Die Exponentialfunktion

Ursprünglich nur für **natürliche Zahlen** definiert: $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{\text{n mal}}$, verallgemeinert man das Exponenzieren zuerst auf **negative Zahlen**: $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ und schließlich auch auf **Brüche**: $b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n}$. Damit kann man nun auch b^x für $x \in \mathbb{R}$ erklären! Jede **reelle Zahl** lässt sich schließlich durch Brüche beliebig genau annähern (etwa mit Hilfe einer Intervallschachtelung).

Eigenschaften

$f(x) = b^x$ mit $b > 0$

- Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertemenge $W = \mathbb{R}^+$
- $f(x) = b^x$ geht immer durch den Punkt $(0|1)$
- $f(x) = b^x$ ist streng monoton wachsend für $b > 1$.
- $f(x) = b^x$ ist streng monoton fallend für $b < 1$.

Die Exponentialfunktion hat viele Anwendungen, z. Bsp. in Natur- und der Sozialwissenschaften. Mit ihrer Hilfe können Wachstums bzw. Abnahmevorgänge beschrieben werden: Zinseszinsen, Bevölkerungs- und Pflanzenwachstum, radioaktiver Zerfall von Atomkernen usw.

Rechengesetzte und Regeln

Es gilt:

- $b^0 = 1$, sogar wenn $b = 0$
- $b^r \cdot b^s = b^{r+s}$ Bsp.: $4^{12} \cdot 4^3 = 4^{15}$ oder $4^{12} \cdot 4^{-2} = 4^{10}$
- daraus folgt auch: $\frac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ Bsp.: $7^2 \cdot 3^2 = 21^2$
- $(b^r)^s = b^{r \cdot s}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Achtung:

- $(b^r)^s \neq b^{(r^s)}$
- $3^4 \cdot 4^2 \neq (3 \cdot 4)^{4+2}$

Aufgaben zur Exponentialfunktion

Auf. 1 Zeichne den Graphen der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 3^x$!

Auf. 2 Berechne die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln im Kopf.

a) $\frac{10^{13} \cdot 10^7}{10^9}$ b) $\frac{3^9 \cdot 7^9}{21^8}$ c) $\frac{10^{-12} \cdot 10^{15}}{10^3}$

Auf. 3 Der Luftdruck p nimmt mit zunehmender Höhe (über dem Meeresspiegel) ab, und zwar nach der Formel $p(h) = p_0 \cdot (2,7)^{-0,13 \cdot h}$ (mit p Luftdruck in bar, h der Höhe in km und p_0=1,013 bar, dem durchschnittlichen Luftdruck auf Meeresspiegelniveau). Wie groß sind demnach die durchschnittlichen Luftdruckwerte an folgenden Orten?

a) Bodensee (Vorarlberg) 396m
b) Kilimandscharo (Tansania) 5895m
c) Mt. Everest (Nepal) 8848m

Auf. 4 Nährstoffreiche Substanzen und feuchte Wärme von 20^{o}C bis 37^{o}C stellen günstige Lebensbedingungen für Bakterien dar (z. B. Bakterien des Zahnbelags). Dabei vermehren sich diese durch Zweiteilung etwa nach τ=20min.

Berechne, wie viele solcher Lebewesen sich aus einer Bakterienzelle bei ungeänderten Umweltbedingungen innerhalb eines Tages bilden können.

Auf. 5 Deutschland hat (Stand 2008) ca. 82 Millionen Einwohner und ein Bevölkerungswachstum von 0,07%. Wie groß wird (bei ungeändertem Wachstum) die Bevölkerung im Jahre 2100 sein? Stelle eine allgemeine Funktionsgleichung auf, die die Bevölkerung als Funktion der Zeit ausdrückt!

Aufgaben zur Exponentialfunktion

Auf. 1 Zeichne den Graphen der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 3^x$!

Auf. 2 Berechne die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln im Kopf.

a) $\frac{10^{13} \cdot 10^7}{10^9}$ b) $\frac{3^9 \cdot 7^9}{21^8}$ c) $\frac{10^{-12} \cdot 10^{15}}{10^3}$

Auf. 3 Der Luftdruck p nimmt mit zunehmender Höhe (über dem Meeresspiegel) ab, und zwar nach der Formel $p(h) = p_0 \cdot (2,7)^{-0,13 \cdot h}$ (mit p Luftdruck in bar, h der Höhe in km und p_0=1,013 bar, dem durchschnittlichen Luftdruck auf Meeresspiegelniveau). Wie groß sind demnach die durchschnittlichen Luftdruckwerte an folgenden Orten?

a) Bodensee (Vorarlberg) 396m
b) Kilimandscharo (Tansania) 5895m
c) Mt. Everest (Nepal) 8848m

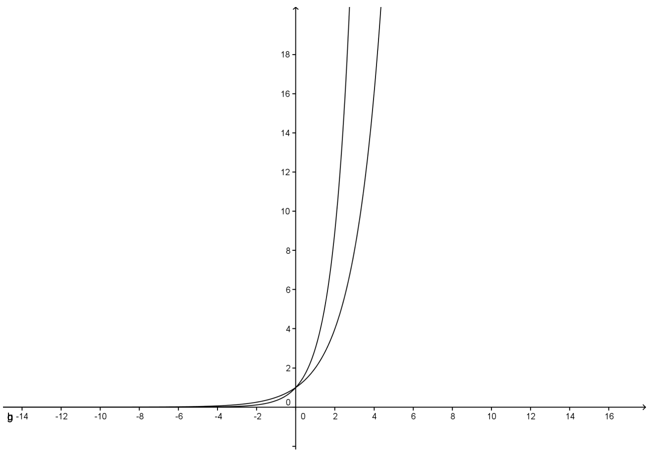
Auf. 4 Nährstoffreiche Substanzen und feuchte Wärme von 20^{o}C bis 37^{o}C stellen günstige Lebensbedingungen für Bakterien dar (z. B. Bakterien des Zahnbelags). Dabei vermehren sich diese durch Zweiteilung etwa nach τ=20min.

Berechne, wie viele solcher Lebewesen sich aus einer Bakterienzelle bei ungeänderten Umweltbedingungen innerhalb eines Tages bilden können.

Auf. 5 Deutschland hat (Stand 2008) ca. 82 Millionen Einwohner und ein Bevölkerungswachstum von 0,07%. Wie groß wird (bei ungeändertem Wachstum) die Bevölkerung im Jahre 2100 sein? Stelle eine allgemeine Funktionsgleichung auf, die die Bevölkerung als Funktion der Zeit ausdrückt!

Aufgaben zur Exponentialfunktion: Lösungen

Auf. 1 (Der Graph von 3^x ist natürlich steiler...)



Zu Auf. 2 Berechne die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Rechenregeln im Kopf.

a) $\frac{10^{13}\cdot 10^7}{10^9} = \frac{10^{13+7}}{10^9} = 10^{20-9} = 10^{11}$ b) $\frac{3^9\cdot 7^9}{21^8} = \frac{(3\cdot 7)^9}{21^8} = \frac{21^9}{21^8} = 21^{9-8} = 21$
c) $\frac{10^{-12}\cdot 10^{15}}{10^3} = \frac{10^{-12+15}}{10^3} = \frac{10^3}{10^3} = 1$

Zu Auf. 3 Einsetzen ergibt (Achtung, h muss in km angegeben werden!)

a) Bodensee (Vorarlberg) 396m: p=0,963 bar
b) Kilimandscharo (Tansania) 5895m: p=0,473 bar
c) Mt. Everest (Nepal) 8848m: p= 0,323 bar

Zu Auf. 4 Eine Verdoppelung entspricht einem Wachtumsfaktor von 2. Ein Tag hat 72 mal 20 min. Am Ende liegen also $N = 2^{72} = 4,7\cdot 10^{21}$ Bakterien vor! Die allgemeine Beziehung lautet: $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/\tau}$ (mit N_0 der Anfangszahl der Bakterien. Bei uns $N_0 = 1$.)

Zu Auf. 5 Ein Wachstum von p =0,07% entspricht einem Wachtumsfaktor von $1 + \frac{0,07}{100} = 1,0007$. In 92 Jahren beträgt die Bevölkerung $N_{92} = 82\cdot 1,0007^{92}$ Mill. $=87,45$ Mill. Die allgemeine Gleichung lautet: $N(x) = 82\cdot 1.0007^x$Mill. (mit x der Zeit in Jahren).

Rechengesetzte und Regeln

Es gilt:

- $b^0 = 1$, sogar wenn $b = 0$
- $b^r \cdot b^s = b^{r+s}$ Bsp.: $4^{12} \cdot 4^{-2} = 4^{10}$
- daraus folgt auch: $\frac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ Bsp.: $7^2 \cdot 3^2 = 21^2$
- $(b^r)^s = b^{r \cdot s}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Achtung:

- $(b^r)^s \neq b^{(r^s)}$
- $3^4 \cdot 4^2 \neq (3 \cdot 4)^{4+2}$