

Die Logarithmusfunktion

Wenn $2^x = 16$ gilt, welchen Wert hat dann x ? Hier offensichtlich $x = 4$, denn $2^4 = 16$. Aber schon die Gleichung $2^x = 15$ ist schwieriger zu lösen! Man definiert: $x = \log_2 15$ (sprich: „ x ist der Logarithmus von 15 zur Basis 2“).

Der Logarithmus ist eine Hochzahl!

Der Logarithmus kehrt das Exponenzieren um - man sagt auch, er ist die „Umkehrfunktion“ zum Exponenzieren. Seinen Graphen erhält man also durch Spiegeln an der Winkelhalbierenden! (Bzw: in $y = b^x$ x und y vertauschen ($x = b^y$) und nach „ y auflösen“: $y = \log_b x$.)

Eigenschaften

$f(x) = \log_b x$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ und $b \neq 1$

- Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
- Wertemenge $W = \mathbb{R}$
- $f(x) = \log_b x$ geht immer durch den Punkt $(1|0)$
- $f(x) = \log_b x$ ist streng monoton wachsend für $b > 1$.
- $f(x) = \log_b x$ ist streng monoton fallend für b zwischen 0 und 1.

Rechengesetzte und Regeln

Es gilt (wenn keine Basis angegeben wurde, gilt die Regel für beliebige Basen!):

- $\log 1 = 0$, denn $(\quad)^0 = 1$
- $\log_b b = 1$, denn $b^1 = b$
- $\log(u \cdot v) = \log u + \log v$
- $\log \frac{u}{v} = \log u - \log v$
- $\log a^r = r \cdot \log a$
- $\log \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log u$

Aber: $\log(a + b) \neq \log a + \log b$

Aufgaben zum Logarithmus und der Logarithmusfunktion

Auf. 1 Zeichne den Graphen der Funktionen $f(x) = \log_2 x$ und $g(x) = \log_3 x!$

Auf. 2 Berechne die folgenden Ausdrücke im Kopf.

a) $\log_3 9$ b) $\log_4 64$ c) $\log_7 \frac{1}{49}$

Auf. 3 Verwandle die Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln in den Logarithmus eines einzigen Terms!

a) $\log u + \log v - (\log r + \log s)$ b) $3 \log a - \frac{1}{3} \log(a - b)$

Auf. 4 Deutschland hat (Stand 2008) ca. 82 Millionen Einwohner und ein Bevölkerungswachstum von 0,07%. Russland hat 145 Millionen Einwohner jedoch eine negative Bevölkerungsrate von $-0,57\%$. Stelle eine allgemeine Funktionsgleichung auf, die die Bevölkerung der Länder als Funktion der Zeit ausdrückt und berechne den Zeitpunkt, für den die Bevölkerungen beider Länder gleich groß sind! Wie groß ist die Bevölkerung dann?

Aufgaben zum Logarithmus und der Logarithmusfunktion

Auf. 1 Zeichne den Graphen der Funktionen $f(x) = \log_2 x$ und $g(x) = \log_3 x!$

Auf. 2 Berechne die folgenden Ausdrücke im Kopf.

a) $\log_3 9$ b) $\log_4 64$ c) $\log_7 \frac{1}{49}$

Auf. 3 Verwandle die Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln in den Logarithmus eines einzigen Terms!

a) $\log u + \log v - (\log r + \log s)$ b) $3 \log a - \frac{1}{3} \log(a - b)$

Auf. 4 Deutschland hat (Stand 2008) ca. 82 Millionen Einwohner und ein Bevölkerungswachstum von 0,07%. Russland hat 145 Millionen Einwohner jedoch eine negative Bevölkerungsrate von $-0,57\%$. Stelle eine allgemeine Funktionsgleichung auf, die die Bevölkerung der Länder als Funktion der Zeit ausdrückt und berechne den Zeitpunkt, für den die Bevölkerungen beider Länder gleich groß sind! Wie groß ist die Bevölkerung dann?

Aufgaben zum Logarithmus und der Logarithmusfunktion

Auf. 1 Zeichne den Graphen der Funktionen $f(x) = \log_2 x$ und $g(x) = \log_3 x!$

Auf. 2 Berechne die folgenden Ausdrücke im Kopf.

a) $\log_3 9$ b) $\log_4 64$ c) $\log_7 \frac{1}{49}$

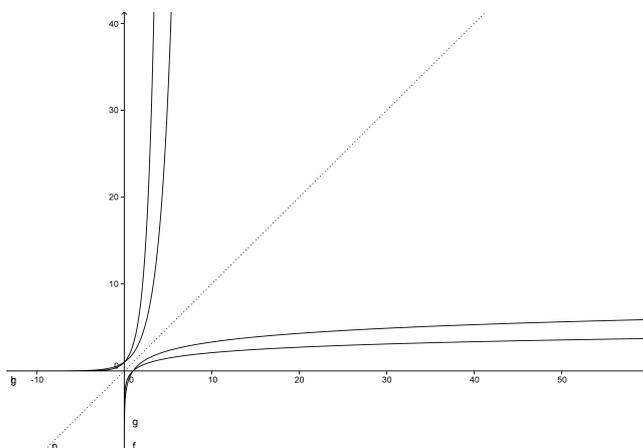
Auf. 3 Verwandle die Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln in den Logarithmus eines einzigen Terms!

a) $\log u + \log v - (\log r + \log s)$ b) $3 \log a - \frac{1}{3} \log(a - b)$

Auf. 4 Deutschland hat (Stand 2008) ca. 82 Millionen Einwohner und ein Bevölkerungswachstum von 0,07%. Russland hat 145 Millionen Einwohner jedoch eine negative Bevölkerungsrate von $-0,57\%$. Stelle eine allgemeine Funktionsgleichung auf, die die Bevölkerung der Länder als Funktion der Zeit ausdrückt und berechne den Zeitpunkt, für den die Bevölkerungen beider Länder gleich groß sind! Wie groß ist die Bevölkerung dann?

Aufgaben zum Logarithmus und der Logarithmusfunktion: Lösungen

zu Auf. 1 Eine Möglichkeit besteht darin, die Graphen für 2^x und 3^x zu zeichnen und sie an der Winkelhalbierenden zu spiegeln!



Zu Auf. 2

- a) $\log_3 9 = 3$, denn $3^3 = 9$ b) $\log_4 64 = 3$, denn $4^3 = 64$
 c) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$, denn $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

Zu Auf. 3 Verwandle die Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln in den Logarithmus eines einzigen Terms!

- a) $\log u + \log v - (\log r + \log s) = \log(uv) - \log(rs) = \log \frac{uv}{rs}$
 b) $3 \log a - \frac{1}{3} \log(a-b) = \log a^3 - \log(a-b)^{1/3} = \log \frac{a^3}{\sqrt[3]{a-b}}$

Zu Auf. 4 $N^D(x) = 82 \cdot 1.0007^x$ Mill. (mit x der Zeit in Jahren) bzw. $N^R(x) = 145 \cdot 0.9943^x$ Mill. Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 82 \cdot 1.0007^x &= 145 \cdot 0.9943^x && | : 145 \quad : 1.0007^x \\ \frac{82}{145} &= \frac{0.9943^x}{1.0007^x} \\ \frac{82}{145} &= \left(\frac{0.9943}{1.0007} \right)^x && | \log \\ \log \frac{82}{145} &= x \cdot \log \frac{0.9943}{1.0007} && | : \log \frac{0.9943}{1.0007} \\ x &= \frac{\log 82 - \log 145}{\log 0.9943 - \log 1.0007} \\ x &= 88,8 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

Antwortsatz: In unserem Modell werden in ≈ 89 Jahren Deutschland und Russland die selbe Bevölkerungsgröße haben (nämlich $N = 82 \cdot 1,0007^{89} = 87,3$ Mill.)

Logarithmengesetze

Es gilt (wenn keine Basis angegeben wurde, gilt die Regel für beliebige Basen!):

- $\log 1 = 0$, denn $(\quad)^0 = 1$
- $\log_b b = 1$, denn $b^1 = b$
- $\log(u \cdot v) = \log u + \log v$
- $\log \frac{u}{v} = \log u - \log v$
- $\log a^r = r \cdot \log a$
- $\log \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log u$

Aber:

$$\log(a + b) \neq \log a + \log b$$