Über den sogenannten Gegenstand der Mathematik

Von

Walter Dubislaw (Berlin)

Die Frage nach den Objekten, von denen die Mathematik handelt, einmal angenommen, daß es derartige Objekte gibt, allgemeiner die Frage nach der besonderen Art des Wissenschaftscharakters der Mathematik ist eine sehr alte. Aber dessenungeachtet besteht keine Einigkeit über ihre zureichende Erledigung. Im Gegenteil, bis in die Gegenwart hin scheidet die Beantwortung dieser Frage die Forscher. Und der tiefe Gegensatz zwischen Formalismus und Intuitionismus, um nur diesen einen hier zu nennen, entspringt nicht zuletzt auch aus grundverschiedenen Überzeugungen von der Natur der mathematischen Disziplinen. Im folgenden soll versucht werden, hier zu einer Klärung zu gelangen.

Vier charakteristische einander ausschließende Thesen sind hinsichtlich des sogenannten Gegenstandes der Mathematik festzustellen: I. die Platon-Kantische These zuzüglich der intuitionistischen; II. die empirische These; III. die konventionalistische These und schließlich IV. die formalistische These wie deren Vorläuferin, die logizistische.

Die Platon-Kantische Auffassung von den charakteristischen Eigenschaften der mathematischen Disziplinen kann in Kürze dahin zusammengefaßt werden: In der Mathematik beschäftigt man sich im Unterschiede zu allen sogenannten Wirklichkeits- oder Realwissenschaften nicht mit Objekten, die der gewöhnlichen Beobachtung zugänglich sind. Man sucht vielmehr in ihr die Beschaffenheiten von bestimmten Wesenheiten oder Entitäten oder Ideen oder eine mit dem menschlichen Erkenntnisvermögen unlösbar verbunden gedachte Form vieler und wichtiger Vernunft Erkenntnisse zu erfassen. Dabei gilt diese Form als die allen gewöhnlichen Anschauungen eigentümliche. Den mathematischen Erkenntnissen wird des-

halb vorzugsweise meist ein, wie man sagt, ewiger oder zeitloser Geltungscharakter zugeschrieben, mit auf Grund der angeblichen oder tatsächlichen Einsicht, daß allein dasjenige nie veraltet, was sich nie und nirgend begeben hat. Und zwar ist der Kantischen Gestaltung dieser Grundauffassung zufolge¹⁾ die Mathematik hinzustellen als das System derjenigen synthetischen (nicht-tautologischen) Urteile a priori (Vernunft Erkenntnisse), in denen die Beschaffenheiten der obenerwähnten anschaulichen Form und ihrer Unterformen zutreffend erfaßt werden. Genauer: Der Mathematiker könne beim Aufbau seiner Disziplin von einem in allen Einzelheiten angebbaren System von Grundvoraussetzungen ausgehen, ohne befürchten zu müssen, daß er gegebenenfalls ein System von Irrtümern in seine Konsequenzen verfolge. Denn kraft eines besonderen jedem Vernunftwesen zu eigenem Erkenntnisvermögen sei er in der Lage, sein System von Grundvoraussetzungen mit unmittelbarer Gewißheit als ein System von Wahrheiten und von erfüllten Begriffen zu qualifizieren. Er könne, was die Begriffsbildung im besonderen anbelangt, aus den in den Grundvoraussetzungen enthaltenen Gebilden alle weiteren Begriffe durch Determination gleichsam schöpferisch erzeugen, da das erwähnte Erkenntnisvermögen ihm die Nicht-Leerheit seiner Begriffsbildungen jeweils zu erkennen gestatte vermöge einer eigenartigen angeblich mit unmittelbarer Gewißheit ausführbaren, nicht empirisch fundierten Konstruktion der unter die fraglichen Begriffe fallenden Gegenstände. Das Erkenntnisvermögen, das dies alles leistet, wird als „reine Anschauung“ oder auch als „die Erkenntnis der reinen Anschauung“ bezeichnet, wobei in diesem Zusammenhange oder unter einem sogenannten Vermögen nichts anderes verstanden wird, als die Zusammenfassung gewisser einschlägiger Tatsachen auf Grund der Erwartung, daß unter bestimmten Voraussetzungen ein bestimmtes psychisches Phänomen eintreten

¹⁾ Vgl. abgesehen von den einschlägigen Ausführungen Kants, die bedauerlicherweise vielen Auslegungen Platz geben, L. Nelson, Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit Abhandl. der Friesschen Schule, N. F., Bd. I, 1904/06; Derselbe, Kant und die Nicht-Euklidische Geometrie, 1906; Derselbe, Des fondements de la géométrie, in Die Reformation der Philosophie durch die Kritik der Vernunft, 1918, S. 87ff.; Ders., Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik, Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften, Jahrg. 1928; H. Scholz, Das Vermächtnis der Kantschen Lehre von Raum und von der Zeit, Kantstudien, Bd. 29, 1924; L. Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, Deutsche Ausgabe 1908, S. 247ff.

wird. Mit Hilfe dieses besonderen Erkenntnisvermögens „reine Anschauung“, wenngleich nicht isoliert von den sonstigen Betätigungsweisen unseres Erkenntnisvermögens, werde nun die anschauliche, von den jeweiligen Umständen und unserer Willkür unabhängige Form unserer Vernunftkenntnisse erkannt, soweit sie eine solche haben. Und zwar erkenne man mit unmittelbarer Gewißheit, daß diese Form zwei Unterformen besitze in Gestalt der Anschauungsform „Raum“, wohl auch in irritierendem Sprachgebrauch Raumvorstellung genannt, und der Anschauungsform „Zeit“, analog gelegentlich als Zeitvorstellung bezeichnet. Die Beschaffenheiten dieser beiden Unterformen nun werden in der Mathematik systematisch ergründet. Dabei gilt die Geometrie als die erfahrungsunabhängige Wissenschaft, von dem einen Raum im näher bezeichneten Sinne dieses Terminus. Und analog die zu einer Einheit zusammengefaßt gedachten nichtgeometrischen Disziplinen der Mathematik als die erfahrungsunabhängige Wissenschaft von der einen Zeit.¹⁾ Und beide zusammen ergäben die Mathematik, diese Königin unter den Wissenschaften.

Was weiterhin die Tatsache der Anwendbarkeit der Mathematik auf wirkliche Objekte betrifft, so findet dieser fundamentale Umstand Kant zufolge seine erschöpfende wie weittragende Aufhellung in nachstehenden Aussagen: Jede gewöhnliche, auch empirisch genannte Wahrnehmung oder Anschauung käme nur unter Mitwirkung, wenngleich keineswegs ausschließlicher Mitwirkung, des Erkenntnisvermögens „reine Anschauung“ zustande. Und zwar lieferte diese „reine Anschauung“ in Gestalt von Raum und Zeit diejenigen beiden Formen, die an und in jeder Anschauung als das nichterfahrungsmäßige Skelett oder besser als die nichterfahrungsmäßige Form derselben anzusprechen seien, so daß wir die verschiedenartigsten empirischen Anschauungen eben zu einer und derselben Erkenntnis der Objekte verbinden könnten. Dabei ist aber, um Mißverständnisse auszuschließen, hervorzuheben, daß Kants Ansicht nicht dahingeht, daß man sich diese Formen faktisch isoliert von Wahrnehmungen zum Bewußtsein bringen könne. Kant behauptet mit anderen Worten: Weil die Mathematik lediglich die in logischer Hinsicht erfahrungs-unabhängigen Formen jeglicher gewöhnlichen Wahrnehmung erforsche, ließen sich ihre Resultate auf das Verhalten der in Wahrnehmungen zu erfassenden Objekte anwenden. Und

¹⁾ Vgl. W. R. Hamilton, *Transactions of the Royal Irish Academy*, 1837, S. 293ff.

das seien alle wirklichen Objekte, denn jede Wahrnehmung als solche habe eine dieser Formen, und was seinen Beschaffenheiten nach nicht Gegenstand einer möglichen Wahrnehmung werden könne, das sei auch nicht wirklich, sondern bloß eine Chimäre.

Fassen wir zusammen: Nach Kantischer Lehre ist die Mathematik eine Gesamtheit von in Begründungszusammenhang stehenden wahren Urteilen. Und zwar sind diese Urteile synthetische Urteile im Unterschiede zu den zur formalen Logik gehörenden, die ein System von Tautologien (analytischen Urteilen) darstellen. Sie sind ferner Urteile a priori, das soll in diesem Zusammenhange heißen: Diese Urteile haben, mag auch ihre Erwerbung von Erfahrungen mit veranlaßt sein, keine Erfahrungen zu Gründen und sind durch Erfahrungen weder zu bestätigen noch zu widerlegen. Es sollen schließlich drittens solche synthetischen Urteile a priori sein, die (wenigstens was ihre nicht weiter auf andere Urteile reduzierbaren Grundurteile betrifft) vermittelt der Erkenntnis der reinen Anschauung mit unmittelbarer Gewißheit als wahre Urteile zu qualifizieren sind, als wahre Urteile, in denen die Beschaffenheiten der beiden nichtbegrifflichen Formen Raum und Zeit urteilsmäßig-begrifflich erfaßt werden¹⁾.

Zu dieser Kantischen Lehre, die in manchen Teilen auch schon von Platon²⁾ vertreten wurde, ist folgendes zu sagen: Die These, derzufolge ein vernünftiges Wesen kraft seiner Organisation über ein Erkenntnisvermögen „reine Anschauung“ verfügt, ist von Kant in keiner Weise ausreichend begründet. Denn die Tatsache, daß gewisse Wahrnehmungen, wie man so sagt, etwas Gemeinsames haben, läßt ganz anderweitige Erklärungen zu als die Kantische: Dieses Gemeinsame liege in erfahrungsunabhängigen nichtbegrifflichen Formen vor. Auch das gelegentlich zur Unterstützung ihrer Behauptungen von Kantianern beigebrachte sogenannte Approximationsargument ist nicht schlüssig. Es lautet: Wenn man ein wirkliches Objekt auf Grund bestimmter Eigenschaften etwa als eine Kugel hinstellt, so sei das hierin sich dokumentierende Verhalten

¹⁾ Diese ihre Eigenschaft soll Kant zufolge die Urteile der Mathematik von denjenigen unterscheiden, die, wie z. B. der Satz der Kausalität, zur Metaphysik in seinem Sinne gehören, d. h. zu dem System derjenigen synthetischen Urteile a priori, deren Gründe nicht durch die Erkenntnis der reinen Anschauung zu erfassen sind.

²⁾ Vgl. E. F. Apelt, *Metaphysik*, neu herausgegeben von R. Otto, 1910 (Ursprung 1857), S. 91ff.; H. Lotze, *Logik*, Ausgabe der Philosophischen Bibliothek, von G. Misch, 1912, S. 505ff.

nur dadurch zureichend zu erklären, daß man dieses Objekt mit einer durch reine Anschauung gegebenen Form vergleiche. Der diesem Argument zugrunde liegende Sachverhalt ist vielmehr durch eine radikal einfache naturwissenschaftliche Überlegung zu ersetzen, die zu ganz anderen Konsequenzen nötigt. Aber von diesen allgemeinen Bemerkungen abgesehen ist die hier zur Debatte stehende Kantische Position deshalb nicht haltbar, weil sie mit ausreichend gesicherten Resultaten der Mathematik wie der Naturwissenschaft in unhebbaren Konflikt gerät. Wenn es nämlich wahr wäre, daß die Axiome der Mathematik Wahrheiten darstellten — also vor allem auch, wie Kant behauptet, die Axiome der Euklidischen Geometrie die Grundwahrheiten von den Beschaffenheiten der Form „Raum“ repräsentieren — dann müßte die moderne Physik hinsichtlich der Relativitätstheorie gänzlich abwegig sein. Denn ist „der Raum“ ein Euklidischer, dann ist es also falsch, wie in der Relativitätstheorie gelehrt wird, daß er ein Nicht-Euklidischer ist. Und des weiteren sind dann auch diejenigen Aussagen der Relativitätstheorie hinsichtlich der Zeit und ihre Verkoppelung mit räumlichen Aussagen nichts als Irrtümer, die mit dem angeblich auf Grund einer Erkenntnis der reinen Anschauung gewonnenen einschlägigen Kantischen Behauptung unvereinbar sind. Dabei wollen wir aber hier nicht näher in eine Debatte dieser vielfach behandelten Einzelheiten eintreten und nur auf die betr. Untersuchungen von H. Reichenbach verweisen.¹⁾ Lediglich die Frage wird uns bei Gelegenheit der Behandlung des konventionalistischen Standpunktes beschäftigen, welche nicht logisch notwendigen Voraussetzungen zu machen sind, damit das sogenannte Raum-Zeitproblem ein naturwissenschaftlich entscheidbares wird.

So groß nun aber auch schon beim sogenannten Raum-Zeitproblem der Unterschied zwischen der Kantischen Position und der der modernen Physik hinsichtlich der einzelnen Behauptungen ist, er wird noch dadurch vertieft, und damit ein unüberbrückbarer, daß er sich zu einem solchen der Begründungsmethoden ausweitet. Kant behauptet nämlich, daß man in Gestalt des Gegenstandes der Mathematik, wie noch sonstiger unanschaulicher Prinzipien, um nur den Satz der Kausalität zu nennen, einen in logischer Hinsicht erfahrungsunabhängigen Besitzstand unserer Vernunft vor sich hat. In diesem Rahmen allein könne Naturwissenschaft realisiert werden.

¹⁾ Vgl. H. Reichenbach, *Philosophie d. Raum-Zeitlehre*, 1928; Ders., *Ziele und Wege der physikalischen Erkenntnis*, aus *Handbuch der Physik*, herausgegeben von H. Geiger u. K. Scheel, Bd. IV, 1929.

Das geschähe dergestalt, daß man erstens jenen allgemeinen, teils anschauungsartigen (Raum und Zeit), teils unanschaulichen (Grundsätze des reinen Verstandes; Kategorien) Besitzstand in Urteilen fixiere. Daß man zweitens diesen Urteilen die einzelnen Wahrnehmungsbehauptungen unterzuordnen habe, um schließlich drittens diese Wahrnehmungsbehauptungen in Gestalt von solchen Urteilen zusammenzufassen, in denen sogenannte besondere Naturgesetze wiedergegeben würden. Aber die in diesem allgemeinen Besitzstand enthaltenen Erkenntnisse, und darin liegt der unüberbrückbare Gegensatz zum Vorgehen der modernen Naturwissenschaft, könnten durch Erfahrungen weder bestätigt noch widerlegt, sondern lediglich vermittelt der berühmt-berüchtigten transzendentalen Methode als solche aufgezeigt werden; d. h. aufgezeigt werden als in logischer Hinsicht erfahrungsunabhängige und allerst Erfahrung ermöglichende Prinzipien.¹⁾ Dagegen ist das methodische Vorgehen der modernen Wissenschaft ein gänzlich anderes. Es ist grundsätzlich dieses²⁾: Ausgehend von einer mehr oder weniger umfangreichen Sammlung von Beobachtungen sucht man ein System von ansatzartig aufzustellenden Annahmen ausfindig zu machen, mit deren Hilfe man zunächst die bislang gemachten Beobachtungen formulieren kann. Sie bilden die ersten Bausteine zu einer einschlägigen Theorie, da man sie ja nur zum kleinsten Teil direkt durch Beobachtung bestätigen kann. Alsdann versucht man, die ansatzartig gemachten Annahmen mittelbar zu erhärten, oder, wie man meist sagt, zu verifizieren. Man geht dazu von den Formulierungen der durch Beobachtung gegebenen Sachverhalte aus und gelangt dann mit den Mitteln der ansatzartig gemachten Annahmen durch logisch-mathematische Umformungen zu Aussagen über das Verhalten der zu erforschenden Objekte. Und zwar zu solchen Aussagen, die ihrerseits einer Prüfung durch Beobachtungen fähig sind. Stellt sich dann heraus, daß in allen praktisch der Kontrolle zugänglichen Fällen die ansatzartig akzeptierten Annahmen zu zutreffenden Aussagen führen (sie werden in der Regel in Gestalt von Vorhersagen erscheinen), so wird man sie als gültige Theorie hinzunehmen haben. Und das wird man so lange zu tun haben, bis sich herausstellt, daß man mit Hilfe dieser Theorie bei sonst korrektem Vorgehen zu Aussagen gelangt, die, wie Beobach-

¹⁾ Vgl. W. Dubislaw, *Zur Methodenlehre des Kritizismus*, 1929.

²⁾ Vgl. W. Dubislaw, *Zur Philosophie der Mathematik u. Naturwissenschaft*, *Annalen d. Philosophie*, 1929; *Ders., Zur Wahrheitstheorie*, *Philosophie u. Sch.*, 1930.

tungen zeigen, nicht zutreffen. Mit anderen Worten: Der Naturforscher beruft sich nicht, in völligem Gegensatz zu Kant, auf eine „reine Anschauung“, und zeichnet nicht mit ihrer Hilfe eine bestimmte Geometrie im vorhinein aus, sondern er legt im Rahmen ansatzartig gemachter Annahmen seinen Forschungen diejenige Geometrie zugrunde, mit deren Hilfe er am besten Ort, Zeit und Art des Verhaltens der zu erforschenden Objekte ermitteln kann. Wenn diese Objekte sich am angegebenen Orte, zu der angegebenen Zeit, entsprechend den theoretisch ermittelten Aussagen verhalten, so erhärten sie die Brauchbarkeit der betr. Geometrie. Der Naturforscher ist also grundsätzlich bereit, irgendeine andere mathematische Disziplin für seine Untersuchungen zu verwenden, sofern ihm diese nur, in geeigneter Weise den zu erforschenden Gegenständen zugeordnet, ein genaueres Erfassen derselben gestattet. Sein Vorgehen besteht im fraglichen Falle also nicht in einer dogmatischen, durch ein angebliches besonderes Erkenntnisvermögen gestützten Berufung auf die Wahrheit der Euklidischen Geometrie, sondern in der Bereitschaft, jedes ansatzartig für seine Untersuchungen hingenommene Hilfsmittel, gegebenenfalls auf Grund von Beobachtungen zu korrigieren bzw. gänzlich fallen zu lassen. Angeblich apriorische Bestandstücke derartiger Theorien erweisen sich ihm vielmehr als Dogmatisierungen wie Trivialisierungen der einschlägigen landläufigen Ansichten bzw. der Naturwissenschaft vergangener Zeiten.

Die Kantische Lehre von der Mathematik als einem System von wahren synthetischen Urteilen a priori, in denen die Beschaffenheiten der beiden Formen „Raum“ und „Zeit“ logisch unabhängig von Erfahrungen erfaßt würden, ist mithin in dem Maße als widerlegt zu betrachten, wie man eine derartige Behauptung der Natur der Sache nach überhaupt widerlegen kann.

In engem Zusammenhange mit der behandelten Platon-Kantischen These von dem Wissenschaftscharakter der Mathematik steht die sogenannte intuitionistische, wie sie vorzugsweise von L. E. J. Brouwer¹⁾ verfochten wird. Zwar sind die besonderen Kantischen Lehren nicht von dem modernen Intuitionismus erneuert worden, der sich deshalb auch gelegentlich „Neo-Intuitionismus“ nennt, aber gemeinsam ist dem Neo- wie dem Alt-Intuitionismus die Behauptung

¹⁾ Was die zahlreiche einschlägige Literatur, insonderheit die Arbeiten L. E. J. Brouwers betrifft, sei auf A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., 1928, S. 220ff. verwiesen, wie auf das am Schluß des Fraenkelschen Buches befindliche überaus reichhaltige Literaturverzeichnis.

tung von der Existenz einer, wie Brouwer sagt, Urintuition, kraft derer man die Fundamente der Mathematik mit unmittelbarer Gewißheit erfasse. Dabei stützt sich aber Brouwer lediglich auf die von ihm sogenannte Urintuition der Zweierheit, von der ausgehend man durch ein immer zu erweiterndes System von Konstruktionen zunächst die Gesamtheit der natürlichen Zahlen und dann die übrigen Teile der Mathematik aufbauen könne, und zwar unabhängig von den jeweils zu der Formulierung der erwähnten Konstruktionen dienenden Darstellungsmitteln, der sogenannten mathematischen Sprache. In der weiteren Verfolgung dieser seiner Grundansicht von der Mathematik kommt dann Brouwer dazu, eine größere Anzahl von anscheinend gesicherten Teilen derselben zu verwerfen, weil man es in ihnen nur noch mit einer „Sprache“ zu tun habe, die nichts mehr bezeichne, da es ihr entsprechende Konstruktionen gar nicht gäbe. Insbesondere solle jede Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten dann lediglich zu nichts formulierenden Formulierungen gelangen, wenn man diesen Satz, legitim innerhalb der Sphäre der „Endlichkeitsmathematik“, skrupellos auf die „Mathematik der unendlichen Systeme“ ausdehne. Überhaupt sei die sogenannte Logik, in der ja der erwähnte Satz eine wichtige Rolle spiele, nichts als ein System von Regeln, abstrahiert aus der Mathematik der endlichen Mengen. Man könne mithin der Anwendung der Logik nur dort vertrauen, wo bis ins einzelne überschaubare Gebilde vorlägen. Wo das aber nicht der Fall sei, eben innerhalb der Mathematik der unendlichen Systeme, sei ihre Anwendung ein Wagnis, das erst seine Berechtigung aus vollziehbaren Konstruktionen gegebenenfalls empfangen. Insbesondere gäbe die sogenannte Widerspruchslosigkeit nie und nimmer ein Kriterium für mathematische Existenz ab. Mathematische Existenz sei vielmehr Konstruierbarkeit und nichts anderes.

Die Konsequenzen dieser Auffassung für das, was man zum gesicherten Bestand der Mathematik üblicherweise zählt, sind katastrophal. Weite Teile der Mathematik fallen als sinnlos in Fortfall, weil keine Konstruktionen wiedergebend. Außerdem müssen aber die übrigbleibenden Teile einer Umwandlung der sogenannten Beweise der Lehrsätze, wie einer Umwandlung hinsichtlich der Begriffsbildung (konstruktive Mengendefinition) unterworfen werden, da eben nur solche Begründungen bzw. Begriffsbildungen als zulässig gelten, die eine Kette vollziehbarer Konstruktionen wiedergeben. Mathematik ist für Brouwer, diesen mathematischen Aktivisten,

also zunächst kein System idealer Wahrheiten, wie manche seiner Verehrer unter den Phänomenologen das gelegentlich behaupten, sondern ein System von Konstruktionen, die ihren Ausgang von der Urintuition der Zweiheit hernehmen. Nur insofern kann man, gleichsam uneigentlich, die Mathematik als ein System von Wahrheiten auffassen, als man sich die erwähnten Konstruktionen zutreffend vermittelt wahrer Urteile urteilsmäßig-begrifflich fixiert denkt.

Bei einer Beurteilung der Brouwerschen Behauptungen steht folgende Frage im Mittelpunkt: Welche Begründungen vermag Brouwer für seine, wichtigste Teile der Mathematik als sinnlose Formulierungen hinstellenden Behauptungen beizubringen? Die Antwort lautet: Keine andere als die Berufung darauf, seine Lehre sei intuitiv einsichtig, wobei er noch überdies zuzugeben nicht umhin kann, daß man bei Benutzung der üblichen Begründungsverfahren zu keinen Widersprüchen gelangt. Diese von ihm behauptete Einsichtigkeit wird aber mit Entschiedenheit bestritten, und es steht hier einfach Behauptung gegen Behauptung, nur daß Brouwer sich nicht, wenigstens wie die Dinge heute liegen, auf den Erfolg seiner Lehren berufen kann. Dabei soll aber nicht geleugnet, sondern vielmehr ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die teilweise als mystisch anzusprechenden Brouwerschen Behauptungen mit wertvollen und tiefen Bemerkungen verbunden auftreten. Nur daß diese Bemerkungen u. E. erst in einem ganz andern Zusammenhange restlos fruchtbar gemacht werden können. Hinzukommt ferner, und das bildet wohl den auffälligsten Mangel der Brouwerschen Überlegungen zu der von ihm erstrebten Neugestaltung und Neuorientierung der Mathematik, daß er nicht in der Lage ist, die von jeder „Sprache“ angeblich unabhängigen Konstruktionen näher zu charakterisieren, aus denen ihm zufolge die Mathematik bestehen soll, ein empfindlicher Mangel, den auch A. Fraenkel gelegentlich hervorhebt.

Alles in allem gilt also von der Brouwerschen Position folgendes: Unbeschadet zahlreicher und tiefer Anregungen, die man aus seinen Ausführungen zu entnehmen hat, ist seine Position als nicht ausreichend begründet zu betrachten. Sie ist überdies, das muß in völligem Gegensatz zu Brouwer festgestellt werden, durchaus nicht einsichtig, vielmehr mystischen Charakters, wenigstens in den Augen der erdrückenden Mehrzahl derjenigen Forscher, die sich mit diesen Fragen eingehend beschäftigen. Sie ist also abzulehnen.

Wir kommen zur Behandlung der empiristischen Grundansicht hinsichtlich des Gegenstandes der Mathematik. Ihr zufolge ist der Mensch, ausgehend von dem reichen Schatz der von ihm im Laufe der Zeit gesammelten Erfahrungen, allmählich dahin gekommen, an sich verschiedene Gebilde, die in mancher Hinsicht ein gleichartiges Verhalten zeigen, in sogenannten abstrakten Vorstellungen zu erfassen; dabei werden diese abstrakten Vorstellungen gemeinhin als die den erwähnten Gebilden gemeinsamen Eigenschaften hingestellt. Sie gelten deshalb als abstrakt, weil man durch Absehen von gewissen Eigenschaften, die die zu beobachtenden Objekte aufweisen, zu ihrer Konzipierung gelangt sei. So sei etwa die Zahl „2“ als diejenige abstrakte Vorstellung zu charakterisieren, die man durch Abstraktion aus der Betrachtung von Paaren von Objekten gewonnen habe, und in der die und nur die Eigenschaften von Paaren von Objekten vereinigt zu denken seien, die man bei jedem einzelnen Paare antreffe. Gegenstand der Mathematik seien nun zunächst die abstraktesten unter den soeben näher charakterisierten abstrakten Vorstellungen. Mithin sei auch die Mathematik in dem Sinne eine Naturwissenschaft, als ihre unmittelbaren Objekte, die genannten abstrakten Vorstellungen, mit Hilfe der sogenannten inneren Erfahrung als wirkliche Gebilde aufzeigbar seien. Aber die Mathematik erfasse nicht nur die Eigenschaften der abstraktesten Vorstellungen, sondern, da diese Vorstellungen durch Generalisation bzw. Abstraktion aus der gewöhnlichen Beobachtung entstanden zu denken seien, auch die allgemeinsten Eigenschaften der wirklichen Objekte selbst. Sie sei also in dieser Hinsicht eine Naturwissenschaft im engeren Sinne, und zwar diejenige Naturwissenschaft, die die allgemeinsten Beschaffenheiten der Objekte zu erforschen suche. Die Axiome der Mathematik, soweit sie nicht Definitionen sind, begleitet von der Behauptung, daß es auch der gewählten Formulierung entsprechende Objekte gibt, stellen deshalb dieser Auffassung zufolge „Experimentelle Wahrheiten“ oder „Generalisationen aus der Beobachtung“ oder „Hypothesen“ dar, wie das hauptsächlich J. St. Mill¹⁾ und J. Herschel versucht haben nachzuweisen.

Daß in der empiristischen Auffassung von der Eigenart der mathematischen Disziplinen viele wichtige Erkenntnisse jedenfalls angedeutet sind, kann wohl kaum bestritten werden. Und lediglich

¹⁾ Vgl. J. St. Mill, System der deduktiven und induktiven Logik, Deutsche Ausgabe von J. Schiel, 2. Aufl., Bd. I, 1862, S. 277.

der verhängnisvollen Auswirkung eines übersteigerten Apriorismus ist es zuzuschreiben, daß die empiristische Auffassung etwa in Form derjenigen Ausgestaltung derselben, die man J. St. Mill verdankt, und die beispielsweise auch J. v. Liebig und mit ihm viele andere Klassiker der exakten Wissenschaften vertreten haben, allgemeiner Geringschätzung begegnen.

Was ist denn nun, das ist unsere Frage, an dieser Auffassung abzulehnen, und was zu akzeptieren? Abzulehnen ist zunächst die bei dieser Theorie mitbenutzte, ein wenig primitive Abstraktionstheorie. Eine Abstraktion kommt nämlich nicht einfach vermitteltst eines Absehens im Sinne eines Nichtberücksichtigens von Eigenschaften zustande, da ja Eigenschaften selbst erst durch einen Abstraktionsprozeß zu unserer Kenntnis gelangen. Eine Abstraktion besteht vielmehr, wie man auf Grund einschlägiger Untersuchungen Bolzanos zeigen kann, in einer Ersetzung ursprünglich konstanter Teile des betreffenden Objektes durch Variable, deren Wertbereiche jeweils in einer hier nicht näher zu charakterisierenden Weise passend gewählt werden. Soweit also die empiristische Auffassung von ihrer Abstraktionstheorie abhängt, bedarf sie einer mehr oder weniger weitgehenden Umwandlung nach Maßgabe einer geeigneten Vertiefung dieser ihrer Abstraktionstheorie.

Ferner operiert diese Auffassung in gewisser Hinsicht skrupellos mit sogenannten psychischen Gebilden wie Vorstellungen. Es fragt sich aber angesichts der im Gange befindlichen naturwissenschaftlichen Fundamentierung der Psychologie, wie sie etwa von seiten des Behaviorismus angestrebt wird, ob man mit derartigen Gebilden wissenschaftlich legitim operieren kann, und ob man es bei ihnen nicht etwa mit letzten Resten einer teilweise mythenartigen Betrachtungsweise zu tun hat, einer Betrachtungsweise, die zu überwinden ja mit einer Hauptabsicht des Empirismus aller Arten bildet.

Schließlich ist noch ein letzter Einwand hervorzuheben. Wenn, wie der Empirismus lehrt, die Mathematik die sicherste, bestbewährteste Naturwissenschaft ist, wie steht es mit dem Charakter der in ihr auch dieser Auffassung zufolge enthaltenen sogenannten Abfolgewahrheiten? Genauer, wie steht es mit der auch von J. St. Mill gelegentlich zugestandenen Notwendigkeit der Lehrsätze der Mathematik im Hinblick auf die Axiome derselben, die dieser Auffassung gemäß, wie wir sahen, Generalisationen aus der Beobachtung sind, und aus denen nun jene Lehrsätze abfolgen sollen ohne weitere

Berufung auf Erfahrungen. In der vorliegenden Ausgestaltung des Empirismus ist da nur ein Bruch mit seinen empiristischen Prinzipien festzustellen. Die Axiome gelten als Hypothesen, soweit sie nicht als Definitionen betrachtet werden, die in Verbindung mit einer Existenzaussage über Objekte auftreten, welche den Definitionen entsprechen. Die Folgerungen aber aus den Axiomen, besser die zwischen den Axiomen und den aus ihnen erschlossenen Lehrsätzen obwaltende Beziehung aber wird, wenigstens ihrem Begriffe nach, als durch Erfahrungen nicht mehr modifizierbar erachtet. Dieser Empirismus ist also gleichsam stillschweigend durchsetzt mit einer aprioristischen These hinsichtlich der Folgebeziehung, deren restlose Ausmerzung nicht zu gelingen scheint.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß auch diese empiristische Grundansicht von dem Wissenschaftscharakter der Mathematik keine voll befriedigende ist.

Waren schon bei der empiristischen Grundauffassung von dem sogenannten Wesen der Mathematik bemerkenswerte, lediglich mit unnachsichtlicher Konsequenz zu vertiefende Lehren festzustellen, so gilt erfreulicherweise das gleiche hinsichtlich des nun zu behandelnden Konventionalismus. Dieser Konventionalismus in Sachen der Mathematik, so wie er etwa von H. Poincaré¹⁾ in einem gewissen Umfange vertreten worden ist, entnimmt von dem Empirismus die angebliche oder tatsächliche Einsicht, daß in den Axiomen der Mathematik Definitionen mit enthalten sind. Nun glaubt er, über den Empirismus hinausgehend zeigen zu können, daß die Axiome der Mathematik sämtlich Definitionen darstellen, und zwar in einem ganz bestimmten Sinne. Sie besitzen nämlich keinerlei Wahrheitscharakter und repräsentieren lediglich Systeme von Forderungen, die zwar ursprünglich sicherlich aus praktisch-ökonomischen Anlässen heraus aufgestellt sein mögen, die nun aber ganz unabhängig von diesem Ursprung in der reinen Mathematik in ihre Konsequenzen verfolgt werden. Zur näheren Begründung dieser Auffassung, die leider niemals geschlossen niedergelegt worden ist, dienen in der Hauptsache nachstehende Überlegungen:

Ein Gegenstand der Mathematik ist nicht aufweisbar. Denn weder ist der Empirismus vorzugsweise wegen seiner abwegigen Abstraktionstheorie zu akzeptieren, noch auch der Apriorismus mit

¹⁾ Vgl. H. Poincaré, *Wissenschaft und Hypothese*, Deutsche Ausgabe, 2. Aufl. 1906; Ders., *Der Wert der Wissenschaft*, Deutsche Ausgabe, 2. Aufl. 1910; Ders., *Wissenschaft und Methode*, Deutsche Ausgabe, 1914; Ders., *Dernières pensées*, 1913.

seinem Mythos von den idealen Gegenständen, so wie er in stärkster Fassung etwa bei Bolzano und gelegentlich auch bei Lotze und E. Husserl anzutreffen ist. Andererseits seien uns nun aber auch die Grundsätze der Mathematik nicht durch die Logik auferlegt, denn der Mathematiker besitze in dem Verfahren der sogenannten vollständigen Induktion ein Begründungsverfahren, das gegenüber den bloß tautologischen Umformungen der Logik einen ausgesprochen nichttautologisch, d. h. synthetischen Charakter besitze. Mit anderen Worten: Die Mathematik sei weder eine Naturwissenschaft, noch sei sie mit der Logik zu identifizieren. Sie bilde mithin nichts anderes als ein grandioses System von widerspruchswidrigen Forderungen, in seine nie abschließbar zu denkenden Konsequenzen verfolgt. Daß das im wesentlichen zutrifft, wird insonderheit nachzuweisen versucht mit Hilfe einer näheren Untersuchung desjenigen Tatbestandes, der unter dem Namen der Relativität der Geometrie bekannt ist, und der nach der mathematischen Seite hin vorzugsweise seinen Grund in der Abbildbarkeit mancher geometrischer Systeme auf andere findet. Man kann nämlich, und das hat insbesondere H. Poincaré¹⁾ mit großer Sorgfalt getan, zeigen, auf die näheren Überlegungen haben wir hier nicht einzugehen, daß der empirische Befund uns nicht eindeutig eine diesen Befund eindeutig charakterisierende Geometrie vorschreibt, wenn wir nicht zuvor irgendwelche Fortsetzungen treffen oder Voraussetzungen über die in der Natur obwaltende Gesetzlichkeit machen oder bereits Aussagen über eine solche Gesetzlichkeit begründet haben. Und er hat dann aus dieser Tatsache den Schluß gezogen, daß es mithin nur eine Frage der Ökonomie sei, welche unter den vielen geometrischen Disziplinen man zur Beschreibung der Wirklichkeit verwenden wolle. D. h. gerade die Geometrie, eben auf Grund der genannten Relativität derselben, zeige mit aller Deutlichkeit, entgegen der landläufigen Ansicht, daß man es in der Mathematik nicht mit einem System von Wahrheiten, sondern lediglich mit einem System von logisch willkürlichen Forderungen zu tun habe.

Aber auch diese konventionalistische Grundansicht kann nicht als eine befriedigende Antwort auf die Frage nach dem Wissenschaftscharakter der Mathematik betrachtet werden. Denn was sollen das für Forderungen bzw. Vereinbarungen sein, die die Axiome der Mathematik darstellen? Forderungen sind doch immer Forderungen

¹⁾ Vgl. H. Poincaré, *Wissenschaft und Methode*, Deutsche Ausgabe, 1914, S. 80ff.

von etwas, und Vereinbarungen sind ebenfalls immer Vereinbarungen über etwas. Der Konventionalist aber bleibt die Antwort auf die Frage schuldig, von welchen Objekten handeln die logisch willkürlichen, wenngleich widerspruchslosen Forderungen der Mathematik bzw. über welche Gebilde treffen die Axiome der Mathematik widerspruchslose Vereinbarungen? Denn er lehrt weder, daß die Axiome der Mathematik als Forderungen über die Verwendung von Zeichen anzusprechen sind, noch gibt er anderweitige Objekte an, von denen sie handeln sollen, denn das könnte ersichtlich nicht vermittelt reiner Konventionen geschehen. Es ist zwar richtig — und das bildet eine wichtige Einsicht, die man insbesondere dem Konventionalismus verdankt —, daß man ein Axiomensystem der Mathematik auffassen kann als ein System von Forderungen; man denkt sich dann durch die betr. Axiome solche und nur solche Objekte näher charakterisiert, welche die in den Axiomen niedergelegten Beschaffenheiten besitzen, wobei es aber völlig dahingestellt bleibt, ob es auch derartige Objekte gibt. Betrachtet man ein Axiomensystem in dieser Weise, dann nennt man es auch in einem auf J. D. Gergonne zurückgehenden irritierenden Sprachgebrauch eine „implizite Definition“ der in ihm auftretenden Zeichen für die erwähnten Objekte. Man hat übrigens in der neueren mathematischen Logik zeigen können, daß eine solche Auffassung eines Axiomensystems darauf hinausläuft, ein Axiomensystem anzusehen als ein System von Satzfunktionen, deren Variable die Stelle der erwähnten Zeichen einnehmen. So wichtig nun aber auch diese insbesondere durch den Konventionalismus bekannt gewordene Auffassung von einem Axiomensystem als einem System von Satzfunktionen ist, die Grundposition des Konventionalismus wird dadurch nicht gestützt.

Ferner hat der Konventionalismus immer mit Entschiedenheit betont, übrigens genau so wie der Empirismus, daß zwischen den Axiomen auf der einen und den aus ihnen ableitbaren Lehrsätzen auf der anderen Seite ein notwendiger Zusammenhang besteht. Er hat es aber entsprechend seiner konventionalistischen Grundansicht nicht dazu gebracht, die eigentliche Natur dieses Zusammenhanges aufzuklären. Er hat vielmehr seine konventionalistische Einstellung nur im Hinblick auf die Axiome der Mathematik aufrechterhalten können und sie hinsichtlich des zwischen den Axiomen und den Lehrsätzen obwaltenden Zusammenhanges preisgegeben, damit einen Bruch mit seinen konventionalistischen, vielfach empiristisch durch-

setzten Grundansichten vollziehend. Mithin kann also auch der Konventionalismus unsere Frage nach der besonderen Beschaffenheit des Wissenschaftscharakters der Mathematik nicht allseitig befriedigend aufhellen, so sehr man ihm wertvolle Einsichten in dieser Hinsicht auch verdankt.

Wir kommen nun zur vierten und letzten Grundansicht, zur sogenannten formalistischen, die, radikal in ihre Konsequenzen verfolgt, eine befriedigende Antwort auf unsere Frage u. E. zu geben gestattet. Der Formalismus¹⁾ behauptet kurz dieses: Reine Logik wie reine Mathematik sind im eigentlichen Sinne des Wortes überhaupt keine Wissenschaften, die aus Behauptungen bestehen, zwischen denen ein Begründungszusammenhang obwaltet. Reine Logik wie reine Mathematik stellen vielmehr Kalküle dar, in denen es sich darum handelt, aus bestimmten, an sich willkürlichen Ausgangsformeln nach bestimmten an sich willkürlichen Operationsvorschriften andere und andere Formeln herzuleiten. Kraß gesprochen: Die reine Logik wie die reine Mathematik sind für sich genommen gleichsam Formelspiele und nichts weiter. Aber diese Kalküle haben einen unermeßlichen Wert für den Menschen. Denn sie setzen ihn in einer gleich näher auszuführenden Weise instand, sich die Objekte seiner Umwelt dienstbar zu machen, indem er ihr Verhalten mit Hilfe dieser Kalküle wenigstens im Durchschnitt zu berechnen in der Lage ist. Verwendet man nun die genannten Kalküle in dieser Weise, über das Wie derselben wird gleich näher zu sprechen sein, dann muß man diese Kalküle vermittelt geeigneter Deutungsvorschriften mit denjenigen Gebilden in Beziehung bringen, die man mit ihrer Hilfe durch Berechnung in einer gewissen Weise sich dienstbar zu machen sucht. Derartige, mit geeigneten Deutungsvorschriften behaftete Kalküle sind aber nichts anderes als die sogenannten naturwissenschaftlichen Theorien. Dabei handelt es sich bei dem Logikkalkül in der Regel um eine Kopplung der Logikformeln und der Operationsvorschriften, mit dem Verhalten, das

¹⁾ Der ältere Logizismus, wie ihn B. Russell gelegentlich vertreten hat, läuft im wesentlichen auf die Behauptung hinaus, daß die Mathematik restlos in die Logik überführbar sei und letztere ein System von analytischen Wahrheiten darstelle. Der neuere Logizismus, eine ausführliche Auseinandersetzung mit ihm bleibe einer späteren Abhandlung vorbehalten, behauptet mit L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, dieses: Logik und Mathematik bilden ein System von Tautologien, d. h. von wahren und apriorischen Aussagen, die nichts über das „was der Fall ist“, aussagen, die also keine Bilder der Wirklichkeit sind, sondern vielmehr bedingungslos wahre Aussagen.

wir an den Tag legen, wenn wir im landläufigen Sinne des Wortes aus Behauptungen andere und andere Behauptungen beweisen, kurz ein begründendes Verhalten zeigen. Im Unterschiede dazu gibt der um einige Ausgangsformeln bereicherte Logikkalkül, man hat es dann mit dem Mathematikalkül zu tun, diejenigen Formalismen ab, die mit geeigneten Deutungsvorschriften behaftet, als naturwissenschaftliche Theorienbildungen auftreten. Das haben wir nun im folgenden im einzelnen näher zu entwickeln, wobei sich, nebenbei bemerkt, in mancher Hinsicht ergeben wird, daß man nur Empirismus und Konventionalismus von hebbaren Mängeln zu befreien, zu vertiefen und dann in ihre letzten Konsequenzen ohne Rücksicht auf entgegenstehende jahrtausendjährige Tradition zu verfolgen hat.

Wie so oft bildet auch hier ein die Entwicklung der zu schildern den Auffassung geeignet abkürzendes Verfahren einen besonders bequemen Zugang zu ihrem Verständnis. Der Formalismus ist aus der Axiomatik heraus entstanden; er hat sich entwickelt aus den Bestrebungen der Mathematiker, über die Grundvoraussetzungen ihrer Disziplin letzte Aufschlüsse zu erlangen, und zwar insbesondere aus ihren Begründungen heraus die Widerspruchslosigkeit derartiger Disziplinen zu erhärten. Dabei betrachtete man ursprünglich die Mathematik als ein System von Wahrheiten, das in zwei Klassen von solchen zerfiel: In die Klasse der auf andere nicht mehr reduzierbaren Wahrheiten, Grundwahrheiten oder Grundsätze oder Axiome genannt, und die Klasse aller anderen einschlägigen Wahrheiten, die als Folgewahrheiten oder als Lehrsätze bezeichnet werden. Wie kann man nun überhaupt — das bildete die wichtigste Frage — die Widerspruchslosigkeit einer vorgelegten mathematischen Disziplin gegebenenfalls ermitteln, ohne sich lediglich auf eine angeblich unmittelbare Erkenntnis zu beziehen, d. h., wie kann man im einzelnen ermitteln, daß man, ausgehend von den Axiomen einer mathematischen Disziplin, bei ausschließlicher Benutzung der als einwandfrei betrachteten Begründungsverfahren niemals zu einem Paar einander widersprechender Sätze gelangt? Diese Frage, die zuerst bei Gelegenheit der Untersuchungen über die Grundlagen der Nicht-Euklidischen Geometrien auftauchte, führte zu folgenden Ergebnissen.

Es gelang, die Widerspruchslosigkeit dieser Geometrien dadurch sicherzustellen, daß man Euklidische Modelle derselben fand. Man zeigte nämlich, daß es zu den fraglichen Geometrien innerhalb der Euklidischen Geometrie Teilsysteme gibt derart, daß man die so-

genannten primitiven Begriffe wie die zwischen ihnen durch die Axiome gestifteten Beziehungen einer Nicht-Euklidischen Geometrie Gebilden der Euklidischen umkehrbar eindeutig zuordnen kann. Und zwar derart zuordnen kann, daß, wenn Gegenstände der betreffenden Nicht-Euklidischen Geometrie durch eine Beziehung R verknüpft sind, die ihnen vermöge der Zuordnung entsprechenden Gebilde gerade in derjenigen Beziehung stehen, die der Beziehung R durch die Zuordnung zugeordnet ist. Würde nun ein Paar einander widersprechender Sätze in der betreffenden Nicht-Euklidischen Geometrie vorhanden sein, dann müßten sich auch die ihnen vermöge der betreffenden Zuordnung entsprechenden Sätze der Euklidischen widersprechen. Damit ist dann also die Widerspruchslosigkeit der betreffenden Nicht-Euklidischen Geometrien auf die der Euklidischen reduziert. Wie aber steht es mit deren Widerspruchslosigkeit? Man kann sie erweisen, wenn man annimmt, die Arithmetik sei eine widerspruchslose Disziplin. Aber ist nun die Arithmetik in der Tat frei von Widersprüchen? Mit anderen Worten und allgemeiner: Es gibt zwar Beweise der Widerspruchslosigkeit von Sätzen, wenn man voraussetzt, daß gewisse andere Systeme von Sätzen widerspruchslos sind; aber gibt es bündige Begründungen (eine solche braucht nicht restlos eine schließende Begründung zu sein) der Widerspruchslosigkeit von Axiomensystemen schlechthin und nicht bloß solche relativ zu der vorausgesetzten Widerspruchslosigkeit anderer?

Die Auflösung dieses Probleme wurde weitgehend gefördert durch Rückgriff auf die geeignet fortentwickelte mathematische Logik oder die Logistik, wie man sie auch nennt. Man erkannte zunächst, daß die Leistung der Logistik, die u. a. eine kalkülmäßige Behandlung der schließenden Begründungen wie der Definitionen liefert, folgendermaßen interpretierbar ist. Wenn man aus gewissen Prämissen P nach den üblichen Schlußverfahren S bestimmte Folgerungen F ableitet, so läßt sich dies kalkülmäßig durch folgendes Verfahren erfassen. Man ordne durch eine beiderseitshin zu lesende Vorschrift allen in Frage stehenden Sätzen Formeln zu und den Schlußverfahren Operationsvorschriften im Kalkül. Seien P' die P zugeordneten Formeln, und F' die F zugeordneten Formeln, dann läßt sich F' aus P' gerade nach den den Schlußverfahren S entsprechenden Operationsvorschriften S' ableiten. Hierbei sind die Regeln S' des Logikkalküles durch die erwähnte Vorschrift mit den Schlußverfahren S gekoppelt.

Ein ähnliches Resultat vermochte man nun auch hinsichtlich der mathematischen Disziplinen durch die sogenannte Formalisierung derselben zu erzielen, d. h. vermitteltst ihrer Ersetzung durch einen Kalkül. Daß das, und genauer wie das immer möglich ist, ergibt sich aus nachstehenden Betrachtungen: Die betreffende zu formalisierende Disziplin denkt man sich zunächst in denjenigen Zustand überführt, in dem man aus einigen der zu ihr gehörigen Behauptungen, den Axiomen, die anfänglich noch als Grundwahrheiten gelten, alle weiteren einschlägigen Behauptungen, es sind die Lehrsätze, durch bündiges Schließen ermitteln kann. Hat man eine Disziplin dergestalt gleichsam auf ein Axiomensystem reduziert, dann läßt sich dieses Axiomensystem als ein System von Behauptungen auffassen, welches angibt, daß gewisse Beziehungen zwischen gewissen in diesen Behauptungen enthaltenen Begriffen bestehe, bzw. zwischen den Gegenständen, von denen gegebenenfalls diese Behauptungen gelten bzw. zwischen den erwähnten Begriffen und Gegenständen.

Der zweite Schritt zur gesuchten Formalisierung einer Disziplin besteht nun darin, daß man von den nicht-relationstheoretischen Beschaffenheiten der Beziehungen absieht. Man faßt dann das erwähnte System von Grundbehauptungen nur noch auf als ein solches, das ein Netzwerk von lediglich nach ihren ordnungsstiftenden Eigenschaften charakterisierten Relationen beschreibt, die zwischen gewissen Gegenständen bestehen, welche ihrerseits nur noch nach ihrer Stellung zu den Relationen voneinander unterschieden werden und denen sonst weiter keine Beschaffenheiten beizulegen sind. Dann können ersichtlich logische Umformungen, das Ziehen von Schlüssen, angewendet auf ein derartiges System, nur folgendes liefern: Sie können nur zeigen, daß neben den Ausgangsrelationen auch noch andere Relationen, oder wenigstens die Ausgangsrelationen noch in anderer Hinsicht, zwischen den betreffenden weitgehend nicht näher bestimmten, aber für die Zwecke einer schließend begründenden Wissenschaft gerade weit genug bestimmten Gegenständen bestehen.

Dabei erhebt sich die Frage, ob bei einem solchen „Absehen“ von allen nicht-relationstheoretischen Beschaffenheiten der Relationen eines derartigen Netzwerkes (es ist ein Übergang von den Relationen zu den Relationszahlen derselben im Whitehead-Russellschen Sinne) nicht die betreffenden Relationen in unzulässiger Weise wichtiger Eigentümlichkeiten beraubt werden und ob des weiteren immer das Netzwerk von in solcher Weise verallgemeinerten Re-

lationen noch als eine im Hinblick auf die zu ziehenden Schlüsse vollwertiger Ersatz des ursprünglichen gelten kann. Dazu ist folgendes zu sagen: Selbstverständlich sind die ursprünglichen, irgendwie besonders beschaffenen Relationen verschieden von den abstrakten Relationen, die lediglich als Zeichen für alle diejenigen Relationen zu denken sind, die unbeschadet inhaltlicher Verschiedenheiten dieselben ordnungstiftenden Eigenschaften besitzen. Aber zum Zwecke einer Ableitung von Sätzen aus Sätzen, die durch das Ziehen von Schlüssen erfolgt, ist das gleichgültig. Bei einem derartigen Verfahren nämlich wird von denjenigen und nur denjenigen Beschaffenheiten des Systems der ursprünglichen Sätze Gebrauch gemacht, die allen diesem Systeme isomorphen Systemen gleichermaßen zukommt. Diese Eigentümlichkeit des bloß schließend vorgehenden Verfahrens bei der Gewinnung neuer Aussagen aus gegebenen bringt es übrigens auch allein mit sich, daß man dieselben Schlußformen auf den verschiedensten Gebieten mit Erfolg gleichartig anwenden kann.

Der dritte und letzte Schritt zur Formalisierung der vorgelegten Disziplin besteht jetzt darin, daß man das beschriebene Netzwerk von Beziehungen, die zwischen gewissen Gegenständen obwalten, welche nur noch nach ihrer Stellung zu diesen Beziehungen unterschieden werden, mit den Mitteln des Logikkalküles wiedergibt. Dabei ist die Tatsache zu konstatieren, daß die Mittel des Logikkalküles dazu ausreichen; ein Umstand, nebenbei bemerkt, der eine gewisse weitgehende Verwandtschaft zwischen reiner Logik und reiner Mathematik vermuten läßt. Bei dieser Wiedergabe entspricht dann dem ursprünglichen System von Grundbehauptungen ein System von Ausgangsformeln des Kalküles, wobei die sogenannten Gegenstände dieser Grundbehauptungen als Variablenzeichen in die Formeln des Kalküles eintreten. Das bedeutet aber nicht etwa, um Irrtümern vorzubeugen, daß man die betreffenden Ausgangsformeln aus den Ausgangsformeln der Logik ableiten kann, sondern lediglich, daß man sie mit den Mitteln des Kalküles als Kalkülformeln hinschreiben vermag. Weiterhin entspricht der schließenden Begründung von neuen Behauptungen aus den Grundbehauptungen in der Sphäre des Kalküles die Gewinnung neuer Formeln aus den Ausgangsformeln vermittelt der Operationsvorschriften des Kalküles. Damit entspricht dann also der auf ihre Widerspruchslosigkeit hin zu prüfenden Disziplin ein Kalkül, und in diesem Ersatz durch einen Kalkül besteht die Formalisierung der betreffenden Disziplin.

Bei einer dergestalt formalisierten Disziplin nun, sofern sie ursprünglich etwa ein paar einander widersprechender Sätze enthielt, wird infolgedessen eine dieses Vorkommnis anzeigende typische Formel auftreten. Kann man nun innerhalb der formalisierten Disziplin, also innerhalb des Kalküles, ermitteln, daß diese Formel ordnungsgemäß in dem betreffenden Kalkül nicht hergeleitet werden kann, so hat man die Widerspruchslosigkeit der Disziplin auf dem Umwege über ihre Formalisierung gefunden, wobei wir die Art, wie man dabei wesentlich nach dem Vorgange D. Hilberts zu Werke geht, hier nicht näher angeben wollen.¹⁾

Die bei dem Bemühen, die Widerspruchslosigkeit einer mathematischen Disziplin zu zeigen, gefundene Formalisierung einer solchen zeigt nun, daß man die ursprüngliche Disziplin gleichsam in zwei Teile aufspalten kann, von denen der eine, nämlich der durch die Formalisierung gewonnene Kalkül, für die schließenden Begründungen allein wichtig ist. Der andere Teil hingegen, der bei der Formalisierung in Wegfall kommt, stellt bei näherem Zusehen nichts weiter dar als eine Kopplung des Kalküles mit dem Verhalten gewisser Objekte, dargestellt in teilweise formelmäßigen Aussagen über dieselben. Diese fundamentale Erkenntnis liefert nun die Mittel, das, was an der Position des Empirismus, wie das, was an der Position des Konventionalismus haltbar ist, zu vertiefen und zu einer neuen Auffassung von der Natur der mathematischen Disziplinen zusammenzufassen. Die reine Mathematik ist nichts anderes als ein Kalkül, fortan Mathematikkalkül genannt, in dem es also weder Wahrheit noch Falschheit gibt und der an sich infolgedessen in logischer Hinsicht willkürlich ist. Darin liegt die Vertiefung der von dem Konventionalismus immer vertretenen, aber bei seiner sonstigen Auffassung nicht zu rechtfertigenden Behauptung von dem konventionalistischen, logisch willkürlichen Charakter der Mathematik. Deutet man aber den Mathematikkalkül oder einen Ausschnitt desselben vermittelt einer Deutungsvorschrift, die man natürlich in geeigneter Weise zu wählen hat, dann erfaßt man unter Umständen mit Hilfe dieses, mit einer Deutungsvorschrift versehenen Kalküles das Verhalten gewisser Objekte zutreffend; und

¹⁾ Was die Arbeiten D. Hilberts und seiner Schule, insbesondere diejenigen von P. Bernays betrifft, vgl. man das dem seiner Zeit erwähnten Fraenkelschen Werke beigegebene Literaturverzeichnis; vgl. ferner W. Dubislaw, Elementarer Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Logikkalküles, Crellesches Journal, Bd. 161, 1929.

dieser Kalkül kann und muß dann als der präziseste Ausdruck einer naturwissenschaftlichen Theorie gelten, die die Beschaffenheiten der den Formeln zugeordneten Objekte zu erfassen gestattet. In diesem Umstand ist die Tatsache mitenthaltend und geeignet gedeutet, auf die der Empirismus immer hinwies, wenn er die Axiome der Mathematik als Hypothesen hinstellte.

Wir haben nun noch genauer zuzusehen, wie die geschilderte Beziehung zwischen einer formalisierten mathematischen Disziplin und den Objekten näher aussieht, die gegebenenfalls mit ihrer Hilfe berechnet werden sollen. Dabei liegt dann folgender Sachverhalt vor: Man hat einen Kalkül, in dem es sich darum handelt, aus gewissen Ausgangsformeln mittelst bestimmter Regeln, den Operationsvorschriften des Kalküles, andere Formeln abzuleiten. Es muß dann, wenn dieser Kalkül eine Berechnung gewisser Objekte gestatten soll, erstens möglich sein, die in dem Kalkül auftretenden Beziehungszeichen umkehrbar eindeutig zu koppeln mit bestimmten Beziehungen innerhalb des Bereiches der zu berechnenden Objekte. Es muß zweitens möglich sein, die Gebilde, welche durch die Beziehungszeichen des Kalküles (sie sollen fortan kurz die Kalkülbeziehungen heißen) miteinander verknüpft werden, umkehrbar eindeutig den zu berechnenden Objekten zuzuordnen, und zwar in folgender Weise: Wenn zwischen Gebilden der angegebenen Art bestimmte Kalkülbeziehungen obwalten, so sollen zwischen den diesen Gebilden entsprechenden Objekten gerade diejenigen Beziehungen bestehen, die den Kalkülbeziehungen vermöge der Zuordnung zugeordnet sind. Dabei wollen wir aber bei dieser Gelegenheit weder auf diejenige Verfeinerung dieser Betrachtung eingehen, die erforderlich ist, wenn innerhalb des Kalküles Kalkülbeziehungen auftreten, die ihrerseits zwischen Kalkülbeziehungen gelten, noch wollen wir zeigen, wie man in den Rahmen dieser Überlegungen die sogenannte statistische Gesetzlichkeit einzubeziehen hat.¹⁾

Abschließend sei noch in aller Kürze das Verhältnis von Logik und Mathematik erörtert. B. Russell hat bekanntlich gelegentlich behauptet, daß die Mathematik restlos in die Logik überführbar sei. Das ist eine falsche bzw. eine wahre Behauptung, entsprechend der hier vertretenen formalistischen Grundansicht, je nachdem wie man diese Behauptung interpretiert. Soll sie nämlich besagen, daß man aus den Ausgangsformeln der Logikkalküles mittelst der Ope-

¹⁾ Vgl. W. Dubislav, Zur Wahrheitstheorie, Philosophie u. Sch., 1930.

rationsvorschriften derselben diejenigen Formeln ableiten kann, die als die Grundformeln des Mathematikkalküles zu betrachten sind, so ist sie eine falsche Behauptung. Denn man kann z. B. diejenige Formel des Mathematikkalküles auf diese Weise nicht ableiten, die dem sogenannten Unendlichkeitsaxiom entspricht. Nur in einem anderen, weniger besagenden Sinne ist die Russellsche Behauptung eine wahre. Man schreibe eine formale Implikation an, deren Implikans (Vorderglied) $A(x, y, \dots)$ aus derjenigen Formel besteht, die den Axiomen der Mathematik bei gewöhnlicher Darstellung derselben entspricht, und deren Implikat (Hinterglied) $B(x, y, \dots)$ von einer Formel gebildet wird, die das formelmäßige Äquivalent irgendeines Lehrsatzes der Mathematik ist, bei gewöhnlicher Darstellung derselben. Dann ist es wahr — und nur, wenn sie dies meint, ist die Russellsche Behauptung eine wahre —, daß man die formale Implikation $A(x, y, \dots) \rightarrow B(x, y, \dots)$ allein nach den Operationsvorschriften des Logikkalküles aus seinen Ausgangsformeln ableiten kann. Das besagt mit anderen Worten: Man kann allein mit Hilfe des Logikkalküles alle Formeln des Mathematikkalküles „aufbauen“, aber man kann sie nicht aus den Ausgangsformeln der Logikkalküles allein „ableiten“, sondern bedarf dazu noch besonderer Ausgangsformeln, die zwar auch im ursprünglichen Logikkalkül Formeln sind, nur eben keine ableitbaren. Mithin ist der Mathematikkalkül ein um wenige neue Ausgangsformeln, aber um keine einzige neue Operationsvorschrift erweiterter Logikkalkül.¹⁾

¹⁾ Vgl. W. Dubislav, Zur Lehre von der sog. schöpferischen Definition, Philosophisches Jahrbuch, 1928 (Teil I) und 1929 (Teil II), insbesondere Teil II, S. 51 ff.