrehungen pro Minute, also ca. 63 pro Sekunde. Die Umlaufzeit beträgt als $1/63\ s = 0.016s$. Daraus folgt $\omega = 2\pi/0.016 = 393s^{-1}$. Die Rotationsenergie beträgt also:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \frac{1}{2}T\omega^2 \\ &= 19 \cdot 10^6 Nm \end{aligned}$$

b) Maximale Höhendifferenz?

$$\begin{aligned} E_{rot} &= m_{bus}gh \\ h &= 19 \cdot 10^6 Nm/(5000kg \cdot 9.81ms^{-2}) \\ h &= 387m \end{aligned}$$

c) Geschwindigkeit am Rand des Schwungrades?

$v = r\omega = 275m/s = 990km/h$

Abbildung 7: Foto eine schweizer Gyrobuses aus den 50er Jahren.

10.4 Aufgabe 4: Ideales vs. reales Gas

Temperatur von $3.5g$ Sauerstoff , das bei $p = 2.836MPa$ ein Volumen von $V = 90cm^3$ einnimmt?

a) ideales Gas

$$\begin{aligned} pV &= NkT \\ T &= \frac{pV}{Nk} \end{aligned}$$

mit: k= Boltzmannkonstante und N = Teilchenanzahl. $3.5g$ Sauerstoff entsprechen 0.11mol, enthalten also $0.11 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6.6 \cdot 10^{22}$ Teilchen. Ausserdem haben wir:

$$\begin{aligned} p &= 2.836 \cdot 10^6 Pa \qquad \text{Druck} \\ V &= 9 \cdot 10^{-5} m^3 \qquad \text{Volumen} \end{aligned}$$

Einsetzen liefert $T = 280K = 7°C$

b) reales Gas

Die Zustandsgleichung des realen Gases lautet:

$$\underbrace{\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)}_{\text{Binnendruckeffekt}} \cdot \underbrace{(V - bn)}_{\text{Eigenvolumeneffekt}} = nRT$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} n &= \text{Molzahl} \\ R &= 8.3144 J/mol\,K \qquad \text{molare Gaskonstante} \\ &= N_A \cdot k \qquad \text{mit } N_A \text{ der Avogadrozahl} \end{aligned}$$

Die Konstanten a und b sind Stoffspezifisch. Einsetzen der Zahlwerte liefert mit $T = 287.5K$ eine etwas höhere Temperatur.

10.5 Aufgabe 5: Das Elektronengas

Gegeben: metallischer Leiter mit Teilchendichte $n = 10^{29}m^{-3}$ und Bindungenergie von $4.5eV$ ($1eV$ entspricht $1.6 \cdot 10^{-19}J$).

a) Stoßquerschnitt und mittlere freie Weglänge?

Die Atome haben einen Radius von $r = 10^{-10}m$, während die Elektronen als punktförmig angenommen werden. Der Stoßquerschnitt ist damit $\sigma = \pi r^2$. Die mittlere Weglänge ist definiert als $\lambda = \frac{1}{\sigma n}$, mit n der Teilchenzahldichte. Mit unseren Werten:

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi \cdot 10^{-20}m^2 \\ \lambda &= 3.2 \cdot 10^{-10}m \end{aligned}$$

b) Mittlere Geschwindigkeit und mittlere Stoßzeit?

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Beziehung $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$. (Jeder Freiheitsgrad trägt einen Energieanteil von $\frac{1}{2}kT$ bei.) Die Temperatur ist laut Aufgabenstellung $300K$. Die Masse der Elektronen beträgt $9.1 \cdot 10^{-31}kg$. Die Boltzmannkonstante beträgt $k = 1.38 \cdot 10^{-23}J/K$.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{3kT}{m}} \\ &= 1.2 \cdot 10^5 m/s \end{aligned}$$

Die mittlere Stoßzeit τ (d.h. die Zeit zwischen zwei Stößen) ist definiert als $\lambda = v \cdot \tau$. bei uns also $\tau = 8.3 \cdot 10^{-16}s$

Der Druck des Elektronengases ist näherungsweise $p = \underbrace{\frac{N}{V}}_{=n} kT = 4.1 \cdot 10^8 Pa$ (Zustandsgleichung des idealen Gases).

c) Anzahl an ausdampfenden Elektronen?

Für diese Anzahl (bzw. Teilchen*dichte*) muss die Beziehung

$$N = \frac{2}{h^3}\sqrt{(2\pi mkT)^3} \cdot \exp -\frac{E_{min}}{kT}$$

ausgewertet werden, mit $E_{min} = 4.5eV = 7.2 \cdot 10^{-19}J$ sowie $T = 300K$ bzw. $T = 2400K$. Man findet paraktisch gar keine Teilchen bei $T = 300$ und $10^{17}m^{-3}$ bei $T = 2400K$.