Von der Lagrangefunktion zur Lagrangedichte

Oliver Passon

4. September 2006

Bekanntlich bietet der Lagrangeformalismus eine Umformulierung der Newtonschen Mechanik, die die Behandlung von 'Zwangskraft-Problemen' jedoch wesentlich erleichtert.

Ein mechanisches System kann durch eine Lagrangefunktion:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$$

beschrieben werden (mit q_i ihren verallgemeinerten Koordinaten). Diese ist gegeben durch die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie. Die Bewegungsgleichungen des Systems können aus dem Prinzip der extremalen Wirkung ('Hamiltonsche Prinzip') $\delta S = 0$ abgeleitet werden, wobei die Wirkung definiert ist als:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

Man wird dabei auf die Euler-Lagrange Gleichungen geführt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Die Indexmege $i = 1, 2, ..., f$ zählt die Freiheitsgrade dieses diskreten Systems ab, aber die Verallgemeinerung zu einem kontinuierlichen System mit unendlich vielen Freiheitsgraden ('Feldtheorie') ist naheliegend: Betrachten wir etwa ein System von N eindimensionalen, gekoppelten Federpendeln (also harmonische Oszillatoren...) mit Massen m , Federkonstanten k und Auslenkung aus der Ruhelage Φ_i. Seine Lagrangefunktion ist gegeben durch:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i \left[m\dot{\Phi}_i^{\,2} - k(\Phi_{i+1} - \Phi_i)^2 \right]$$

Der Abstand der Massen sei Δx (die Länge der ganzen Anordnung beträgt also $l = (n+1)\Delta x$).

Unser Ziel ist es offensichtlich dem Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ und $\Delta x \rightarrow 0$ eine vernünftige Bedeutung zu geben. Hiefür müssen sowohl an der Masse als auch an der Federkonstante Modifikationen vorgenommen werden: (i) wir fordern, daß die 'Massenliniendicht' $\mu = \frac{m}{\Delta x}$ im Limes konstant ist. Ebenfalls soll (ii) die Federkraft $Y = k\Delta x$ im Grenzübergang konstant sein.

Mit diesen Definitionen nimmt die Lagrangefunktion die folgende Gestalt an:

$$L = \frac{1}{2}\left[\sum_i \Delta x \cdot \mu\dot{\Phi}_i^{\,2} - \sum_i \Delta x \cdot Y \left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x} \right)^2 \right]$$

Nun ist der Grenzübergang jedoch erklärt: Die Summen werden sich in Integrale verwandeln, und der Differenzenquotient im Potentialterm wird zu einer Ableitung mutieren:

$$\lim L = \int_0^l \frac{1}{2}[\mu \dot{\Phi}_i^2 - Y(\partial_x \Phi)^2] dx$$

Der Integrand dieses Ausdrucks wird auch als Lagrangedichte $\mathcal{L}$ bezeichnet. Als Feldgleichungen gewinnt man ebenfalls die Euler-Lagrange Gleichungen, nur daß strenggenommem Funktionalableitungen gebildet werden müssen...:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi(x,t))} = \frac{\partial_\mu \mathcal{L}}{\partial \Phi(x,t)}$$

In unserem Beispiel folgt natürlich die Wellengleichung: $\Box\Phi = 0$. Ein anderes bekanntes Beispiel für eine billieare Lagrangedicht, die somit auf eine lineare Bewegungsgleichung führt ist die Folgende:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^2]$$

aus der man die Klein-Gordon Gleichung $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$ gewinnt. Das Argument des Feldes ist hier als Vierervektor gedacht, wie überhaupt durch 'Indizes anhängen' stillschweigend der mehrdimensionale Fall mitbehandelt wird. Die relativistische Notation ist nicht ohne Tiefsinn, denn falls die Lagrangedicht wie ein Lorentzskalar transformiert sind die Feldgleichungen automatisch kovariant. Dies ist für das Klein-Gordon Feld der Fall, welches ein freies, relativistisches, neutrales (reeller Fall) oder geladenes (komplexer Fall) Teilchen beschreibt.