2.4 Wie untersuche ich den Graphen einer Expontentialfunktion?

Exponentialfunktionen und ihre Graphen werden auf dieselbe Weise untersucht wie ganzrationale Funktionen. Nur das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und für für $x \to -\infty$ bei einer Exponentialfunktion f wird durch andere Regeln beherrscht.

Wichtige Punkte:

Sie werden **wie** bei den **ganzrationalen Funktionen** ermittelt.

Beispiel 1: *(Verhalten für $x \to \pm\infty$)*
Untersuchen Sie die Funktion f bzw. ihren Graphen K auf das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = 2e^{1-x}$ b) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$
c) $f(x) = e^{-x} + 3$ d) $f(x) = e^x + 2x$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

Grundlage ist:

Für $\mathbf{x \to +\infty}$ strebt $\mathbf{e^x \to +\infty}$.
Für $\mathbf{x \to -\infty}$ strebt $\mathbf{e^x \to 0}$, d. h. die **x-Achse ist die Asymptote** des Graphen von f mit $f(x) = e^x$.

Darüber hinaus gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$:

Für $\mathbf{x \to +\infty}$ strebt $\mathbf{x^n \cdot e^x \to +\infty}$.
Für $\mathbf{x \to -\infty}$ strebt $\mathbf{x^n \cdot e^x \to 0}$, d. h. die **x-Achse ist die Asymptote** des Graphen von f mit $f(x) = x^n \cdot e^x$.

Lösung:

a) Es ist $f(x) = 2e^{1-x} = \frac{2e}{e^x}$ und somit gilt:
Für $x \to +\infty$ strebt $f(x) \to 0$,
d. h. die x-Achse ist waagrechte Asymptote von K für $x \to +\infty$.
Für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to +\infty$.

b) Für $x \to +\infty$ strebt $x^2 - 2x \to +\infty$ und $e^x \to +\infty$ und somit $f(x) \to +\infty$.
Für $x \to -\infty$ strebt $x^2e^x \to 0$ und $2xe^x \to 0$ und somit $f(x) \to 0$,
d. h. die x-Achse ist waagrechte Asymptote von K für $x \to -\infty$.

c) Für $x \to +\infty$ strebt $e^{-x} \to 0$ und somit $f(x) \to 3$, d. h. die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ ist waagrechte Asymptote von K für $x \to +\infty$.
Für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to +\infty$.

d) Für $x \to +\infty$ strebt $e^x \to +\infty$ und $2x \to +\infty$ und somit $f(x) \to +\infty$.
Für $x \to -\infty$ strebt $e^x \to 0$ und $2x \to -\infty$ und somit $f(x) \to -\infty$; da aber auch $f(x) - 2x \to 0$ strebt für $x \to -\infty$, ist die Gerade mit der Gleichung $y = 2x$ schiefe Asymptote von K für $x \to -\infty$.

Beispiel 2: *(Wichtige Punkte)*
Untersuchen Sie den Graphen K der Funktion f mit

$$f(x) = 2x \cdot e^{1-x}$$

auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte. Geben Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ und gegebenenfalls auch die Asymptoten von K an und zeichnen Sie dann K.

Lösung:

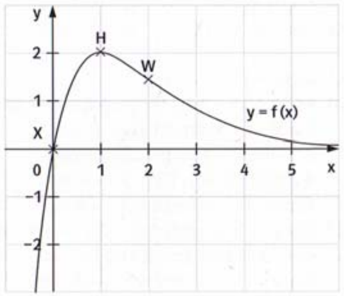
Neu erhaltene Ergebnisse **immer sofort** in eine Skizze eintragen.

Gemeinsame Punkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0$ ergibt $2x \cdot e^{1-x} = 0$ und somit $x = 0$ wegen $e^{1-x} > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
Der gemeinsame Punkt von K und der x-Achse ist $X(0|0)$.

Ableitungen: Man erhält
$f'(x) = 2(1 - x) \cdot e^{1-x}$; $f''(x) = 2(x - 2) \cdot e^{1-x}$; $f'''(x) = 2(3 - x) \cdot e^{1-x}$.

Extrempunkte:
$f'(x) = 0$ ergibt $2(1 - x) \cdot e^{1-x} = 0$ und dann $1 - x = 0$ wegen $e^{1-x} > 0$. Also ist $x = 1$. Da $f''(1) = 2(1 - 2) \cdot e^{1-1} = -2 < 0$ und $f(1) = 2$ ist, hat K den Hochpunkt $H(1|2)$.

Wendepunkte:
$f''(x) = 0$ ergibt $2(x - 2) \cdot e^{1-x} = 0$ und somit $x - 2 = 0$. Also ist $x = 2$. Da $f(2) = \frac{4}{e}$ und $f'''(2) = 2(3 - 1) \cdot e^{1-2} = 4e^{-1} \neq 0$ ist, hat K den Wendepunkt $W\left(2\middle|\frac{4}{e}\right)$.



Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Für $x \to +\infty$ strebt $f(x) \to 0$, d. h. die x-Achse ist waagrechte Asymptote von K für $x \to -\infty$.
Man erhält mit einer zusätzlichen Wertetabelle den nebenstehenden Graphen.