3.8 Wie untersuche ich die gegenseitige Lage von zwei Geraden?

Für zwei Geraden im Raum sind 4 Fälle möglich:
Sie sind echt parallel, sie sind identisch, sie schneiden sich oder sie sind windschief.
Im konkreten Fall kann man an den Richtungsvektoren erkennen, ob die Geraden parallel sind oder nicht. Eine weitere Untersuchung ist dann nach folgendem Schema möglich.

$g \parallel h$		$g \nparallel h$	
Ein Punkt auf g liegt nicht auf h	Ein Punkt auf g liegt auf h	Das LGS hat eine Lösung	Das LGS hat keine Lösung
g und h sind echt parallel (Bsp. 1a)	g und h sind identisch (Bsp. 1b)	g und h schneiden sich (Bsp. 2a)	g und h sind windschief (Bsp. 2b)

Sonderfall: g und h schneiden sich und sind orthogonal (Aufgabe 4).
Prüfung auf Orthogonalität: Skalarprodukt von Richtungsvektoren ist Null.

Beispiel 1:
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h mit

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Der Richtungsvektor von h ist das (−3)fache des Richtungsvektors von g.
Also sind g und h parallel. Für r = 0 ergibt sich der Punkt $P(4|-3|1)$ auf g. Setzt man die Koordinaten von P in die Gleichung für h ein, ergibt sich die Gleichung

$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$. Aus $4 = 2 + 6s$ folgt $s = \frac{1}{3}$.

Es ist aber $-3 \neq 1 + \frac{1}{3} \cdot (-3)$.
Also liegt P nicht auf h. Damit sind g und h echt parallel.

Man kann auch einen Punkt Q auf h wählen und in die Gleichung für g einsetzen.

b) Der Richtungsvektor von h ist das Doppelte des Richtungsvektors von g.
Also sind g und h parallel. Für r = 0 ergibt sich der Punkt $P(1|3|-1)$ auf g. Setzt man die Koordinaten von P in die Gleichung für h ein, ergibt sich die Gleichung

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$. Aus $1 = -1 + 2s$ folgt $s = 1$ und es gilt sowohl $3 = 7 - 4$

als auch $-1 = 5 - 6$. Also liegt P auf h. Damit sind g und h identisch.

Beispiel 2:
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h mit

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Der Richtungsvektor von h ist kein Vielfaches des Richtungsvektors von g. Also sind g und h nicht parallel. Der Vektorgleichung

$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ entspricht $\left\{\begin{array}{l} 9 + 3r = 7 + s \\ 2r = -2 + s \\ 6 + r = 2 + 2s \end{array}\right.$ bzw. $\left\{\begin{array}{l} 3r - s = -2 \\ 2r - s = -2 \\ r - 2s = -4 \end{array}\right.$.

Dieses LGS hat die einzige Lösung $r = 0$; $s = 2$. Also schneiden sich g und h.

Mit r = 0 oder s = 2 ergibt sich der Schnittpunkt $S(9|0|6)$.

b) Der Richtungsvektor von h ist kein Vielfaches des Richtungsvektors von g. Also sind g und h nicht parallel. Der Vektorgleichung

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ entspricht $\left\{\begin{array}{l} 2 + 2r = -s \\ 5 + 4r = 1 \\ 4 + 3r = 3 + 2s \end{array}\right.$ bzw. $\left\{\begin{array}{l} 2r + s = -2 \\ 4r = -4 \\ 3r - 2s = -1 \end{array}\right.$.

Dieses LGS hat keine Lösung. Also sind g und h windschief.