2.6 Wie vermeide ich Fehler beim Aufleiten?

Die Umkehrung des Ableitens ist das Bilden einer Stammfunktion und wird deshalb auch „Aufleiten“ genannt. Aus den Ableitungen der Funktionen f mit $f(x) = x^r$ und $f(x) = e^x$ erhält man mit der Faktorregel unmittelbar eine Stammfunktion dieser Funktionen.
Damit kann man auch Summen solcher Funktionen aufleiten.
Bei Verkettung dieser Funktionen mit einer linearen Funktion g mit $g(x) = px + q$ als innerer Funktion erfolgt die Stammfunktionsbildung mit **linearer Substitution.**

Vorkenntnisse

- Die Funktion f besitzt die Funktion F als eine **Stammfunktion:**

$f(x) = 1$	$F(x) = x$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4$
$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ für $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$

- **Summenregel:** Eine Summe wird „summandenweise“ aufgeleitet.
- **Faktorregel:** Ein konstanter Faktor bleibt beim Aufleiten erhalten.

Beispiel 1: *(Stammfunktionen ohne lineare Substitution)*
Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f.
a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = 2x + x^2$
c) $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ d) $f(x) = 2x^3 - 6e^x$
e) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

Lösung:
a) $F(x) = \frac{1}{5}x^5$
b) $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 = x^2 + \frac{1}{3}x^3$
c) $F(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot x = x^3 - 3x^2 + 2x$
d) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 6e^x$
e) $F(x) = 4 \cdot \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{4}{x}$

Statt $\frac{1}{x^2}$ kann man auch x^{-2} schreiben. Dadurch fällt manchem das Aufleiten leichter.

Beispiel 2: *(Stammfunktionen mit linearer Substitution)*
Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f.
a) $f(x) = (2x - 3)^3$ b) $f(x) = e^{3x}$
c) $f(x) = 4e^{1-x} + 2e^{2-3x}$

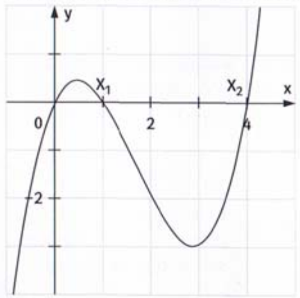
Lineare Substitution px + q

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist G mit $\mathbf{G(x) = \frac{1}{p}F(px + q)}$ eine Stammfunktion von g mit $\mathbf{g(x) = f(px + q)}$ für $p \neq 0$.

Lösung:
a) Mit $p = 2$ und $q = -3$ erhält man
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}(2x - 3)^4\right) = \frac{1}{8} \cdot (2x - 3)^4$.
b) Mit $p = 3$ und $q = 0$ erhält man $F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$.
c) $F(x) = 4 \cdot \frac{1}{-1} \cdot e^{1-x} + 2 \cdot \frac{1}{-3} \cdot e^{2-3x} = -4e^{1-x} - \frac{2}{3}e^{2-3x}$.

2.7 Wie berechne ich Inhalte von begrenzten Flächen?

Beispiel 1: *(Flächen ober- und unterhalb der x-Achse)*
Gegeben ist die Funktion f mit Graph K durch
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x; \quad x \in \mathbb{R}$.
a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.
b) Skizzieren Sie K.
c) K und die x-Achse bilden zwei Teilflächen. Berechnen Sie deren Inhalte.

Lösung:
a) Ausklammern von $\frac{1}{2}x$ liefert zunächst
$f(x) = \frac{1}{2}x \cdot (x^2 - 5x + 4)$.
Da aber die Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$ die Lösungen 1 und 4 besitzt, gilt sogar
$f(x) = \frac{1}{2}x \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$.
Also hat f die Nullstellen 0; 1 und 4.
b)


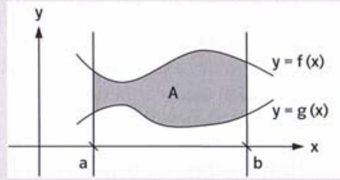
c) Die obere Teilfläche hat den Inhalt

$$A_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{6} + 1\right) - (0) = \frac{7}{24}.$$

Die untere Teilfläche hat den Inhalt

$$A_2 = \int_1^4 (0 - f(x))\,dx = \int_1^4 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - x^2\right]_1^4 = \left(-\frac{1}{8} \cdot 256 + \frac{5}{6} \cdot 64 - 16\right) - \left(-\frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 1 - 1\right) = \frac{135}{24}.$$

Das Verfahren

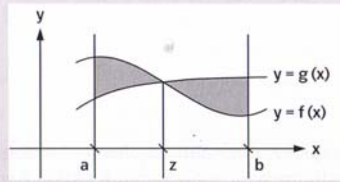


Wenn $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a;\ b]$ ist, so gilt

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = [F(x) - G(x)]_a^b = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)).$$

Dies gilt auch, wenn die x-Achse der Graph von f oder von g ist.

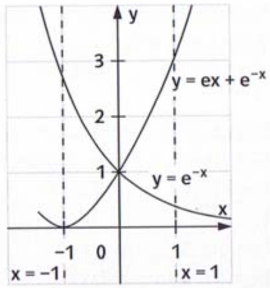
Wenn die Graphen sich im Intervall $[a;\ b]$ schneiden, gilt teilweise $f(x) \geq g(x)$ und teilweise $g(x) \geq f(x)$.



$$A = \int_a^z (f(x) - g(x))\,dx + \int_z^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Beispiel 2: *(Graphen schneiden sich)*
Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = ex + e^{-x}$ und $g(x) = e^{-x}$ sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

Lösung:
Berechnung der Schnittpunkte:
Die Gleichung $ex + e^{-x} = e^{-x}$ hat nur die Lösung 0.
Die Graphen schneiden sich nur in $S(0|1)$.
Flächenberechnung:
Für $-1 \leqq x \leqq 0$ ist $g(x) \geqq f(x)$; für $0 \leqq x \leqq 1$ ist $f(x) \geqq g(x)$. Damit ergibt sich (vgl. Fig.):



$$A = \int_{-1}^{0} (e^{-x} - (ex + e^{-x}))\,dx$$

$$+ \int_{0}^{1} (ex + e^{-x} - e^{-x})\,dx = \int_{-1}^{0} -ex\,dx + \int_{0}^{1} ex\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}ex^2\right]_{-1}^{0} + \left[\tfrac{1}{2}ex^2\right]_{0}^{1} = \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}e = e.$$