Mathematik Chrashkurs

Oliver Passon

4. September 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die folgenden Abschnitte dienen größtenteils der Auffrischung von Oberstufenmathematik. Obwohl dem Anspruch nach selbstkonsistent, sind sie so knapp gehalten, daß sie für eine erste Begenung mit dem Stoff nur eingechränkt geeignet sind.

Die Kapitel über vektorwertge Funktionen (Gradient, Divergenz etc.), die Taylorentwicklung sowie mehrdimensionale Integration gehen über den üblichen Schulstoff hinaus. Aber auch hier ist die Darstellung knapp und soll eher einen Überblick verschaffen, der durch weitere Lektüre vertieft werden kann.

1 Differentialrechnung

Mathematischer Hintergrund:

Funktionsbegriff, Folgen, Grenzwert, Steigung → **Definition**:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Anschauliche/physikalische Bedeutung:

Die Ableitung $f'(x_0)$ liefert die Steigung der Tangente der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0. Anders formuliert liefert $f'(x)$ die "Änderungsrate" der Funktion $f(x)$. Beschreibt $f(x)$ also einen Ort als Funktion der Zeit, entspricht die Ableitung der "Geschwindigkeitsfunktion".

1.1 Ableitung wichtiger Funktionen:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
const.	0	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}	e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		$\arctan x$	$\frac{1}{1-x^2}$

1.2 Regeln:

Name	Regel	Beispiel
Summenregel	$(f+g)' = f' + g'$	$(x^2 + x^3)' = 2x + 3x^2$
Produktregel	$(fg)' = f'g + fg'$	$(x^2 \cos x)' = 2x\cos x - x^2 \sin x$
Quotientenregel	$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}$
Kettenregel	$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$	$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$

Übungsaufgaben:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = const. & f(x) = x^5 & f(x) = x^2 + 7x - 2 \\
x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t & f(x) = (x+2)^3 & f(x) = \sqrt{x+2} \\
f(x) = \sqrt{\sin x} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{x} & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+yx}} \\
f(x) = \sqrt{x^2 + x^4} & f(x) = \sin(x) + x & f(x) = (\sin x)^2 \\
f(x) = \cos(\omega \cdot x) & f(x) = \sin(x^3 - 2x) & f(x) = e^{\sqrt{x}} \\
f(x) = e^{\ln 2x} & f(x) = \ln(x^2) & f(x) = \ln(\sqrt{x^3+2})
\end{array}$$

2 Taylorreihe und Taylorentwicklung

Wir kommen nun zu einer wichtigen Anwendung der Differentialrechnung, der Taylorentwicklung. Die Taylorreihe ist eine Methode eine beliebige Funktion näherungsweise durch ein Poynom auszudrücken ($f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$). Die Koeffizienten a_i können duch i–te Ableitungen der Funktion ausgedrückt werden:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

Sprechweise: Die Funktion ist um x_0 in eine Taylorreihe n–ter Ordnung entwickelt worden.
Beispiel:
$f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Die ersten Ableitungen an der Stelle x_0 sind: $f'(0) = \cos 0{=}1$ und $f''(0) = -\sin 0 = 0$. In obige Formel eingesetzt ergibt sich:

$$\sin x \approx 0 + 1 \cdot x + \cdots$$

Interessant[1] sind nun Fragen wie: was ist der Konvergenzradius der Taylorreihe, und wenn er endlich ist, ist der Grenzwert tatsächlich die Ausgangsfunktion $f(x)$? Und schließlich: wie gut ist die Näherung in n–ter Ordnung. Bevor diese Fragen teilweise im Abschnitt 2.1 adressiert werden, soll die Taylorreihe erst noch motiviert werden:

2.1 Warum Ableitungen? Motivation der Taylorreihe

Nun wollen wir noch verstehen, warum die Koeffizienten mit den Ableitungen zusammenhängen. Betrachten wir eine ganzrationale Funktion:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

wenn wir sie in der Umgebung von x_0 untersuchen wollen, ist es sinnvoll sie in Potenzen von $(x - x_0)$ zu entwickeln (warum?). Gesucht werden also die b_k, sodaß gilt:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

Setzen wir $x = x_0$ erhalten wir jedoch: $f(x_0) = b_0$, da alle Terme mit $(x - x_0)^n$ verschwinden. Wie gewinnt man nun die höheren Koeffizienten? Die erste Ableitung lautet:

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + \cdots$$

Hier geht also b_1 ohne $(x - x_0)$–Faktor, und wir erhalten $f'(x_0) = b_1$. Der gleiche Trick geht nun auch für alle höheren b_n durch Bildung der n–ten Ableitungen. Da durch die Differenziation immer die Potenz als Faktor nach vorne wandert versteht man schließlich auch warum die Fakultät eingeht.

$$b_0 = f(x_0)\ ,\ b_1 = \frac{f'(x_0)}{1}\ ,\ b_2 = \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}\ , \cdots ,\ b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Diese Darstellung ist also für eine ganzrationale Funktion exakt, und es darf vermutet werden, daß sie für beliebige Funktionen (die genügend oft differenzierbar sind) immer noch eine gute Approximation darstellt. Wie groß der Fehler ist der bei der Näherung durch ein ganzrationale Funktion unterläuft soll im folgenden untersucht werden.

[1] vor allem für Mathematiker

Mathematisch formal(er)

Das mathematisch exakte Resultat zur Taylorreihe bzw. Taylorentwicklung stellt der folgende Satz dar:

Satz von Taylor
$f : [a, b] \to \mathcal{R}$ n–mal stetig differenzierbare Funktion (und sei f auch n+1 mal differenzierbar auf]a,b[ ), dann existiert $c \in]a, b[$, sodaß folgende Formel gilt:

$$f(b) = f(a) + f'(a) \cdot (b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_{n+1}$$

mit dem "Restglied":

$$R_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Der Satz von Taylor ist also eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (für n=0 erhält man gerade den Mittelwertsatz!), und mit der Ersetzung $b = x$ und $a = x_0$ entspricht die Taylorreihe unser bisherigen Schreibweise. Durch Abschätzen des Restgliedes kann man den Fehler bei der Entwicklung in n–ter Ordnung eingrenzen. Ist der Grenzwert des Restgliedes für $n \to \infty$ null, konvergiert die Taylorreihe tatsächlich gegen die angenäherte Funktion $f(x)$.

Beispiel
Betrachten wir die Funktion $\exp(x)$, die praktischerweise gleich ihrer Ableitung ist. Um $x_0 = 0$ entwickelt findet man also:

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\exp(0)}{j!} x^j + R_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n$$

das Restglied hat schließlich die Form

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c)$$

wobei c irgendeine reelle Zahl im Intervall zwischen 0 und x sein kann. Da die e–Funktion monoton ist gilt folgende Abschätzung:
Ist $x < 0$, so gilt $c \in [x, 0]$, so daß $\exp(c) < \exp(0) = 1$ gilt
Ist $x > 0$, so gilt $c \in [0, x]$, so daß $\exp(c) < \exp(x)$ gilt
In beiden Fällen strebt für grosse n das Restglied also gegen null, die Taylorreihe konvergiert also gegen die Ausgangsfunktion.

3 Integralrechnung

Mathematischer Hintergrund:

Funktionsbegriff, Grenzwert, Fläche $\rightarrow$ **Definition**:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x$$

mit $\delta x = (b-a)/n$ und $x_i = (i-1)\delta x + a$

Anschauliche Bedeutung:

Das (bestimmte) Integral $\int_a^b f(x)dx$ gibt den Flächeninhalt an, den der Graph der Funktion $f(x)$ im Intervall von a bis b mit der x–Achse einschliesst. Daraus folgt sofort eine weitere Interpretation: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ liefert den *mittleren* Funktionswert im Integrationsintervall. Tatsächlich ist der Flächeninhalt "gewichtet", das heißt, daß Flächen *oberhalb* der x–Achse *positiv* und Flächen *unterhalb* der x–Achse *negativ* zählen.

3.1 Berechnung von Integralen:

Ähnlich wie bei der Ableitung verwendet *niemand* die Definition, um ein Integral zu berechnen! Tatsächlich besteht folgender (erstaunlicher) Zusammenhang zum Begriff der Ableitung:
Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) \qquad \text{mit :} F'(x) = f(x)}$$

Die Funktion $F(x)$ wird auch Stammfunktion (oder *Auf*leitung) genannt. Integrieren bedeutet also, Stammfunktionen zu finden. In diesem Sinne sind Integrieren und Differenzieren gerade Umkehroperationen. Lässt man die Integrationsgrenzen (a und b) weg spricht man von einem *unbestimmten Inegral*:$\int f(x)dx = F(x) + C$. Die Stammfunktion ist nur bis auf eine beliebige Konstante C bestimmt, da diese beim Differenzieren wegfällt.

Aus der Definition des Integrals erkennt man zudem, daß folgende wichtige Beziehung gilt:

$$\int a \cdot f(x) + b \cdot g(x)dx = a \cdot \int f(x)dx + b \cdot \int g(x)dx \tag{1}$$

Dabei sind f und g Funktionen von x, und a, b einfache Zahlen. Diese Eigenschaft nennt man aus naheliegenden Gründen die "Linearität" der Integration.

3.2 elementare Stammfunktionen:

Der Hauptsatz erklärt also einen direkten Zusammenhang zwischen Ableitung und Integration. Jede Liste von Ableitungsfunktionen kann “rückwärts” auch als Liste von Stammfunktionen gelesen werden. Die Stammfunktionen $F(x)$ für wichtige Funktionen $f(x)$ lauten somit:

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$	$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
$x^m \ (m \neq -1)$	$\frac{1}{m+1}x^{m+1}$	$(ax+b)^m$	$\frac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1}$
$1/x$	$\ln\|x\|$	a^x	$a^x\frac{1}{\ln a}$
e^x	e^x	$\ln x$	$x(\ln x - 1)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\sin x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Regeln I:

Die Stammfunktionen aus dieser Liste erlauben zusammen mit der Linearitätseigenschaft (Gleichung 1) die Lösung zahreicher Integrale sofort anzugeben. Folgende Übungsaufgaben verdeutlichen diesen Punkt:

Übungsaufgaben:

Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

$$\int_0^1 \quad 2x^2 + 3x^3 dx \tag{2}$$
$$\int \quad x^4 + \sin x dx \tag{3}$$
$$\int_0^\pi \quad \frac{1}{x} - 2\cos x dx \tag{4}$$
$$\int \quad e^x + \frac{1}{\cos^2 x} dx \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Regeln II:

Wir haben gesehen, daß das Integral über eine *Summe* von Funktionen gleich der Summe der Integrale über die Einzelfunktionen ist (Gleichung 1). Für *Produkte* von Funktionen existieren leider keine so einfachen Regeln!

Im Gegensatz zur Ableitung existieren keine Regeln die **schematisch** angewendet werden können. Und es kommt noch schlimmer: Auch wenn die Stammfunktionen zweier elementarer Funktionen f und g bekannt sind, muß das Integral über $f \cdot g$ nicht “elementar lösbar” sein (Beispiel: $\int \frac{e^x}{x} dx$). “Elementar lösbar” heisst dabei, durch elementare Funktionen ausdrückbar. “Elementare Funktionen” sind Polynome, trigonometrische Funktionen

e^x etc... (Im Prinzip handelt es sich dabei um eine *willkürliche* Auswahl von Funktionen unter dem Gesichtspunkt der Nützlichkeit). Die Ableitung von elementaren Funktionen sowie aus ihnen zusammengestzten Ausdrücken lässt sich hingegen *immer* angeben.

Trotzdem gibt es "mehr" integrierbare– als differenzierbare Funktionen, denn für alle stetigen Funktionen konvergiert der Grenzwert aus der Integraldefinition, wohingegen bekanntlich nicht jede stetige Funktion differenzierbar ist. Die *Existenz* des Integrals und seine "elementare Lösbarkeit" müssen unterschieden werden!

Aus all dem lernt man, daß der Begriff der "elementaren Funktion" und des "elementar ausführbaren Integrals" keine fundamentale Bedeutung in der Mathematik hat. Vielmehr sollte der Integrationsprozeß als **Prinzip zur Erzeugung neuer Funktionen** aufgefasst werden. Etwa kann man den Logarithmus $\ln x$ definieren als $\int_1^x \frac{1}{\lambda} d\lambda$. Ein Integral das nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann, verhält sich ähnlich wie ein Bruch der nicht weiter gekürzt werden kann. Er definiert eine rationale Zahl, und ist vom mathematischen Standpunkt aus jeder anderen Zahl nicht unterlegen. Richard Courant schreibt dazu:

> Wenn also das Ziel der Integralrechnung wäre, Funktionen elementar zu integrieren, so wären wir rasch am Ende dieser Kunst angelangt. Aber ein solches Ziel hat tatsächlich keine innere Berechtigung; im Gegenteil: Es haftet ihm etwas künstliches an. (R. Courant)

Nach diesen länglichen Ausführungen nun doch zu den Regeln des Integrierens:

Name	Verfahren	Beispiel
Raten	Stammfunktion raten und durch Ableiten prüfen	
Substitution	$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x))$	$\int 2x \sin x^2 dx = -\cos x^2 + C$
partielle Integration	$\int fg' = fg - \int gf'$	$\int xe^x dx = e^x(x-1)$
Partialbruchzerlegung	$f(x) = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}$ immer elementar integrierbar (arcsin etc...)	

> Ob es eine Substitution gibt, und wie man sie findet, darüber lassen sich keine allgemeinen Aussagen machen; vielmehr ist hier ein Punkt wo Übung und Geschicklichkeit gegenüber der systematischen Methode zu ihrem Recht kommen. (R. Courant)

Übungsaufgaben:

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \sin x \cos x dx \tag{7}$$

$$\int \sin^n x \cos x dx \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} dx \tag{9}$$

$$\int \quad x \sin x dx \tag{10}$$
$$\int \quad \tan x dx \tag{11}$$
$$\int \quad \frac{x dx}{1 + x^2} \tag{12}$$
$$\int \quad \cos^2 x dx \tag{13}$$
$$\int \quad \ln x dx \tag{14}$$

4 Mehrdimensionale Integration

Bisher haben wir nur "eindimensionale" Integrale betrachtet. Das heißt, daß sowohl das Integrationsgebiet ("von a nach b") eindimensional, als auch der Integrand $f(x)$ eine reelwertige Funktion war (im Gegensatz zu *Vektorwertig*). Die möglichen Verallgemeinerungen betreffen also sowohl den Integranden (Integration über Vektorfelder), als auch das Integrationsgebiet (Volumenintegral/Flächenintegal).

Die Verallgemeinerung des Integrationsbegriffes in mehrere Dimensionen spielt eine wichtige Rolle in der Physik. Beispiel sind "Linienintegrale" über Kraftfelder (zur Messung der Arbeit), "Volumenintegrale" über Massendichten (zur Bestimmung von Trägheitsmomenten) oder "Flächenintegrale" über Vektorfelder (zur Messung von "Flüssen").

Im **Kern** wird die Berechnung dieser Integrale **immer** auf die (i.allg. mehrfache) Lösung von eindimensionalen Integralen hinauslaufen. Es müssen also weniger neue Rechentechniken erworben werden, als vielmehr konzeptionelles Verständnis der neuen Begriffe!

Um einen ersten Überblick zu geben, stellt die folgende Tabelle die verallgemeinerten Integralbegriffe hinsichtlich der Dimensionalität des Integrationsgebietes, der Art des Integranden (Vektor– oder Skalarfeld) und einer typischen Anwendung gegenüber.

	Linienintegral	Volumenintegral	Flächenintegral
Integrationsgebiet	1–dim(krumm)	n–dim	2–dim
Integrand	Vektorfeld	Skalarfeld	Vektorfeld
Symbol	$\int_\gamma \vec{F}ds$	$\int\int\int_V f dV$	$\int\int_A \vec{F}d\vec{f}$
Beispiel	Arbeit	Trägheitsmoment	Fluss

4.1 Kurvenintegral

Das Kurven– bzw. Linienintegral ist eine Integration *vektorwertiger* Funktionen. Der Integrationsweg ist – wie der Name andeutet – eine Kurve, d.h. zwar eindimensional, aber im allgemeinen gekrümmt.

Ein Kurvenintegral über ein Vektorfeld $\vec{E}$ längs eines Weges γ ist definiert als:

$$\int_\gamma \vec{E}(x,y,z)d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{E}(x(t),y(t),z(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

Dabei ist $\vec{r}(t)$ eine Parametrisierung des Integartionsweges und t_0 bzw. t_1 sind die Werte des Parameters, für die $\vec{r}(t)$ gleich dem Anfangs– bzw. Endpunkt des Integartionsweges ist. Ausserdem soll die Schreibweise $\vec{E}(x(t),y(t),z(t))$ andeuten, daß x, y und z gemäß der Parametrisierung durch t ausgedrückt werden müssen.

Zwischen $\vec{E}$ und der Ableitung von $\vec{r}$ $(\frac{d\vec{r}}{dt})$ wird ein Skalarprodukt ausgeführt! Auf diese Weise wird der Integrand eine reellwertige Funktion, und kann über t integriert werden.

Beispiel:
Berechne das Linienintegral über das Vektorfeld

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

längs eines Kreises mit Radius R um den Ursprung in der x–y Ebene.

1.Schritt: Parametrisierung des Weges
Die Parametrisierung des Weges ist *nie* eindeutig. Dies hat auf den Wert des Integrals jedoch keinen Einfluß! In unserem Fall lautet eine mögliche Parametrisierung:

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{15}$$

mit $t \in [0, 2\pi]$. Anfangs– und Endpunkt sind also durch $t_0 = 0$ und $t_1 = 2\pi$ gegeben.

2.Schritt: Vektorfeld durch Parameter ausdrücken
Durch den Ausdruck für $\vec{r}(t)$ kann das Vektorfeld $\vec{E}$ als Funktion von t ausgedrückt werden: Der Beziehung 15 liest man ab, daß $x(t) = R\sin t$ und $y(t) = R\cos t$ gilt. Diese Ausdrücke werden nun einfach in die Definition von $\vec{E}$ eingesetzt!

$$\vec{E}(x(t), y(t), z(t)) = \vec{E}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.Schritt: Berechnung von $\frac{d\vec{r}}{dt}$
Nun muß nur noch die Ableitung von $\vec{r}(t)$ (komponentenweise) gebildet werden.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.Schritt: Einsetzen in die Definition des Linienintegrals
Einsetzen in die Definition liefert[2]:

$$\int_\gamma \vec{E}(x, y, z) d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

Hier wird ein Skalarprodukt zwischen E und $\frac{d\vec{r}}{dt}$ berechnet! Auf diese Weise wird der Integrand ein Skalar, und das Integral ein "Gewöhnliches".

Wie schon zuvor beim Ausdrücken der t Abhängigkeit von $\vec{E}$ verwendet man die Relation $\sin^2 t + \cos^2 = 1$ und findet schliesslich:

$$\int_\gamma \vec{E}(x, y, z) d\vec{r} = 2\pi R$$

Übungsaufgaben:

Berechne das Linienintegral über das Vektorfeld

$$\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ z \\ y - x \end{pmatrix}$$

Längs des Weges der gemäß $\vec{r}(t) = (t, 1, t^2)$ mit $t \in [0, 2]$ parametrisiert ist.

[2] Die Integrationsgrenzen sind in "Schritt 1" begründet worden.

Hauptsatz der Kurvenintegration

Ein Kurvenintegral wird im allgemeinen nicht wegunabhängig sein, d.h. davon abhängen auf *welchem* Weg es zwischen den Punkten A und B ausgewertet wird. Eine wichtige Ausnahme bilden Vektorfelder die sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen lassen. Es gilt nämlich: Falls $\vec{E}$ =gradΦ, dann ist das Linienintegral entlang der Kurve γ zwischen den Punkten A und B gleich $\Phi(B) - \Phi(A)$. Also:

$$\int_\gamma \vec{E} d\vec{r} = \int_\gamma \mathrm{grad}\Phi \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \Phi(\mathrm{B}) - \Phi(\mathrm{A})$$

Dieser Zusammenhang ist der "Hauptsatz der Kurvenintegration"[3]. Das heißt aber nichts anderes, daß für "Potentialfelder" ein Kurvenintegral nur von Anfangs– und Endpunkt abhängt – und nicht von dem Weg auf dem man diese Beiden verbindet. Auf geschlossenen Wegen – wenn Anfangs– und Endpunkt also zusammenfallen – ist das Kurvenintegral über diese speziellen Felder also immer Null!

Kraftfelder die eine Darstellung als Gradient eines Skalarfeldes besitzen werden auch "konservativ" genannt. Integriert man ein konservatives Kraftfeld entlang eines Weges – wenn das Linienintegral also einer Arbeit entspricht – bedeutet das Verschwinden des Kurvenintegrals also, daß auf geschlossenen Wegen keine Arbeit gewonnen bzw. verloren werden kann. Ausserdem gilt für Potentialfelder, daß die Rotation verschwindet. Tatsächlich ist diese Folgerung noch von mathematischen Details abhängig die in Abschnitt 5.3 diskutiert werden.

4.2 Volumenintegral

Das Volumenintegral ist die naheliegenste Verallgemeinerung des Integrationsbegriffes auf mehrere Dimensionen. Im Spezialfall kann man mit ihm tatsächlich Volumina messen – genauso wie man mit dem einfachen Integral Flächen bestimmt.

Bei ihm ist die Funktion zwar reellwertig, hängt jedoch im allgemeinen von mehreren Variablen ab (etwa: $f(x, y, z) = x + y^2 - z$). Integriert wird nun über ein "Gebiet" im Raum der Argumente der Funktion. In unserem Beispiel also etwa dem Einheitswürfel der durch $0 < x, y, z < 1$ gegeben ist. Man schreibt formal (bei kartesischen Koordinaten):

$$\int\int\int f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz$$

"$dx\ dy\ dz$" ist das sog. Volumenelemt in kartesischen Koordinaten. Für unser Beispiel lautet das Integral also:

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} x + y^2 - z\ \ dx\ dy\ dz$$

Gelöst wird dieses Integral einfach durch 3–fache einfache Integration nach x, y und z. Im folgenden Ausdruck ist dies durch die Klammer angedeutet. Bei der Integration nach z.Bsp. z sind y und x als Konstanten zu behanden.

$$\int_0^1 dx \left(\int_0^1 dy \left(\int_0^1 dz\ x + y^2 - z\right)\right)$$

[3]Man mache sich klar, daß seine Aussage dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung sehr ähnlich ist. Das Potential entspricht der "Stammfunktion" eines Vektorfeldes.

Um die Zuordnung zu erleichtern, sind die Differential dx, dy und dz *direkt* hinter die Integralzeichen gesetzt.

Unser Beispiel ist deshalb so einfach, weil das Integrationsgebiet eine so simple Parametrisierung hat. Vorallem hängen die Integrationsgrenzen nicht von den Variablen ab, wodurch die Reihenfolge mit der die drei Integrationen ausgeführt werden keine Rolle spielt. Betrachtet man etwa keinen Würfel, sondern den Viertelkreis in der x–y Ebene als Integrationsgebiet, so lautet die Parametrisierung etwa:

$$\begin{aligned} x &\in [0, R] \\ y &= \sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

Das Integral über eine Funktion $f(x, y)$ über den Viertelkreis (mit Radius R) lauten in diesem Fall:

$$\int_{x=0}^{R} dx \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \;\; f(x, y)$$

Jetzt spielt im Gegensatz zu unserem ersten Beispiel auch die *Reihenfolge* der Integration eine Rolle: da y als Funktion von x ausgedrückt wurde muß *zuerst* nach y integriert werden.

Selbst im einfachsten Fall einer konstanten Funktion $f(x, y) = 1$ wird man auf eine relativ komplizierte Rechnung geführt:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=0}^{R} dx \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \cdot 1 \\ A &= \int_{x=0}^{R} dx \sqrt{R^2 - x^2} \\ A &= \frac{R^2 \arcsin 1}{2} \\ A &= R^2 \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Das Ergebnis gibt übrigens genau den viertel Flächeninhalt des Kreises, wie man es bei einer konstanten “1–Funktion” auch erwartet.

Diese Rechnung kann enorm vereinfacht werden, wenn man die Wahl seines Koordinatensystems dem Problem anpasst. Offensichtlich sind Polarkoordinaten $(x, y) \to (r, \phi)$ für unser Integrationsgebiet sinnvoller. Dann ist die Parametrisierung des Viertelkreieses nämlich genauso einfach wie der Würfel in Kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \phi \leq \pi/2 \end{aligned}$$

Allerdings muß ebenfalls das “Volumenelemt” (bzw. “Flächenelemt” bei zwei Dimensionen) angepasst werden. Statt $dxdy$ schreibt man $r\, d\phi\, dr$! Unsere Rechnung wird dann zu:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R r \; dr \\ &= \int_0^{\pi/2} d\phi \frac{R^2}{2} \\ &= R^2 \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Die Volumenelemente von Kartesischen–, Zylinder– und Polarkoordinaten sind in folgender Tabelle angegeben. Wie üblich bezeichnet θ den Polarwinkel ($0 \leq \theta \leq \pi$) der zur x–y Ebene eingeschlossen wird, und ϕ den Azimuthalwinkel ($0 \leq \phi \leq 2\pi$).

	Volumenelement
kartesische Koordinaten	$dxdydz$
Zylinderkoordinaten	$r\ d\phi dzdr$
Polarkoordinaten	$r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$

Übungsaufgaben:

Ein Zylinder mit Radius R und Länge h habe eine um seine Längsachse symmetrische Massenverteilung $\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{r^2}{R^2}\right]$. Berechne sein Trägheitsmoment $I = \int \rho r^2 dV$ bezüglich seiner Symmetrieachse!

4.3 Flächenintegral

Im Abschnitt über Volumenintegrale wurden bereits Flächen betrachtet (etwa der Viertelkreis in der x–y Ebene). Formal handelte es sich aber denoch um "Volumenintegrale" – für den Mathematiker sind Flächen nämlich nichts anderes als 2-dim Volumen.

Das "Flächenintegral" ist davon konzeptionell verschieden! Hier wird ein Vektorfeld integriert, wobei das Integrationsgebiet eine Fläche darstellt. Ähnlich wie im Falle des Volumenintegrals ist dabei die Hauptschwierigkeit das Integrationsgebiet A zu parametrisieren. Symbolisch schreibt man $\int\int_A \vec{F} d\vec{f}$ Dabei charakterisiert $d\vec{f}$ das infinitesimale Flächenstück durch seinen Normalenvektor. Da wir lediglich konzeptionelle Grundlagen des Flächenintegrals einführen wollen, diskutieren wir nur einen einfachen Spezialfall. Unser Integrationsgebiet sei der Einheitwürfel im R^3. Die Normalenvektoren auf seinen 6 Flächen lassen sich sofort angeben. Das Flächenintegral reduziert sich in diesem Fall auf eine Summe.

4.4 Integralsätze

Zwischen Kurven–, Volumen– und Flächenintgral bestehen wichtige Zusammenhänge, die durch die Integralsätze von Stokes und Gauss ausgedrückt werden. Mit der Bezeichnung ∂F = Rand der Fläche F gilt [4]: **Satz von Stokes**

$$\oint_{\partial F} \vec{A} d\vec{r} = \int\int_F \mathrm{rot} \vec{A} d\vec{f}$$

Das Symbol $\oint$ bezeichnet die Integration über ein geschlossenes Gebiet. Das Linieintegral eines Feldes über den Rand einer Fläche ist also identisch mit dem Flächenintegral über seine Rotation. Daraus folgt etwa, daß ein Feld das Rotationfrei ist i. allg. "konservativ"

[4] Die Begriffe Rotation und Divergenz werden in Abschnitt 5.1 erläutert.

ist. Tatsächlich ist diese Folgerung noch von mathematischen Details abhängig die in Abschnitt 5.3 diskutiert werden.

Mit der Bezeichnung ∂V = Rand des Volumens V gilt: **Satz von Gauss**

$$\int\int_{\partial V} \vec{A} d\vec{f} = \int\int_{F} \mathrm{div} \vec{A} dV$$

Der Fluss durch die Fläche ∂V ist also gleich dem Volumenintegral über die Divergenz.

5 Vektorrechnung

Mathematischer Hintergrund:

Die Vektorrechnung ist Teil der linearen Algebra. Ihre Begriffe sind historisch als eine Verallgemeinerung der anschaulichen Relationen zwischen Pfeilen entstanden.

Definitionen

Führt man ein *Koordinatensystem* ein, so kann jeder Vektor durch Angabe seiner Koordinatenwerte (also reeller Zahlen) charakterisiert werden. Formal: Die Koordinaten–Achsen entsprechen "Basisvektoren", und ein Vektor wird als "Linearkombination" dieser "Basisvektoren" dargestellt. Diese Darstellung ist natürlich nicht eindeutig!

Die Anzahl der Zahlen die einen Vektor beschreiben (= Anzahl der Koordinatenachsen = Anzahl der Baisisverktoren) nennt man die **Dimension** des Vektors (bzw. des Vektorraumes). Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben bei Wahl eines Koordinatensystems im drei–dimensionalen Raum dann die folgende Darstellung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Man definiert folgende vier Verknüpfungen:

$$\text{Addition} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}, \quad \text{Skalarprodukt} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\text{Multiplikation mit Skalar} \quad c \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_x \\ c \cdot a_y \\ c \cdot a_z \end{pmatrix}, \quad \text{Vektorprodukt} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Die Definitionen für "Addition", "Skalarprodukt" und "Multiplikation mit einem Skalar" verallgemeinern sich auf beliebig viele Dimensionen. Das "Vektorprodukt" ist jedoch **nur im dreidimensionalen Raum definiert!!!**
Ein weitere wichtiger Begriff ist der "Betrag" (=die "Länge") eines Vektors. Er ist definiert als:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Eigenschaften der Verknüpfungen und Interpretation

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien Vektoren die den Winkel α einschliessen. Das Zeichen $\vec{a} \perp \vec{b}$ bedeutet "$\vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$"

Verknüpfung	wichtige Beziehung	Interpretation
Addition		"Parallelogrammregel"
Skalarprodukt	$\vec{a}\vec{b} = \|a\|\|b\| \cos\alpha \ (\star)$	"Projektion"
Multipliaktion mit einem Skalar		Strecken bzw. Stauchen
Vektorprodukt	$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|a\|\|b\| \sin\alpha \ (\star\star)$ $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$	

Anmerkung: Die Eigenschaften $(\star)$ und $(\star\star)$ werden in der Regel als *Definitionen* der entsprechenden Multiplikationen eingeführt. Unsere Regeln zur Berechnung dieser Grössen können dann abgeleitet werden.

Übungsaufgaben:

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen sie folgende Ausdrücke:

a) $\vec{a}\vec{b}$ b) $\vec{a} \times \vec{b}$ c) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$

d) $|\vec{a}|$ e) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ f) $3 \cdot \vec{c}$

"Physikalische Anwendung"

Um zu erkennen inwiefern Vektoren und Rechenoperationen zwischen ihnen physikalisch relevant sind betrachte man die folgenden Aufgaben:

1. Auf einen Punkt wirken die drei Kräfte

   $$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{und} : \vec{F_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   berechne die **Gesamtkraft** auf den Körper!

2. Berechne den Anteil der $\vec{F_1}$–Kraft, der in Richtung der $\vec{F_2}$–Kraft wirksam ist!

5.1 Vektorwertige Funktionen

Typischerweise sind die in der Physik betrachteten vektorwertigen Größen jedoch nicht konstant! Das heißt, daß man vektorwertige *Funktionen* untersucht. Ein anschauliches Beispiel ist der Ortsvektor als Funktion der Zeit $\vec{r}(t)$.

betrachten wir ein zwei–dimensionales Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor soll eine Flugbahn Beschreiben. Die $y = 0$ "Ebene" sei die Erdoberfläche.
Augaben:

1. Zu welchen Zeiten ist der Körper am Boden?
2. Skizziere die Flugbahn!
3. Berechne den Abstand vom Punkt $(1, 0)$ als Funktion der Zeit!
4. Wann ist der Abstand vom Punkt $(1, 0)$ minimal?
5. Berechne den Geschwindigkeitsvektor $\frac{d\vec{r}}{dt}(t)$!
6. Wie kann man erreichen, daß die Bewegung zur Zeit $t = 0$ startet ("Umparametrisierung" der Flugbahn)

5.2 Gradient, Divergenz und Rotation

- Gradient
  Die Gradientbildung ist eine Operation die auf ein skalares Feld angewendet werden kann, und ein vektorwertiges Feld liefert. In kartesischen Koordinaten:

  $$grad\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi \\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi \end{pmatrix}$$

  Es liefert den Vektor der von jedem Ort (x,y,z) in die Richtung des stärksten Anstieges des Felds zeigt. Falls ein Vektorfeld die Darstellung durch ein skalares Feld erlaubt, ist die Rotation Null. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist unter dieser Voraussetzung das Linienintegral wegunabhängig, und man nennt das betreffende Feld "konservativ".

- Divergenz
  Die Divergenzbildung ist eine Operation die auf ein vektorwertiges Feld angewendet werden kann, und ein skalares Feld liefert. In kartesischen Koordinaten:

  $$div\vec{E}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z$$

Sie ist ein Maß für die "Quellstärke" des Feldes, das heisst das Vorhandensein von Quellen oder Senken. Dies sind bildlich gesprochen zum Beispiel die Punkte, an denen Feldlinien beginnen oder enden.

- Rotation
  Die Rotationsbildung ist eine Operation die auf ein vektorwertiges Feld angewendet werden kann, und wieder ein vektorwertiges Feld liefert. In kartesischen Koordinaten:

$$rot\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y \\ \frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z \\ \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x \end{pmatrix}$$

  Sie ist qua Bildung sensitiv auf Änderungen des Feldes senkrecht zu den Feldlienen. Ein Feld in dem die Rotation verschwindet wird wirbelfrei genannt. Falls das Definitionsgebiet "einfach" ist (siehe Auf.2b) ist die Bedingung rot=0 hinreichend dafür, dass das Feld konservativ ist, d.h. auf geschlossenen Wegen keine Arbeit verrichtet werden muß.

5.3 Beispiel: Divergenz, Rotation und Potential

Wir betrachten nun folgendes Feld: $\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

An diesem diskutieren wir Divergenz, Rotation und physikalische Interpretation. Darüberhinaus diskutieren wir ein verbreitetes Mißverständnis über den Zusammenhang zwischen Potentialfunktionen und der Eigenschaft eines Feldes Konservativ zu sein.

- **physikalische Interpretation**
  Ein Feld diesen Typs ergibt sich z.Bsp. als Magnetfeld um einen stromdurchlossenen Leiter (in z Richtung). Die Stärke des Feldes fällt wie $1/r$ ab.

- **Divergenz**
  Die Divergenz ist Null, da die beiden Terme anti–symmetrisch unter Vertauschung von x und y sind. Rechnerisch:

$$div\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z \tag{16}$$

$$div\vec{E} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 0 \tag{17}$$

$$div\vec{E} = 0 \tag{18}$$

- **Rotation**
  Tatsächlich verschwindet die Rotation ebenfalls! Da die z Komponente Null ist muß nur die dritte Komponente der Rotation betrachtet werden:

$$(rot\vec{E})_z = \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x \tag{19}$$

$$(rot\vec{E})_z = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{20}$$

$$(rot\vec{E})_z = 0 \tag{21}$$

- **Potential?**
  Verbreiteter Aberglaube unter Experimentalphysikern ist, daß rotationfreie Felder *immer* konservativ sind, also auf geschlossenen Wegen das Linienintegral verschwindet. Tatsächlich findet man auch ein skalares Potential für unser Feld, nämlich $\Phi = -\arctan\frac{y}{x}$ (es gilt also $\vec{E} = grad\Phi$. Zur Erinnerung: Die Ableitung von arctan lautet: $\arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2}$)

  Betrachtet man aber zum Beispiel das Linienintegral längs des Einheitskreises um den Ursprung ($\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t)$)findet man:

  $$\oint \vec{E}d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \neq 0$$

  Offensichtlich ist das Feld also *nicht* konservativ! Das Problem besteht darin, daß zusätzliche Annahmen über die Definitionsgebiete der Vektorfelder gemacht werden müssen, um aus “Rotationsfreiheit” auf “konservativ” schliessen zu dürfen. Es gilt etwa [5]:

  Satz
  $\vec{F}$ stetig differenzierbares Vektorfeld auf einfachem[6] Gebiet Ω.
  Dann gilt:
  $rot\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ konservativ

  In unserem Beispiel ist das Vektorfeld im R^3 *ohne* die z–Achse definiert. Offensichtlich lässt sich unser Integrationsweg also nicht auf einen Punkt zusammenziehen, ohne an der z–Achse “hängenzubleiben”. Das Problem ist also nicht allein der Pol am Ursprung, denn bekanntlich hat das Feld $\vec{E} \sim \vec{r}/r^3$ auch einen Pol am Ursprung, ist jedoch tatsächlich konservativ (Mit einem Potential vom Typ $\Phi \sim 1/r$). Hier kann man jedoch auch einen Integrationsweg um den Ursprung (und in der xy Ebene) stetig zu einem Punkt zusammenziehen, ohne das Definitionsgebiet des Feldes (R^3 *ohne* den Ursprung) zu verlassen: Man kann die z–Achse für $z \neq 0$ queren.

[5] Fischer/Kaul *Mathematik für Physiker* (Band 1), Teubner Studienbücher, Signatur: TLL564

[6] Ein Gebiet heißt “einfach”, falls jede geschlossene Kurve sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt ohne das Gebiet zu verlassen