Wahrscheinlichkeitsrechnung: Grundlagen und Baumdiagramme

Ergebnis und Ergebnismenge

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet man sog. **Zufallsversuche** (Lottoziehung, Würfeln, Ergebnis einer Befragung, etc.pp.). Bei all diesen „Versuchen“ gibt es eine Menge Ω möglicher **Ergebnisse**:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

Zum Beispiel sind beim (einmaligen) Würfeln die Anzahl möglicher Ergebnisse $n = 6$ und die Ergebnismenge Ω lautet: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Jedes dieser Ergebnisse ω_i hat nun eine **Wahrscheinlichkeit** p_i ($i \in 1, \cdots, n$). Klar: Jede Wahrscheinlichkeit ist ≤ 1 und die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss sich genau zu 1 addieren (d.h. irgendein Ergebnis gibt es immer...).

Laplace-Versuch

Manchmal sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis natürlich $p_i = \frac{1}{n}$ (mit n der Anzahl verschiedener Ergebnisse). Man spricht dann von einem **Laplace-Versuch**. Ein Laplace-Versuch liegt z. Bsp. immer dann vor, wenn aus Symmetriegründen jeder Ausfall gleich wahrscheinlich ist. Beim Würfeln ist dies der Fall (zumindest wenn der Würfel ganz regelmäßig gearbeitet ist...). Eine bestimmte Augenzahl zu würfeln hat also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit

Jatzt haben wir schon viel von Wahrscheinlichkeit gesprochen, aber was soll man sich darunter vorstellen? Eine Möglichkeit bietet die „Häufigkeitsinterpretation“. Sie besagt: Wenn ich einen Zufallsversuch N-mal wiederhole, erhalte ich das Ergebnis ω_i ungefähr $N \cdot p_i$-mal. Also etwa: 1000mal würfeln ergibt $\approx 1000 \cdot \frac{1}{6} \approx 167$-mal die selbe Augenzahl. Je größer die Zahl der Wiederholungen N ist, desto genauer kommt das vorhergesagte Ergebnis heraus („Gesetz der großen Zahl“).

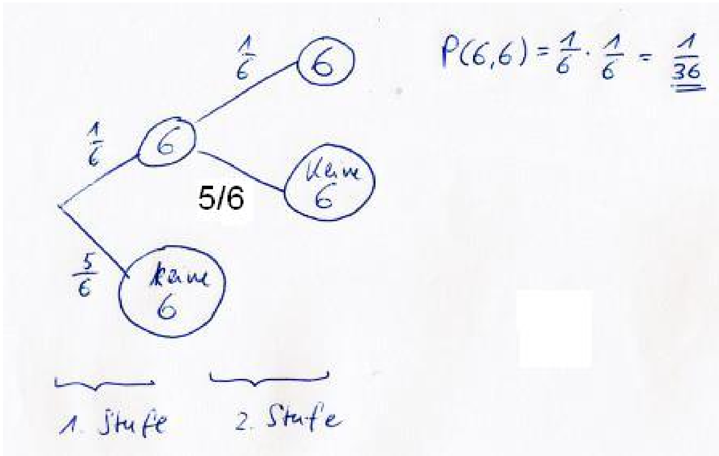
Ergebnis und Ereignis

Es macht Sinn, zwischen „Ergebnissen“ und „Ereignissen“ zu unterscheiden. Damit meint man folgendes: Manchmal interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das bei verschiedenen Einzel-Ergebnissen eintreten kann. Etwa die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln die Augenzahl ungerade ist. Das ist bei drei **Ergebnissen** (1, 3 und 5) der Fall, also: $p(\text{ungerade}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Mehrstufige Zufallsprozesse: Baumdiagramme

Der richtige Spaß beginnt erst dann, wenn man sich „mehrstufige“ Zufallsversuche anschaut, also etwa 2-mal hintereinander würfeln. Wie wahrscheinlich ist es etwa, dass man 2-mal hintereinander eine 6 würfelt? Eine Möglichkeit besteht darin, einfach die möglichen Ergebnisse des Versuches zu berechnen. Es gibt $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Ergebnisse. Zwei 6en kommen darin einmal vor, also $p(6, 6) = \frac{1}{36}$. Eine andere Art dies auszurechnen sind die sog. **Baumdiagramme** (mit zugehörigen Pfadregeln).

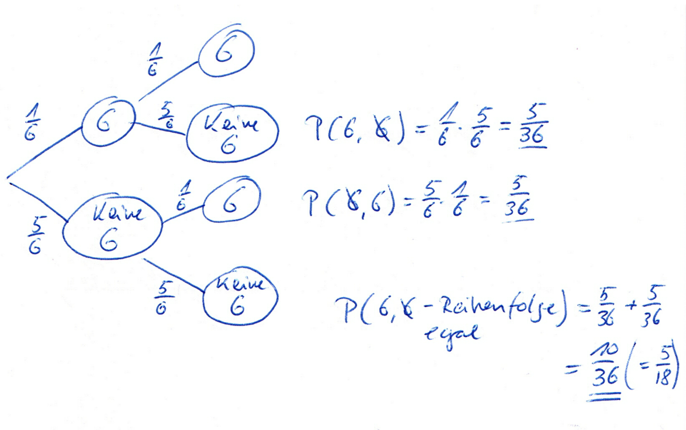
Ein Baumdiagramm ist ein verzweigtes Diagramm, bei dem jeder Stufe des Zufallsversuches eine „Ebene“ entspricht. Man zeichnet Blasen, die mit den jeweiligen Ergebnissen/Ereignissen gekennzeichnet sind und schreibt die Wahrscheinlichkeiten für ihr Eintreten an die Verbindungslinien (siehe Abbildung). Dieses Diagramm muss von links nach rechts gelesen werden. In unserem Bsp. werden zwei Ereignisse unterschieden: eine „6“ oder „keine 6“! An dieser Stelle lernen wir die:



1. Pfadregel (Multipliaktionsregel)
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses bei einem mehrstufigen Zufallsprozess ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades, der zu diesem Ergebnis führt!

Begründung: Diese Regel ist einsichtig, etwa wenn man an die Häufigkeitsinterpretation denkt: in $\frac{1}{6}$ der Fälle würfelt man beim ersten mal eine 6. In nochmal $\frac{1}{6}$ tritt dies dann nochmal ein. Zusammen also in einem sechtel von einem sechtel, also einem sechundreißigstel.

Wie sieht es aus, wenn man nach der Wahrscheinlichkeit fragt, bei zwei Würfen **genau** eine 6 zu erzielen? Dann müssen wir auch den anderen Zweig weiterverfolgen. Jetzt führen zwei Pfade zu dem gewünschten Ergebnis: zuerst eine 6 und dann keine oder umgekehrt. Nach Regel 1 hat jeder dieser Pfade die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$. Bei dem Ereignis „mindestens eine 6“ ist die Reihenfolge aber egal. Wir addieren deshalb beide Wahrscheinlichkeiten. Dies nennt man auch:



2. Pfadregel (Additionsregel)
Setzt sich ein Ereignis aus verschiedenen Pfaden eines Baumdiagramms zusammen, so erhält man seine Wahrscheinlichkeit durch Addition der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Also: längs eines Pfades werden die Teilwahrscheinlichkeiten multipliziert – wenn man sich für die entsprechende Pfadwahrscheinlichkeit interessiert. Diese Pfadwahrscheinlichkeiten können dann addiert werden, um die Wahrscheinlichkeit mehrerer Pfade zu erhalten.

Übungsaufgaben

Zeichne die Baumdiagramme und berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

a) Wahrscheinlichkeit, bei zweimal Würfeln **mindestens** eine 6 zu würfeln.

b) Wahrscheinlichkeit, sechsmal hintereinander keine 6 zu würfeln!

c) Wahrscheinlichkeit, bei 3 Münzwürfen **genau** einmal Zahl zu erzielen.

d) Wahrscheinlichkeit, bei 3 Münzwürfen **mindestens** 2-mal Zahl zu erzielen.