2.9 Wie löse ich eine Extremwertaufgabe?

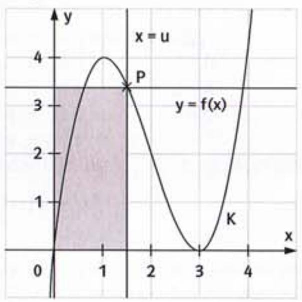
Bei Extremwertaufgaben werden meist die Hilfsmittel der Differenzialrechnung dazu benützt, um extremale Werte z. B. einer Streckenlänge, eines Flächeninhaltes oder auch eines Volumens zu bestimmen.

Beispiel 1: *(Extremwertaufgabe bei einer ganzrationalen Funktion)*
Eine Funktion f mit Graph K ist gegeben durch
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie K für $0 \leqq x \leqq 4$.
b) Durch den Punkt $P(u\,|\,f(u))$ auf K mit $0 < u < 3$ werden die Parallelen zu den Koordinatenachsen gezeichnet. Diese Parallelen bilden zusammen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck mit dem Inhalt A(u). Skizzieren Sie den Graphen der Funktion A.
c) Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt A(u) maximal wird und berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.

Lösung:

a)



b) Das beschriebene Rechteck hat die Seitenlängen u und f(u) und folglich den Flächeninhalt
$A(u) = u \cdot f(u) = u(u^3 - 6u^2 + 9u) = u^4 - 6u^3 + 9u^2 = u^2 \cdot (u - 3)^2$.
Damit erhält man den auf der folgenden Seite abgebildeten Graphen der Zielfunktion A.

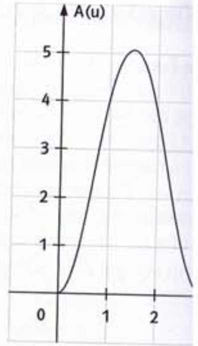
Vorgehensweise bei Extremwertaufgaben

1. **Aufstellen der Zielfunktion** z, deren Extremstellen oder Extremwerte bestimmt werden sollen. z(u) darf **nur die Variable u**, aber keinen weiteren von u abhängigen Term enthalten.

2. Mit z' und z'' werden die **Extremstellen u_E von z bestimmt**. Dabei geht man genau gleich vor wie beim Bestimmen der Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion f.

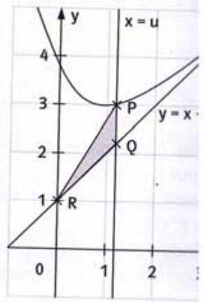
3. Da bei 2. **nur Extremstellen erfasst** werden, die im **Innern des Definitionsintervalls** von z liegen und an denen z differenzierbar ist, müssen die so nicht erfassten Stellen gesondert untersucht werden. **Randextrema** können meist dadurch ausgeschlossen werden, dass man das **Verhalten von z(u) am Rand des Definitonsintervalls** untersucht oder/und darauf hinweist, dass die Funktion z **im Definitionsintervall nur eine Extremstelle** besitzt.

c) Zur Bestimmung der relativen Extrema von A bildet man
$A'(u) = 4u^3 - 18u^2 + 18u = 2u(2u^2 - 9u + 9)$,
$A''(u) = 12u^2 - 36u + 18 = 6(2u^2 - 6u + 3)$.
Aus $A'(u) = 0$ folgt $u = 0$ oder
$2u^2 - 9u + 9 = 0$.
Damit ist $A'(u) = 0$ für $u \in \left\{0; \frac{3}{2}; 3\right\}$,
doch wegen $0 < u < 3$ gilt sogar $u = \frac{3}{2}$. Da nun
$A''\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3\right) = -9 < 0$ ist, hat A(u) an der Stelle $\frac{3}{2}$ ein relatives Maximum.
Weil aber $A(u) \to 0$ für $x \to 0$ und für $x \to 3$ gilt, ist dieses relative Maximum sogar das absolute Maximum.
Der maximale Flächeninhalt ist dann
$A\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 6\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{16} = 5{,}0625$.



Beispiel 2: *(Extremwertaufgabe bei einer Exponentialfunktion)*
Eine Funktion f mit Graph K ist gegeben durch
$f(x) = x + 1 + e^{1-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie K und seine Asymptote.
b) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > 0$ schneidet K im Punkt P und die Asymptote von K im Punkt Q. Bestimmen Sie u so, dass das Dreieck PQR mit $R(0\,|\,1)$ extremalen Inhalt besitzt.
c) Geben Sie die Art des Extremums und seinen Wert an.



Lösung:

a) Für $x \to +\infty$ strebt $e^{1-x} \to 0$, und folglich ist die Gerade mit der Gleichung $y = x + 1$ die schiefe Asymptote von K für $x \to +\infty$. Damit ergibt sich nebenstehende Skizze.
b) Das Dreieck PQR hat die Strecke $\overline{PQ}$ mit $P(u\,|\,f(u))$ und $Q(u\,|\,u+1)$ als Grundseite und das Lot von R auf die Gerade PQ als Höhe. Damit gilt für den Flächeninhalt A(u) des Dreiecks PQR:
$A(u) = \frac{1}{2}u \cdot (f(u) - (u + 1)) = \frac{1}{2}u \cdot ((u + 1 - e^{1-u}) - (u + 1)) = \frac{1}{2}u \cdot e^{1-u}$.
Mit Produkt- und Kettenregel erhält man daraus
$A'(u) = \frac{1}{2}(1 - u) \cdot e^{1-u}$ und $A''(u) = \frac{1}{2}(u - 2) \cdot e^{1-u}$.
Wegen $e^{1-u} > 0$ ergibt sich aus $A'(u) = 0$ sofort $1 - u = 0$ und damit $u = 1$.
Da $A''(1) = -\frac{1}{2} < 0$ gilt, hat A(u) an der Stelle 1 ein relatives Maximum.
c) Die Funktion A hat für $u > 0$ nur ein relatives Extremum, nämlich das Maximum bei 1. Damit muss dieses relative Maximum auch das absolute Maximum von A sein. Der maximale Flächeninhalt ist dann $A(1) = \frac{1}{2}$.