

Differentialgleichungen

Eine elementare Einführung

Oliver Passon

4. September 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Definition	2
1.1.1	Terminologie	2
1.2	Ein konzeptionelles Beispiel, Rand- bzw. Anfangsbedingungen	3
1.3	Eine wichtige Methode: Trennen der Variablen	4
1.3.1	Nebenbemerkung: dx und Δx	5
1.4	Wachstumsprozesse	5
1.4.1	Diskussion der Lösung	6
1.4.2	nicht-lineare Verallgemeinerung: logistisches Wachstum	6
1.4.3	Nichtlinearität und Chaos	8
2	DGL erster Ordnung	8
2.1	Freier Fall mit Reibung	9
2.1.1	Alternativer Lösungsweg	10
2.2	Allgemeine Lösungstheorie für lineare DGL erster Ordnung	12
2.2.1	homogener Fall ($b(x)=0$)	14
2.2.2	allgemeiner Fall ($b(x) \neq 0$)	14
2.3	Allgemeine Eigenschaften von linearen DGL	15
2.4	Der Störgliedansatz	15
3	DGL zweiter Ordnung	17
3.1	Allgemeine Lösungstheorie für lineare DGL zweiter Ordnung	17
3.1.1	Komplexe Lösungen	17
3.1.2	Der homogene Fall	18
3.1.3	Der inhomogene Fall: Störgliedansatz	20
3.2	Harmonische Schwingungen	20
3.3	Der gedämpfte harmonische Oszillator	22
3.4	Die erzwungene Schwingung	26
3.4.1	Diskussion der Lösung	27
4	Schlussbetrachtungen	28

1 Einführung

Gott ist eine Differentialgleichung
B. Russel

Die Physik beschäftigt sich im allgemeinen mit “Veränderungen” bzw. Änderungsvorgängen (etwa der Bewegung eines Körpers unter dem Einfluß einer Kraft etc.pp.). Natürlicherweise haben viele physikalischen Gesetze deshalb die Form einer Differentialgleichung, denn Ableitungen sind die mathematische Beschreibung von “Änderungsvorgängen”. Die Bedeutung von Differentialgleichungen in der Physik (und anderen Disziplinen) ist dabei eine Doppelte: Man muß lernen, Differentialgleichungen zu *lösen* und *aufzustellen*.

1.1 Definition

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung in der eine Funktion sowie mindestens eine **Ableitung** dieser Funktion vorkommen. Die gesuchte “Unbekannte” ist hierbei also die Funktion.

Unter der *Lösung* einer Differentialgleichung versteht man demzufolge das Auffinden *aller* Funktionen die die Gleichung erfüllen.

1.1.1 Terminologie

Differentialgleichungen (kurz DGL) können nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifiziert werden.

- Klassifizierung nach Anzahl der Variablen
 - **gewöhnliche DGL**
Die Ableitungen werden nur nach *einer* Variablen gebildet! Beispiel: $\frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0$
 - **partielle DGL**
Ableitungen nach *mehreren* Variablen treten auf. Bsp.: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dots$
- Klassifizierung nach Struktur der Terme
 - **lineare DGL**
Die DGL hat (im gewöhnlichen Fall) die Form $\sum_n a_n f^n(x) = b(x)$. Dabei bedeutet f^n die n -te Ableitung der Funktion f . Es treten also *keine* Terme wie $f(x) \cdot f'(x)$, $(f')^2$ oder $\sqrt{f(x)}$ auf.
 - **nicht-lineare DGL**
Es treten nicht-lineare Terme (z.Bsp. $f(x) \cdot f'(x)$, $\sqrt{f(x)}$ oder $(f'(x))^2$) auf.
- Klassifizierung nach “Ordnung”
Unter der **Ordnung** einer DGL versteht man die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung.

- **DGL 1. Ordnung** z.Bsp. $f'(x) + af(x) + b = 0$
- **DGL 2. Ordnung** z.Bsp. $f''(x) + af(x) + b = 0$
- **DGL n-ter Ordnung** z.Bsp. $f^{(n)}(x) + af(x) + b = 0$
- **Klassifikation nach Struktur der Koeffizienten**
 Die Funktion bzw. ihre Ableitung gehen im allgemeinen mit Faktoren a_i ein, etwa:
 $f''(x) + a_1f'(x) + a_2f(x) = b$
 - **konstante Koeffizienten**
 a_i sind konstant (b kann jedoch von Variable(n) abhängen)
 - **nicht-konstante Koeffizienten**
 a_i sind Funktionen der Variablen der gesuchten Funktion
- **Klassifikation nach Inhomogenität**
 Die DGL $f''(x) + a_1f'(x) + a_2f(x) = b$ hat einen Term b , der nicht mit der Funktion f bzw. einer Ableitung $f^{(n)}$ eingeht. Diesen bezeichnet man als “Inhomogenität” bzw. “Störterm”.
 - **homogene DGL** $b = 0$
 - **inhomogene DGL** $b \neq 0$

Übungsaufgaben

Klassifizieren sie die folgenden DGL nach den obigen Kategorien:

- a) $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
- b) $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$
- c) $\frac{d^2 f}{dx^2} + x^3 \frac{df}{dx} + f = x^5$
- d) $\frac{d^2 f}{dx^2} + f(x) \frac{df}{dx} = 0$

In der Physik spielen fast nur lineare DGL zweiter Ordnung eine Rolle, allerdings sowohl gewöhnliche, als auch partielle. Wir beschränken uns im folgenden lediglich auf *gewöhnliche* DGL. Die Lösungstheorie vereinfacht sich dadurch ganz erheblich.

1.2 Ein konzeptionelles Beispiel, Rand- bzw. Anfangsbedingungen

Die Gleichung

$$f'(x) = a$$

mit $a = \text{const.}$ ist sicherlich eines der einfachsten Beispiele für eine DGL das man angeben kann. Die Lösung findet man offensichtlich durch Integration:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int a dx + C \\ &= a \cdot x + C \end{aligned}$$

Es erklärt sich dadurch folgende *allgemeine* Sprechweise:

$$\begin{aligned} \text{DGL lösen} &= \text{integrieren} \\ \text{Lösung einer DGL} &= \text{Integral} \\ \text{freie Konstante der Lösung} &= \text{Integrationskonstante} \end{aligned}$$

Zum letzten Punkt, der “freien Konstante der Lösung” C : Unsere Funktion $f(x) = ax + C$ ist tatsächlich keine *einzelne* Funktion, sondern eine gesamte *Lösungsschar*. Schliesslich gewinnt man für jeden C -Wert eine andere Funktion, die die DGL erfüllt. Ist hingegen ein sog. **Anfangs-** oder **Randwert** der gesuchten Funktion bekannt, kann die Lösung weiter eingeschränkt werden. Zum Beispiel mag bekannt/gefordert sein, daß die Funktion an der Stelle x_0 gleich Null ist:

$$\text{Anfangswert: } f(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0 + C = 0 \\ \Rightarrow C &= 0 - ax_0 \\ \Rightarrow f(x) &= ax - ax_0 \\ f(x) &= a(x - x_0) \end{aligned}$$

Merke: Erst die Anfangs- bzw. Randbedingungen legen die Lösung einer DGL eindeutig fest. Anders ausgedrückt enthält die Lösung einer DGL *immer* freie Konstanten, die erst durch zusätzliche Bedingungen festgelegt werden können. Die **Anzahl** der Integrationskonstanten (= notwendiger Anfangsbedingungen) ist dabei gleich der **Ordnung** der DGL! In unserem Beispiel also eine Konstante, da die DGL erster Ordnung ist.

1.3 Eine wichtige Methode: Trennen der Variablen

Für das einfache Beispiel $f'(x) = a$ soll an dieser Stelle noch ein anderer Lösungsweg diskutiert werden. Das Verfahren heißt aus naheliegenden Gründen “Trennen der Variablen”: Schreibt man die Ableitung $f'(x) = \frac{df}{dx}$ lautet die DGL:

$$\frac{df}{dx} = a$$

Formal kann mit den Ausdrücken df und dx umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= a \\ df &= a dx \end{aligned}$$

Offensichtlich setzt sich die gesuchte Funktion f aus den “infinitesimalen Stücken” df zusammen, also $f = \int df$. Dies kann *entweder* als unbestimmtes Integral aufgefasst werden, oder als *bestimmtes* Integral¹:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= a \\ df &= a dx \\ \int_{f(x_0)}^{f(x)} df &= \int_{x_0}^x a dx \\ f(x) - f(x_0) &= a(x - x_0) \\ f(x) &= a(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

Dies ist aber (für $f(x_0) = 0$) gerade die selbe Lösung wie wir sie oben gefunden haben. Bei dieser Rechnung tritt keine Integrationskonstante “ C ” auf, da man die Information über $f(x_0)$ direkt verwendet!

1.3.1 Nebenbemerkung: dx und Δx

In Natur- und Ingenieurwissenschaften ist der Anspruch an mathematischer Strenge und Genauigkeit eingeschränkt. Dies findet zum Beispiel seinen Ausdruck in dem recht sorglosen Umgang mit dem Symbol dx , wie er etwa bei der Methode “Trennen der Variablen” angewendet wird. Strenggenommen ist es *unsinnig* (da nicht definiert) mit den Differentialen dx , dy etc. Rechenoperationen durchzuführen als wenn es sich um gewöhnliche Zahlen bzw. Variablen handeln würde. Nur als Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ kommt ihnen eine wohl definierte Bedeutung zu. Dass diese Umformungen trotzdem zu sinnvollen Ergebnissen führen kann in der Regel dadurch gerechtfertigt werden, daß man sie sich an endlichen Δx durchgeführt denkt, und durch einen Grenzübergang $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ am Ende das selbe Resultat gewinnt. In diesem Sinne handelt es sich bei formalen Rechenoperationen mit Differentialen um eine Kurzschreibweise, die den entsprechenden Grenzübergang unterdrückt.

1.4 Wachstumsprozesse

In diesem Abschnitt betrachten wir die DGL die exponentielle Wachstumsprozesse beschreibt. An diesem Beispiel illustrieren wir zudem das Aufstellen einer DGL.

Wir betrachten z.Bsp. eine Anzahl von Lebewesen. Deren Anzahl zu einem bestimmten Zeitpunkt sei N_0 . Unsere Lebewesen – etwa eine Bakterienpopulation in einer Nährflüssigkeit – vermehren sich. Gesucht ist nun die Funktion $N(t)$, die die Grösse der Population als Funktion der Zeit beschreibt. Es ist sicherlich nicht unvernünftig, die Änderungsrate $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ für eine kurze Zeitspanne Δt als proportional zur Grösse der Population $N(t)$ und der verstrichenen Zeitspanne Δt anzunehmen:

$$\Delta N \propto N \cdot \Delta t \tag{1}$$

¹Wir erlauben uns die Nachlässigkeit, Integrationsvariable und Integrationsgrenzen teilweise identisch zu bezeichnen.

Diese Beziehung ist jedoch nur für eine “kurze Zeitspanne” Δt sinnvoll, da die Beeinflussung des Wachstums durch die hinzukommenden Bakterien vernachlässigt wird. Sicherlich ist es jedoch schwierig den Begriff “kurz” zu präzisieren. Deshalb ist es naheliegend folgendes Verhältnis zu betrachten:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N$$

Nun kann ein Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchgeführt werden, sodaß man “beliebig kurze” Zeitintervalle betrachtet. Dadurch wird man jedoch auf die folgende DGL geführt:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (2)$$

Unsere Herleitung illustriert einen anderen Punkt, der die Bedeutung von Differentialgleichungen ausmacht: Durch eine “lokale Eigenschaft” der gesuchten Funktion $N(t)$ – nämlich einer Änderungsrate für kleine Δt gemäss Gleichung 1 – kann eine Bestimmungsgleichung für die “globale” Funktion abgeleitet werden. Modellannahmen über das Verhalten im *Kleinen*, sind aber sicherlich leichter zu formulieren und zu prüfen.

Die Lösung dieser DGL soll nun nach dem bereits behandelten Verfahren “Trennen der Variablen” durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \lambda N && | N, t \text{ trennen} \\ \frac{dN}{N} &= \lambda dt && | \text{Integration!} \\ \ln N &= \lambda t + C && | \text{nach } N(t) \text{ auflösen} \\ N(t) &= e^{\lambda t + C} \end{aligned}$$

Mit der Bedingung $N(t = 0) = N_0$ findet man: $C = \ln N_0$. Die eindeutige Lösung lautet also:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

1.4.1 Diskussion der Lösung

Bei dieser DGL ist die Änderungsrate proportional zur Funktion selbst, und natürlich werden wir auf eine e-Funktion als Lösung geführt. Schliesslich hat die e-Funktion die erstaunliche Eigenschaft, ihre eigene Ableitung zu sein! Eine solche DGL beschreibt häufig Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse (je nach Vorzeichen der Konstante λ). Die Verzinsung ist ein anderes Beispiel für exponentielles Wachstum – nur leider nicht auf meinem Konto.

Für $\lambda > 0$ beschreibt diese DGL also einen unbegrenzten Wachstumsprozess! Dieser ist sicherlich nirgends in der Natur realisiert. Durch eine einfache Modifikation von Gleichung 2 kann dies jedoch korrigiert werden.

1.4.2 nicht-lineare Verallgemeinerung: logistisches Wachstum

Die Funktion $e^{\lambda t}$ wächst für positives λ über alle Grenzen. Denkt man etwa an die eingangs erwähnte Bakterienpopulation, wird dieses Verhalten sicherlich durch einen begrenzten

Vorrat an Nährflüssigkeit unterbunden. Ganz allgemein wird man annehmen, daß durch beschränkte Ressourcen eine maximale Schranke K existiert – auch Trägerkapazität genannt – die nicht überschritten werden kann. Dann ist es aber wiederum naheliegend anzunehmen, daß das Wachstum ΔN proportional zum verbliebenen “Spielraum” $K - N(t)$ ist. Wir werden also auf folgende modifizierte DGL geführt:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(K - N) \quad (3)$$

Diese Gleichung wird “logistische Gleichung” genannt, und wurde von P.F. Verhulst schon 1838 zur besseren Modellierung von Wachstumsprozessen vorgeschlagen. Tatsächlich handelt es sich um eine nichtlineare DGL (es tritt ein Term $\propto N^2$ auf). Die Lösung der logistischen Gleichung lautet²:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-\lambda K t}}$$

Überschreitet die Population den Wert von $K/2$ schwächt sich das Wachstum ab (“Vitalitätsknick”), um schliesslich dem asymptotischen Wert K zuzustreben. Abbildung 1 illustriert den Verlauf dieses Graphen. Bei geeigneter Parameterwahl kann diese Funktion tatsächlich zahlreiche Wachstumsprozesse beschreiben – etwa das Längenwachstum von Sonnenblumen, oder die Gewichtszunahme von Ratten.

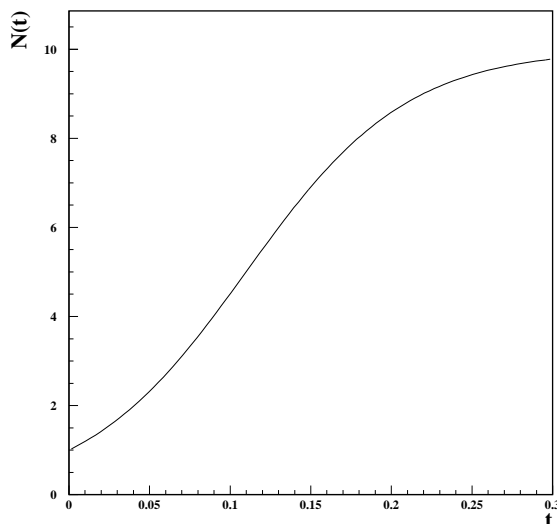


Abbildung 1: Lösung der logistischen Gleichung für $K = 10$, $N_0 = 1$ und $\lambda = 2$

²Die Lösung dieser nichtlinearen DGL ist untypisch leicht zu finden: Man substituiert $N = \frac{1}{M}$, und findet $\frac{d(1/M)}{dt} = \frac{d(1/M)}{dM} \frac{dM}{dt} = -\frac{1}{M^2} \frac{dM}{dt} = \lambda \left(\frac{K}{M} - \frac{1}{M^2}\right)$. Multipliziert man den M^2 auf die andere Seite sieht man sofort, daß die DGL in der neuen Variablen *linear* ist! Mit der “Trennen der Variablen” Methode ist diese leicht zu lösen.

1.4.3 Nichtlinearität und Chaos

Die logistische Gleichung des vorherige Abschnittes ist das einzige Beispiel für eine nicht-lineare DGL die wir in dieser Arbeit diskutieren. Deshalb soll sie zum Anlaß genommen werden wenigstens einige skizzenhafte Bemerkungen über die Phänomene zu machen, die beim Studium von nichtlinearen Systemen auftreten. Dies ist eng mit dem Schlagwort “Chaos” verknüpft. Charakteristisch für chaotisches Verhalten ist die sensible Abhängigkeit eines Systems von seinen “Parametern”. Eine qualitative Änderung des Verhaltens unter Variation eines Parameters bezeichnet man als *Bifurkation*. Unsere kontinuierliche logistische Gleichung zeigt in diesem Sinne *kein* chaotisches Verhalten. Ihre diskretisierte Form:

$$y_{n+1} = ky_n(1 - y_n) \quad (4)$$

zählt jedoch zu den Lehrbuchbeispielen der Bifurkationstheorie. Gleichung 4 liefert bei gegebenem Anfangswert y_0 eine Folge von y_i Werten. Ein interessantes Studienobjekt ist nun die Abhängigkeit der Entwicklung von dem kontinuierlichen Parameter k . Für k zwischen 1 und 3 wird die Folge sich einem festen Wert annähern. Für $k = 3$ tritt plötzlich “Periodizität” auf, d.h. die y_i Werte alternieren zwischen zwei festen Werten. Die Periode hat also den Wert 2.

Mit $k = 3.4494\dots$ verdoppelt sich dieser Zyklus auf 4, d.h. alle vier Iterationen wiederholt sich das Verhalten der Folge. Weitere Periodenverdoppelungen treten bei $3.5441\dots$, $3.5644\dots$, $3.5687\dots$ u.s.f. auf. Bei $k = 3.5699\dots$ tritt chaotisches Verhalten auf, d.h. die Folge nimmt keine feste Periode an, bzw. hat eine “unendliche Periodizität”. Das selbe gilt für die “meisten” Werte zwischen 3.57 und 4. Abbildung 2 zeigt y_n als Funktion der Iterationen n für $y_0 = 0.005$ und $k = 2.9$ bzw. $k = 3.9$. Offensichtlich zeigt sich das qualitativ sehr verschiedene Verhalten.

Für die Eigenschaft der periodischen Verdoppelung bei der Annäherung an chaotisches Verhalten ist die logistische Gleichung nur das einfachste Beispiel. Ein fundamentales Resultat der Bifurkationstheorie lautet, daß das Verhältnis der Abstände benachbarter Parameterwerte für die eine Periodenverdoppelung auftritt einem Grenzwert zustrebt, der sog. Feigenbaumkonstanten ($\delta = 4.6692\dots$ im Falle der logistischen Gleichung). Mit anderen Worten wird jede periodische Region um einen Faktor ≈ 4.67 *kleiner* als die Vorangegangene, bis schliesslich nicht-periodisches Verhalten einsetzt.

2 DGL erster Ordnung

In diesem Abschnitt behandeln wir (lineare und gewöhnliche) DGL erster Ordnung. Durch die Einschränkung auf diese spezielle Klasse ergeben sich naturgemäss zahlreiche Vereinfachungen. Dennoch verallgemeinern sich viele Methoden und Ergebnisse in naheliegender Weise auch auf DGL höherer Ordnung. Darüberhinaus sind DGL erster Ordnung nicht ohne Anwendungen in interessanten Fällen. Dies sahen wir bereits im Falle des exponentiellen Wachstums, und als ein weiteres Beispiel diskutieren wir den “freien Fall mit Reibung” im nächsten Abschnitt. Nach dieser konkreten Anwendung gehen wir zur Formulierung einer allgemeinen Lösungstheorie über.

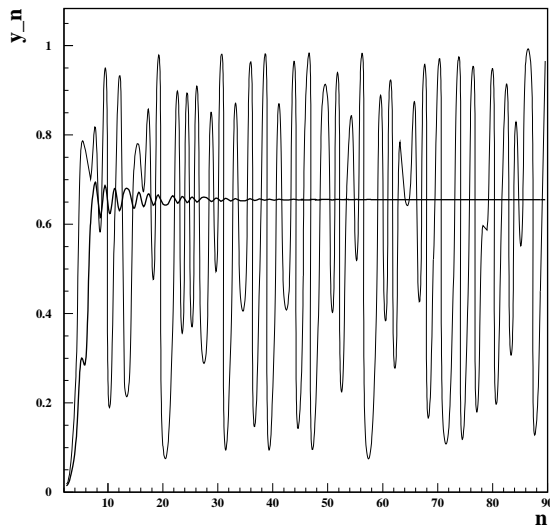


Abbildung 2: Diskrete logistische Gleichung für $y_0 = 0.005$ und die k -Werte 2.9 und 3.9. Während die Folge für den Wert < 3 einem festen Wert zustrebt ist das Verhalten für $k = 3.9$ noch nicht einmal periodisch!

2.1 Freier Fall mit Reibung

Wir betrachten als weiteres physikalisches Beispiel den freien Fall ($m\ddot{x} = mg$) mit Reibung ($m\ddot{x} \sim \dot{x}$). Dabei wird das Verfahren “**Trennen der Variablen**” noch einmal angewendet. Eine allgemeine Lösungstheorie (für DGL erster und zweiter Ordnung) soll erst später entwickelt werden.

Die BWGL für $v(t) = \dot{x}$ lautet:

$$\begin{aligned} mg - av(t) &= m\dot{v}(t) \\ \dot{v}(t) + \frac{a}{m}v(t) &= g \end{aligned}$$

Diese DGL ist also *erster* Ordnung in $v(t)$. Um den Ort als Funktion der Ort zu gewinnen, muß die Lösung später noch einmal integriert werden. Wichtig ist das relative Vorzeichen zwischen der Erdanziehungskraft mg und der Reibungskraft av . Die eine beschleunigt, die andere bremst ab! An dieser Stelle ist der inhomogene Term (“ g ”) störend, und wir substituieren³ $v(t) = u(t) + \frac{mg}{a}$. Dadurch erhalten wir in der Variablen u die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{u} + \frac{a}{m}\left(u + \frac{mg}{a}\right) - g &= 0 \\ \dot{u} + \frac{a}{m}u &= 0 \end{aligned}$$

³Durch diesen Trick vereinfacht sich die Rechnung, allerdings kann die DGL auch direkt gelöst werden! Siehe hierzu das nächste Kapitel (“Alternativer Lösungsweg”)

In der folgenden Schreibweise ist die Variablenseparation besonders intuitiv:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + \frac{a}{m}u &= 0 \\ \frac{1}{u} \frac{du}{dt} + \frac{a}{m} &= 0 \\ \frac{1}{u} du &= -\frac{a}{m} dt\end{aligned}$$

nun können beide Seiten integriert werden:

$$\begin{aligned}\int_{u(0)}^{u(T)} (1/u) du &= -(a/m) \int_0^T dt \\ \ln |u(T)| - \ln |u(0)| &= -(a/m)T \\ \ln |u(T)| &= -(a/m)t + \ln |u(0)| \\ |u(T)| &= |u(0)| \cdot e^{-(a/m) \cdot T}\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Beziehung $u(t) = v(t) - \frac{mg}{a}$ kann wieder zur tatsächlichen Geschwindigkeit v rücks substituiert werden, und man findet (für T ist nun wieder t geschrieben):

$$\begin{aligned}v(t) - \frac{mg}{a} &= (v_0 - \frac{mg}{a}) \cdot e^{-(a/m) \cdot t} \\ v(t) &= v_0 \cdot e^{-(a/m) \cdot t} + \frac{mg}{a} (1 - e^{-(a/m) \cdot t})\end{aligned}$$

Die Abbildung 3 zeigt den Graphen dieser Funktion für $v_0 = 0$ und $\frac{mg}{a} = 1$. Man erkennt, daß die Funktion sich der Grenzggeschwindigkeit $v_g = \frac{mg}{a}$ annähert. Diese Geschwindigkeit kann aber gerade aus der Bedingung $mg = av$ (sprich: Reibung und Erdanziehung halten sich die Waage) abgelesen werden! $v_g = \frac{mg}{a}$ wird immer grösser je kleiner der Reibungskoeffizient ist, und schliesslich unendlich für $a \rightarrow 0$. Hier geht die Bewegung in den freien Fall ohne Reibung über.

Integrieren der Geschwindigkeit liefert (für $v_0 = 0$) den Ort als Funktion der Zeit:

$$\begin{aligned}x(t) - x_0 &= \int_0^t v_g (1 - e^{-(a/m) \cdot t'}) dt' \\ x(t) &= x_0 - v_g(m/a) + v_g t + v_g(m/a) e^{-(a/m) \cdot t} \\ x(t) &= x_0 + v_g [t + (m/a) e^{-(a/m) \cdot t} - (m/a)]\end{aligned}$$

Die Abbildung 4 zeigt den Graphen dieser Funktion für $x_0 = 0$ und wiederum $\frac{mg}{a} = 1$. Man erkennt, daß die Funktion sich einer Geraden mit der Steigung v_g annähert! Im Limes $t \rightarrow \infty$ geht der Ausdruck in der eckigen Klammer nämlich gegen t .

2.1.1 Alternativer Lösungsweg

In obiger Lösung wurde durch die Substitution $v(t) = u(t) + \frac{mg}{a}$ ein gewisser Rechenvorteil erzielt. Wer Zweifel daran hat auf diesen Trick auch selber gekommen zu sein mag es beruhigend finden, daß man die selbe Lösung auch direkt gewinnen kann:

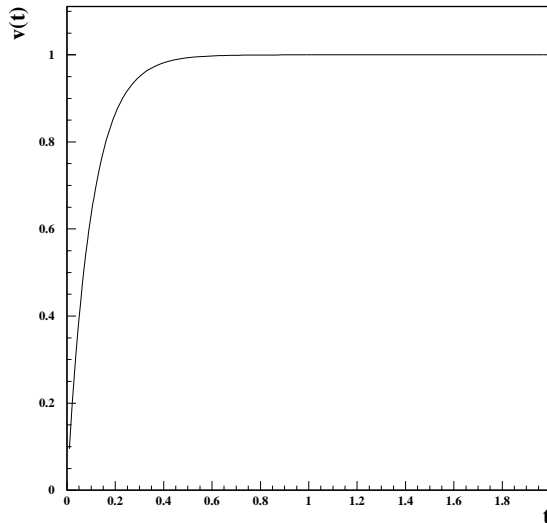


Abbildung 3: Geschwindigkeit des freien Falles mit Reibung für $v_0 = 0$ und $\frac{mg}{a} = 1$.

Unser Ausgangspunkt war die Gleichung

$$m\dot{v}(t) = mg - av(t)$$

löst man nach der Ableitung auf gewinnt man:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - av(t)}{m}$$

Nun kann wieder die “Trennung der Variablen” vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{mg - av} &= \frac{dt}{m} \\ \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv'}{mg - av'} &= \int_0^t \frac{dt'}{m} \\ \left[-\frac{\ln mg - av'}{a} \right]_{v(0)}^{v(t)} &= \frac{t}{m} \\ \ln \frac{mg - av(t)}{mg - av(0)} &= -\frac{a}{m}t \\ \frac{mg - av(t)}{mg - av(0)} &= e^{-\frac{a}{m}t} \\ mg - av(t) &= (mg - av(0))e^{-\frac{a}{m}t} \end{aligned}$$

Schließlich findet man (für $v(0)$ ist wieder v_0 geschrieben worden) die selbe Lösung:

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-(a/m)t} + \frac{mg}{a}(1 - e^{-(a/m)t})$$

In diesem Lösungsweg ist also die einzige “Schwierigkeit”, die Stammfunktion von $\frac{1}{mg-av}$ zu finden.

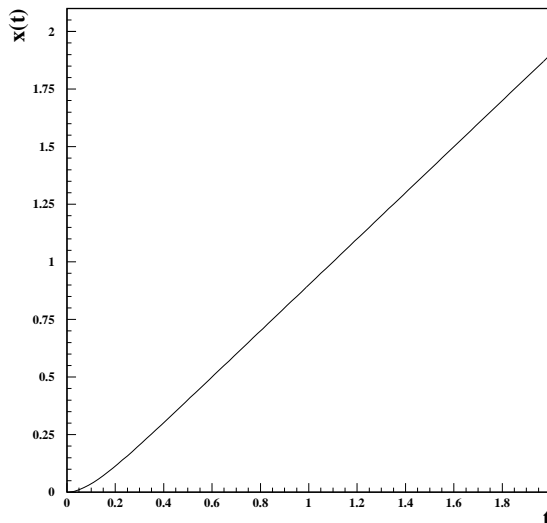


Abbildung 4: Ort als Funktion der Zeit beim freien Fall mit Reibung (mit $x_0 = 0$ und $v_g = \frac{mg}{a} = 1$) Der Graph nähert sich einer Geraden mit der Steigung v_g an.

2.2 Allgemeine Lösungstheorie für lineare DGL erster Ordnung

Wir haben nun die allgemeine Lösung der DGL $y' + ay = b$ für a und b konstant gefunden. Die naheliegende Verallgemeinerung besteht darin, nun auch “variable Koeffizienten” zuzulassen, also $a = a(x)$, $b = b(x)$ stetige Funktionen der Variablen nach der abgeleitet wird⁴. Inhaltlich kann man sich etwa vorstellen, daß der Luftreibungskoeffizient a aus der freien Fall Aufgabe eine Funktion des Luftdrucks, und damit der Höhe ist.

Zur Diskussion der Lösungstheorie verändern wir unsere Schreibweise etwas: Die gesuchte Funktion soll nun immer $y(x)$ heißen, und deren Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$. Das Auffinden der allgemeinen Lösung für den bereits behandelten Fall mit konstanten Koeffizienten a und b liest sich also wie folgt:

$$\begin{aligned}
 y' + ay &= b \\
 \frac{dy}{dx} &= b - ay \\
 \frac{dy}{b - ay} &= dx \\
 \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{b - ay} &= \int_0^x dx = x \\
 -\frac{\ln b - ay(x)}{a} + \frac{\ln b - ay_0}{a} &= x \\
 \ln \frac{b - ay_0}{b - ay(x)} &= ax
 \end{aligned}$$

⁴In der Regel wird nur a als Koeffizient bezeichnet. b ist die Inhomogenität, die auch bei DGL mit “konstanten Koeffizienten” von x abhängen darf.

$$\frac{b - ay_0}{b - ay(x)} = e^{ax}$$

Die letzte Zeile kann jedoch leicht nach der gesuchten Funktion aufgelöst werden, sodaß die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = \frac{b - e^{-ax}(b - ay_0)}{a} \quad (5)$$

Der Leser sollte diese Rechnung noch einmal nachvollziehen. Verwendet werden elementare Umformungen, einfache Integration sowie Logarithmen Gesetze.

Ist der inhomogene Term $b = 0$ vereinfacht sich die Lösung also zum altbekannten Ausdruck:

$$y(x) = y_0 e^{-ax} \quad (6)$$

Wie unterscheiden sich homogene und inhomogene Lösung qualitativ? Die Abbildung 5 zeigt den Graph beider Lösungsfunktionen für die Parameterwerte $y_0 = 10$, $a = 1$ und $b = 0$ (untere Kurve) bzw. $b = 5$ (obere Kurve). Beide Graphen zeigen den typischen exponentiellen Abfall (da a positiv ist). Im homogene Fall fällt die Kurve gegen Null, wohingegen im inhomogenen Fall asymptotisch der Wert $\frac{b}{a}$ angenommen wird. Zudem ist der Abfall der inhomogenen Lösung schwächer.

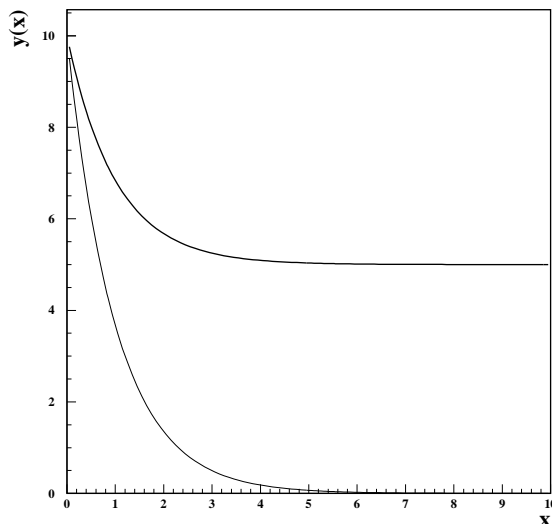


Abbildung 5: Vergleich der beiden Lösungen 5 und 6.

Wir diskutieren nun den Fall variabler Koeffizienten.

2.2.1 homogener Fall ($b(x)=0$)

Wir können wieder die Variablen trennen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + a(x)y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= -a(x)dx \\ \ln|y| &= -\int a(x)dx = A(x) + C \\ y &= Ce^{-A(x)}\end{aligned}$$

Das Integral über die Funktion $a(x)$ wird hier als $A(x)$ abgekürzt. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion existiert es, muß aber nicht elementar ausführbar sein! Die Betragsstriche von y können übrigens weggelassen werden, da die e-Funktion immer positiv ist!

2.2.2 allgemeiner Fall ($b(x) \neq 0$)

Wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall einer inhomogenen DGL zu! Das Verfahren das hier vorgestellt werden soll wird als "Variation der Konstanten" bezeichnet. Man macht nämlich folgenden Ansatz für die Lösung:

$$y(x) = u(x)e^{-A(x)}$$

Dies entspricht der Lösung des homogenen Falles, nur daß die Konstante C durch eine noch zu bestimmende Funktion $u(x)$ ersetzt wurde. Wie muß $u(x)$ nun gewählt werden, um die DGL zu lösen? Leiten wir hierzu den Ansatz ab:

$$\begin{aligned}y' &= u'(x)e^{-A(x)} - a(x)u(x)e^{-A(x)} \\ y' &= u'(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)\end{aligned}$$

Es muß also Gerade der erste Term hinter dem Gleichheitszeichen gleich $b(x)$ sein, damit unser Ansatz die DGL zu löst. Dies ist jedoch nicht anderes als eine weitere DGL zur Bestimmung der Funktion $u(x)$:

$$\begin{aligned}u'(x)e^{-A(x)} &= b(x) \\ \frac{du}{dx} &= b(x)e^{+A(x)} \\ u(x) &= \int b(x)e^{+A(x)}dx\end{aligned}$$

Man beachte, daß $A(x)$ mit der Seite auch das Vorzeichen wechselt! Da die Stammfunktion von $\int b(x)e^{+A(x)}dx$ nur bis auf eine Konstante bestimmt ist lautet die allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int b(x)e^{+A(x)}dx + C \right)$$

mit: $A(x) = \int a(x)dx$. Natürlich ist auch die $a(x)$ Integration nur bis auf eine Konstante bestimmt, man überzeugt sich allerdings leicht davon, daß $A(x) \rightarrow A(x) + C_1$ gerade $C \rightarrow Ce^{-C_1}$ entspricht. Wir haben also tatsächlich nur über eine Konstante zu verfügen. Da unsere DGL jedoch auch nur 1. Ordnung ist reicht dies auch voll und ganz.

Übung

Löse die DGL $y' + xy = -x$ nach der "Variation der Konstanten" Methode!

Lösung

$$\begin{aligned} a(x) &= x, b(x) = -x, A(x) = \int x dx = x^2/2 \\ \int e^{A(x)}b(x) &= -\int e^{x^2/2}x dx = -e^{x^2/2} \\ \Rightarrow y(x) &= Ce^{x^2/2} - 1 \end{aligned}$$

2.3 Allgemeine Eigenschaften von linearen DGL

Wir haben gesehen, daß die Lösung $y = Ce^{-A(x)}$ der homogenen DGL ($b = 0$) ein Summand der allgemeinen Lösung ($b \neq 0$) ist. Diese Eigenschaft gilt für **lineare** DGL immer und hat wichtige Auswirkungen für die Lösungsmethoden. Wir formulieren diesen Sachverhalt gleich für DGL beliebiger Ordnung:

Eine homogene DGL n-ter Ordnung hat die Form:

$$(H) \quad y^n + a_{n-1}y^{n-2} + \dots + a_1y' + a_0 = 0$$

Aus der Linearität folgt, daß für y_1, y_2 Lösungen dieser Gleichung auch die Linearkombination $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ Lösung von (H) ist. Die inhomogene Gleichung hat die allgemeine Form:

$$(L) \quad y^n + a_{n-1}y^{n-2} + \dots + a_1y' + a_0 = b(x)$$

Es gilt aufgrund der Linearität offensichtlich: Sind y_1, y_2 Lösungen von (L), so ist $y = y_1 - y_2$ eine Lösung von (H). Mit anderen Worten, unterscheiden sich verschiedene Lösungen der inhomogenen Gleichung nur um Lösungen der entsprechenden homogenen Gleichung! Dadurch gliedert sich das Auffinden von Lösungen von (L) in zwei Schritte:

1. Bestimme *alle* Lösungen y_i der homogenen Gleichung.
2. Bestimme wenigstens eine Lösung y_p der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung gewinnt man dann durch Addition der speziellen Lösung y_p zu einer beliebigen Linearkombination der homogenen Lösungen: $y = y_p + \sum_i C_i y_i$.

Im folgenden Abschnitt diskutieren wir ein Verfahren zum Auffinden spezieller Lösungen y_p .

2.4 Der Störgliedansatz

Der letzte Abschnitt hat auf den wichtigen Zusammenhang zwischen der allgemeinen Lösung und der Lösung des homogenen Falles hingewiesen. Ist die Lösung des homogenen Falles y_h bekannt, muß lediglich eine "spezielle" Lösung y_p gefunden werden. Die allgemeine Lösung gewinnt man dann durch Kombination dieser Beiden.

Der Ansatz in Form eines Störgliedes erlaubt gerade, für spezielle Typen von Inhomogenitäten $b(x)$ eine spezielle Lösung y_p zu finden. Dieses Verfahren setzt allerdings in seiner einfachsten Form **konstante** Koeffizienten voraus! Wir diskutieren zunächst ein Beispiel, und formulieren dann die allgemeine Regel.

Beispiel:

Wir betrachten die DGL $y' - 2y = 1 + x^2$. Die Inhomogenität $b(x)$ ist also ein Polynom 2. Grades. Als Ansatz für die Lösung wählt man nun gerade ebenfalls ein Polynom vom Grad zwei. Offensichtlich sind seine Koeffizienten jedoch zunächst unbestimmt:

$$y_p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$$

Setzt man diesen Ansatz in die DGL ein gewinnt man:

$$A_1 + 2A_2x = 2(A_0 + A_1x + A_2x^2) + 1 - x^2$$

Die A_i können nun durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden. Dazu klammert man die Anteile in x^0 , x und x^2 auf beiden Seiten aus. Offensichtlich müssen die Koeffizienten der selben Potenzen in x identisch sein. Daraus liest man sofort folgende Bedingungen für die A_i ab:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2A_0 + 1 \\ 2A_2 &= 2A_1 \\ 2A_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen in drei Unbekannten haben die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{3}{4} \\ A_1 &= -\frac{1}{2} \\ A_2 + 1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung lautet also $y_p = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$.

Im allgemeinen gilt, daß für "Störfunktionen" $b(x)$ die aus Polynomen, trigonometrischen oder e-Funktionen bestehen Ansätze in diesen Funktionen auf eine spezielle Lösung führen. Wie in unserem Beispiel müssen die zunächst unbekanntes Koeffizienten durch "Koeffizientenvergleich" bestimmt werden. Eine wichtige Fallunterscheidung rührt daher, ob die Konstante a gleich oder ungleich null ist.

Störfunktion $b(x)$	Ansatz
$b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$	$A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$ für $a \neq 0$ $x(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n)$ für $a = 0$
$(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)e^{bx}$	$(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n)e^{bx}$ für $-a \neq b$ $x(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n)e^{bx}$ für $-a = b$

Übungsaufgaben:

Finde für folgende DGL mit Störgliedansatz eine spezielle Lösung:

1. $y' - 5y = x - 2x^2$
2. $y' - 3y = e^{2x}$ Hinweis: Da $-a = 3$ vom Koeffizienten des Exponenten der e-Funktion verschieden ist lautet der Ansatz $y_p = A_0 e^{2x}$
3. $y' - 3y = e^{3x}$. Hinweis: Da $-a = 3$ gleich dem Koeffizienten des Exponenten der e-Funktion ist, lautet der Ansatz $y_p = x A_0 e^{3x}$.

3 DGL zweiter Ordnung

Wir betrachten nun lineare DGL zweiter Ordnung. Zunächst diskutieren wir Elemente einer allgemeinen Lösungstheorie, bevor wir zwei physikalisch relevante Anwendungen besprechen. Unweigerlich werden zahlreiche Sachverhalte in verschiedenen Zusammenhängen wiederholt. Die Absicht ist dabei eine Vertiefung des Stoffes.

3.1 Allgemeine Lösungstheorie für lineare DGL zweiter Ordnung

Wir beschränken uns im Folgenden auf DGL mit konstanten Koeffizienten. Ihre allgemeine Form lautet also:

$$y'' + a_1 y' + a_0 = b(x)$$

Wiederum unterscheiden wir zwischen dem homogenen Fall $b(x) = 0$ und dem inhomogenen Fall $b(x) \neq 0$. Da die DGL linear ist, können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung durch Linearkombination aller homogenen Lösungen plus *einer* speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen (siehe dazu Abschnitt 2.3). Mit anderen Worten hat der homogene Fall also *auch* für inhomogene Gleichungen Bedeutung.

3.1.1 Komplexe Lösungen

Es erweist sich als günstig im allgemeinen komplexe Funktionen $y(x) = u(x) + iv(x)$ (bzw. $y(x) = R e^{i\omega x}$ mit $R, \omega \in \mathbb{R}$ oder $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$) als Lösungen anzusetzen.

Ein komplexer Ansatz vereinfacht die Rechnung und führt im Falle einer *homogenen* und *linearen* DGL auf zwei reelle Lösungen: Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung. Dies sieht man an folgender Betrachtung: Sei \mathcal{D} ein linearer Differentialoperator⁵, und $y(x) = u(x) + iv(x)$ eine komplexe Lösung, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}y(x) &= 0 \\ \mathcal{D}(u(x) + iv(x)) &= 0 \\ \mathcal{D}u(x) + i\mathcal{D}v(x) &= 0 \end{aligned}$$

⁵Lautet unsere DGL etwa $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ ist eine übliche Schreibweise auch: $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right)y = 0$. Der Klammerausdruck kann als (Differential-)Operator $\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$ gedeutet werden, der auf die Funktion $y(x)$ angewendet wird.

Offensichtlich müssen also die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ beides Lösungen sein!

Als Ansatz verwenden wir typischerweise die komplexe e-Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in C$. Wie im reellen ist deren erste Ableitung $y'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda \cdot y(x)$, die zweite Ableitung $y''(x) = \lambda^2 \cdot y(x)$ etc..

Zum Aufspalten in Real- und Imaginärteil verwendet man die Euler-Relation

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

Weitere Kenntnisse über Funktionen komplexer Veränderlicher sind nicht erforderlich!

3.1.2 Der homogene Fall

Wir wenden uns zunächst der homogenen Gleichung $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$ zu. Wir suchen eine Lösung mit Hilfe des Ansatzes:

$$y(x) = e^{\lambda x} \text{ mit } : \lambda \in C$$

Einsetzen führt auf die Gleichung:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

Da die e-Funktion immer positiv ist kann diese Gleichung nur erfüllt werden wenn der Klammerausdruck verschwindet:

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

Diese Gleichung wird auch “charakteristische Gleichung” der DGL genannt. Die Lösung dieser quadratischen Gleichung kann sofort angegeben werden:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

An dieser Stelle zeigt sich ein anderer Vorteil des komplexen Ansatzes, denn da $\lambda \in C$ finden sich in jedem Fall alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es ist jedoch sinnvoll die Fälle zu unterscheiden, in denen beide Nullstellen reell, komplex bzw. entartet sind. Diese Fallunterscheidung wird uns später als “schwache Dämpfung”, “starke Dämpfung” und “aperiodischer Grenzfall” bei der Behandlung des harmonischen Oszillators begegnen.

- $\lambda_{1/2}$ **zwei verschiedene reelle Nullstellen**

Wenn die Wurzel positiv ist gewinnen wir zwei verschiedene reelle Nullstellen. Diese entsprechen den beiden Lösungen $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Die allgemeine Lösung ergibt sich also durch reelle Linearkombination dieser Beiden:

$$y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}$$

Die A_i lassen sich durch die Anfangsbedingungen ausdrücken. Fordert man etwa $y(0) = y_0$ sowie $y'(0) = v_0$, gewinnt man:

$$\begin{aligned} y_0 &= A_1 + A_2 \\ v_0 &= A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung⁶:

$$\begin{aligned} A_1 &= y_0 - A_2 \\ A_2 &= \frac{v_0 - y_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

• $\lambda_{1/2}$ **zwei verschiedene komplexe Nullstellen**

Wird die Wurzel negativ, findet man zwei konjugiert komplexe Nullstellen! Der Imaginärteil ist beide Male $\alpha = \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4} - a_0\right|}$. Die beiden Nullstellen haben also die Form $\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\alpha$. Die Lösung lautet also:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{-\frac{1}{2}a_1 x} e^{+i\alpha x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}a_1 x} e^{-i\alpha x} \\ y(x) &= e^{-\frac{1}{2}a_1 x} (C_1 e^{+i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x}) \\ y(x) &= e^{-\frac{1}{2}a_1 x} (C_1 (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) + C_2 (\cos \alpha x - i \sin \alpha x)) \\ y(x) &= e^{-\frac{1}{2}a_1 x} ((C_1 + C_2) \cos \alpha x + i(C_1 - C_2) \sin \alpha x) \end{aligned}$$

An dieser Stelle erzwingt die Forderung reeller Randbedingungen eine reellwertige Lösung. Diese Rechnung ist in Abschnitt 3.3 angegeben. Eine andere Möglichkeit ist es, Real- und Imaginärteil der Lösung zu bilden:

$$\begin{aligned} \Re(y(x)) &= e^{-\frac{1}{2}a_1 x} (C_1 + C_2) \cos \alpha x \\ \Im(y(x)) &= e^{-\frac{1}{2}a_1 x} (C_1 - C_2) \sin \alpha x \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung findet man auch hier wieder durch Linearkombination:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}a_1 x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x)$$

Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten B_i und den Randbedingungen wird ebenfalls in Abschnitt 3.3 diskutiert.

• $\lambda_{1/2}$ **zwei gleiche reelle Nullstellen**

Zuletzt kann der Fall auftreten, daß die Wurzel verschwindet und somit nur eine doppelte reelle Nullstelle λ_1 vorliegt. Die Lösung $y_1 = A_1 e^{\lambda_1 x}$ alleine kann jedoch nicht beliebigen Anfangsbedingungen angepasst werden. Mit dem "Variation der Konstanten" Verfahren gewinnt man jedoch eine weitere Lösung $y_2 = (A_2 x + A_3) e^{\lambda_1 x}$. Die allgemeine Lösung hat also die Form:

$$y = (A_1 + A_2 x) e^{\lambda_1 x}$$

Die reellen Koeffizienten A_i sind wieder durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Übungsaufgaben:

Löse die folgenden DGL:

1. $y'' + 4y' - 5y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 4y' + 13y = 0$

⁶Die Lösung ist auch wenn die Randbedingungen nicht in dieser einfachen Form gegeben sind immer eindeutig und reell.

3.1.3 Der inhomogene Fall: Störgliedansatz

Wie für DGL erster Ordnung kann eine inhomogene Gleichung zweiten Grades häufig durch einen Ansatz gelöst werden der die gleiche Struktur wie die Inhomogenität besitzt. Dieses Verfahren funktioniert für Polynome, trigonometrische und e-Funktionen als "Störglieder". Unsere Diskussion beschränkt sich auf den Fall eines Polynoms.

Sei $y'' + a_1y' + a_0y = p_n$ gegeben, mit a_i konstant und p_n ein Polynom n-ten Grades. Dann existiert ein Polynom gleichen Grades q_n , sodaß gilt:

- $y_p = q_n$ falls $a_0 \neq 0$
- $y_x p = q_n$ falls $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$
- $y_x^2 p = q_n$ falls $a_0 = a_1 = 0$

Die Koeffizienten des Polynoms $q_n = c_0 + c_1x + c_2x^2$ bestimmt man wieder durch Einsetzen des Ansatzes und Koeffizientenvergleich.

Übungsaufgaben:

Finde eine partikuläre Lösung:

1. $y'' + y' - 2y = x^2$
2. $y'' + y' = x^2$

3.2 Harmonische Schwingungen

Gesucht ist die Lösung der Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + Dx = 0$. Sie ist charakteristisch für alle Vorgänge bei denen die Auslenkung x proportional zur rücktreibenden Kraft $m\ddot{x}$ ist. Der Proportionalitätsfaktor ist also gerade D . Anders formuliert ist die Potentialfunktion dieser Systeme parabolisch ($V \sim x^2 \Rightarrow F = -\nabla V \sim x$). Ein beliebiges Potential kann in der Nähe eines Minimums jedoch durch eine Parabel näherungsweise ausgedrückt werden. Somit reagiert bei "kleinen" Auslenkungen aus dem Potentialminimum ("klein" heisst hier, dass die Parabelnäherung noch funktioniert) jedes System mit harmonischen Schwingungen. Dies erklärt die grosse Bedeutung des harmonischen Oszillators.

Wir bringen die DGL durch Division mit m auf die Standardform:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Üblich ist nun die Definition $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$, denn wir werden später als Lösung eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 finden.

Das Problem ist erst eindeutig definiert, wenn zusätzlich die Randbedingungen bekannt sind. Deren Anzahl entspricht gerade der Ordnung der DGL. In unserem Fall können etwa $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ vorgegeben sein.

- **Ansatz:** $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$$\dot{x} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = -\omega^2 x$$

Einsetzen in die DGL führt auf:

$$-\omega^2 x + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten ("Werte von t ") erfüllt sein soll, gilt offensichtlich $\omega^2 = \omega_0^2$. Die Parameter A und B werden erst durch die Forderung bestimmter Randbedingungen eindeutig festgelegt. Die Forderung eines bestimmten Ortes zur Zeit $t = 0$ führt auf:

$$x_0 = A \sin 0 + B \cos 0$$

$$B = x_0$$

und analog für v_0 :

$$v_0 = A\omega \cos 0 - B\omega \sin 0$$

$$A = v_0/\omega$$

- **Ansatz:** $x(t) = C \sin \omega t + \phi$

Das eine Linearkombination von Sinus und Cosinus äquivalent zu einem Ansatz mit $\sin \omega t$ und Phase ϕ ist, ersieht man unmittelbar der Beziehung:

$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

Durch zweimaliges Ableiten und Einsetzen des Ansatzes wird man wiederum unmittelbar auf die Beziehung $\omega^2 = \omega_0^2$ geführt. Nun müssen also noch C und die Phase durch die Anfangsbedingungen ausgedrückt werden. Man findet $\tan \phi = \frac{\omega x_0}{v_0}$ und $C = \frac{x_0}{\sin \phi}$

- **Ansatz:** $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

Wiederum ergibt Einsetzen der Ableitungen $\omega^2 = \omega_0^2$. Die i.allg. komplexen Koeffizienten A und B sollen wiederum durch die (reellen) Anfangswerte x_0 und v_0 ausgedrückt werden. Die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$x_0 = A + B$$

$$v_0 = i\omega(A - B)$$

Wenn jedoch die Summe zweier komplexer Zahlen eine reelle Zahl ergibt, und ihre Differenz eine rein Imaginäre, sind sie offensichtlich zueinander komplex konjugiert. Es gilt also $A = B^*$. Wir lesen sofort ab:

$$x_0 = A + B = 2 \cdot \operatorname{Re}(A)$$

$$v_0 = i\omega(A - B) = -2\omega \cdot \operatorname{Im}(A)$$

es gilt somit $\operatorname{Re}(A) = (1/2)x_0$ und $\operatorname{Im}(A) = -(v_0/2\omega)$. Aus der Beziehung $A = B^*$ ersieht man ebenfalls, daß $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ reell ist, und somit die Aufspaltung in Imaginär- und Realteil zwecks Gewinnung einer physikalischen Lösung in diesem Beispiel trivial ist.

- **Ansatz:** $x(t) = Ce^{i\omega t + \phi}$ Die Bedingung $\omega^2 = \omega_0^2$ findet man wiederum direkt durch Einsetzen. Die (komplexen) Koeffizienten C und ϕ durch die Anfangsbedingungen auszudrücken ist jedoch sehr länglich...

3.3 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Gesucht wird die reelle und differenzierbare Funktion $x(t)$, die die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7)$$

löst. Wir haben also einen zusätzlichen Dämpfungsterm $\sim \dot{x}$ eingeführt. Zusätzlich gelten die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Die Koeffizienten a und ω_0 sollen reell und *positiv* sein.

Wir wählen den *komplexen* Ansatz $x(t) = e^{\rho t}$, $\rho \in C$, den wir in Abschnitt 3.1.2 schon behandelt haben. Wir werden also auf das selbe charakteristische Polynom geführt, und müssen die selbe Fallunterscheidung hinsichtlich der Nullstellen der quadratischen Gleichung treffen:

$$\rho_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (8)$$

In diesem Abschnitt diskutieren wir deshalb vor allem den Zusammenhang zu den Anfangsbedingungen etwas genauer.

1. Fall: $(a/2)^2 < \omega_0^2$ (schwache Dämpfung)

Hier wird die Wurzel negativ, und $\rho_{1/2}$ können geschrieben werden als

$$\rho_{1/2} = -(a/2) \pm i\omega \quad (9)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (a/2)^2}$. Setzen wir diese Form in die allgemeine Lösung ein finden wir

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-(a/2+i\omega)t} + C_2 e^{-(a/2-i\omega)t} \\ x(t) &= e^{-(a/2)t} \cdot (C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$, und nach Ausklammern der sinus und cosinus Terme gewinnt man schließlich:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(a/2)t} \cdot (C_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2(\cos \omega t - i \sin \omega t)) \\ x(t) &= e^{-(a/2)t} \cdot [(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t] \end{aligned}$$

Die noch unbekanntenen Koeffizienten $C_{1/2}$ können jedoch eindeutig aus den Anfangs- (bzw. Randbedingungen) abgeleitet werden. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2 \\ v_0 &= -(a/2)(C_1 + C_2) + i\omega(C_1 - C_2) \end{aligned}$$

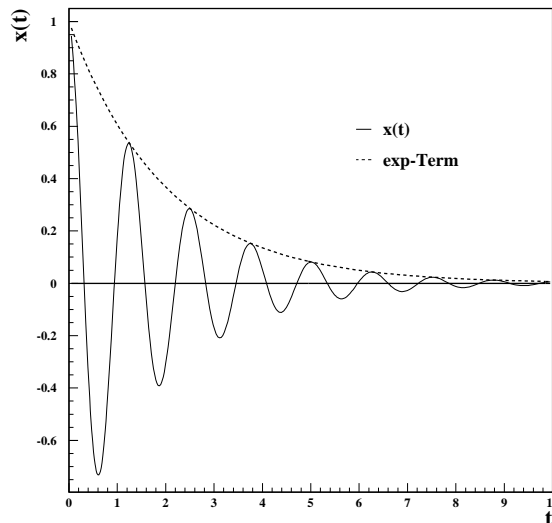


Abbildung 6: Lösung der Differentialgleichung 7 für den Fall $(a/2)^2 < \omega_0^2$. Die Parameterwerte sind $a = 1$, $\omega_0^2 = 25.25$ (das entspricht einem ω von 5). Als Anfangsbedingungen wurde $x_0 = 1$ und $v_0 = 0$ gewählt.

man findet also:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= x_0 \\ C_1 - C_2 &= \frac{v_0 + (a/2)x_0}{i\omega} \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte ein, gewinnt man als vollständige Lösung:

$$x(t) = e^{-(a/2)t} \cdot \left[x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + (a/2)x_0}{\omega} \sin \omega t \right]$$

Man beachte, daß diese Lösung reell, da $C_1 - C_2$ rein imaginär ist. Die Lösung ist also eine Linearkombination aus sinus und cosinus Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω , wobei die Amplitude exponentiell gedämpft wird⁷. Abbildung 6 zeigt den typischen Verlauf dieser Lösung. Falls $a = 0$ ist (keine Reibung) fehlt der dämpfende e -Term, und die Schwingung erfolgt mit der Kreisfrequenz ω_0 .

2. Fall: $(a/2)^2 = \omega_0^2$ (asymptotischer Grenzfall)

Hier hat die Quadratische Gleichung 8 nur eine Lösung, da der Radikant den Wert Null hat. Wir gewinnen als *eine* Lösung also

$$u_1(t) = C_1 \cdot e^{-(a/2)t} \tag{10}$$

⁷Es sei noch einmal daran erinnert, daß die Koeffizienten a und b der Differentialgleichung positiv sind. Dadurch ist der Exponent der e -Funktion also immer negativ.

Da a nach Voraussetzung jedoch positiv und reell ist, beschreibt diese Funktion einen exponentiellen Abfall. Man sieht jedoch gleich, daß dies noch nicht die allgemeine Lösung sein kann. Dadurch das nur eine Integrationskonstante eingeht, kann 10 nicht beliebigen Anfangsbedingungen angepasst werden⁸. Tatsächlich findet man als eine 2. unabhängige Lösung die Funktion

$$u_2(t) = C_2 \cdot t \cdot e^{-(a/2)t} \quad (11)$$

Die allgemeine Lösung wird damit zu $x = u_1 + u_2$, und die Koeffizienten C_i können wiederum eindeutig durch die Anfangswerte ausgedrückt werden. Damit lautet die vollständige Lösung:

$$x(t) = \left(x_0 + \left(v_0 + \frac{a}{2} x_0 \right) t \right) e^{-(a/2)t}$$

Ihr Verlauf ist in Abbildung 7 dargestellt. Je nach Wahl der Randbedingungen kann die Lösung durch die Nulllage schwingen, bevor das exponentielle Abklingen dominiert.

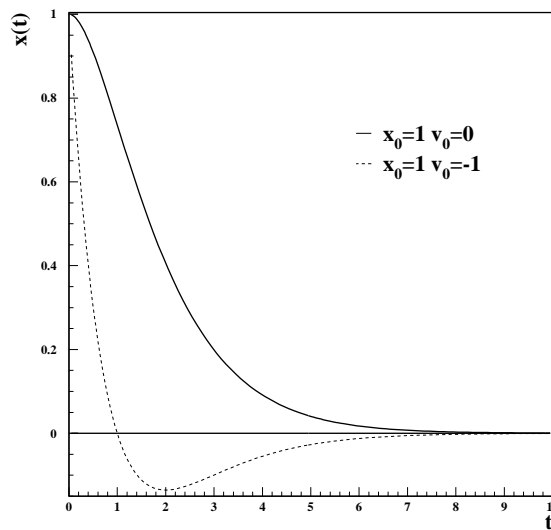


Abbildung 7: Lösungen der Differentialgleichung 7 für den Fall $(a/2)^2 = \omega_0^2$. Die Parameterwerte sind $a = 2$ und $\omega_0^2 = 1$. Für die volle Linie sind die Anfangswerte $x_0 = 1$ und $v_0 = 0$ gewählt worden, wohingegen die gestrichelte Lösung die Anfangsbedingungen $x_0 = 1$ und $v_0 = -1$ erfüllt.

3. Fall: $(a/2)^2 > \omega_0^2$ (starke Dämpfung)

In diesem Fall sind beide Wurzeln reell (und negativ), die Lösung kann sofort als

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\rho_1 t} + C_2 \cdot e^{\rho_2 t} \quad (12)$$

⁸man findet, daß nur bei $x_0 = -\frac{2v_0}{a}$ die Anfangswertbedingungen erfüllbar sind

geschrieben werden. Die zunächst beliebigen C_i hängen mit den Anfangsbedingungen zusammen:

$$\begin{aligned}x_0 &= C_1 + C_2 \\v_0 &= C_1\rho_1 + C_2\rho_2\end{aligned}$$

Man liest ab:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{v_0 - x_0\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \\C_2 &= \frac{x_0\rho_1 - v_0}{\rho_1 - \rho_2}\end{aligned}$$

In 12 eingesetzt führt dies auf die vollständige Lösung:

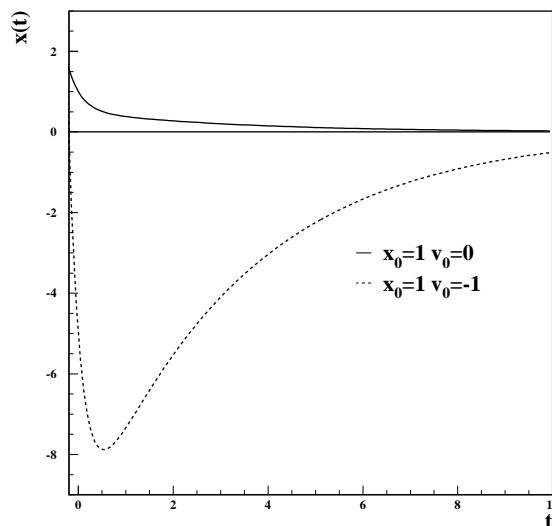


Abbildung 8: Lösung der Differentialgleichung 7 für den Fall $(a/2)^2 < \omega_0^2$. Die Parameterwerte sind $a = 4$ und $\omega_0^2 = 1$. Für die durchgezogene Lösung sind die Anfangswerte $x_0 = 1$ und $v_0 = 0$ gewählt worden, wohingegen die gestrichelte Lösung die Anfangsbedingungen $x_0 = 1$ und $v_0 = -1$ erfüllt.

$$x(t) = \frac{v_0 - x_0\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \cdot e^{\rho_1 t} + \frac{x_0\rho_1 - v_0}{\rho_1 - \rho_2} \cdot e^{\rho_2 t}$$

Das Verhalten dieser Funktion ist im Gegensatz zum 1. Fall (und wie im 2.) aperi-odisch. Ihr Verlauf ist in Abbildung 8 für verschiedene Anfangswerte dargestellt.

3.4 Die erzwungene Schwingung

Wir verallgemeinern nun das Problem des vorherigen Abschnittes zu einer inhomogenen Gleichung, was in der physikalischen Interpretation einer "erzwungenen" Schwingung entspricht. Im Falle einer periodischen Anregung wird man auf Resonanzphänomene geführt. Das einfachste Beispiel ist dabei eine harmonische Anregung (d.h. mittels einer sinus bzw. cosinus-förmigen Funktion). Gesucht wird also die reelle und differenzierbare Funktion $x(t)$, die die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = F_0 \cos \Omega \cdot t \quad (13)$$

löst. Zusätzlich werden die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ gefordert. Die Koeffizienten k , D und Ω sollen reell und *positiv* sein. Im folgenden suchen wir nur eine "spezielle Lösung". Die allgemeine Lösung kann wie üblich durch Kombination mit den homogenen Lösungen gefunden werden.

Wiederum bietet sich ein komplexer Ansatz an. Wir wählen $z(t) = Ae^{i(\Omega t - \phi)}$ ($A \in \mathbb{R}$). Im homogenen Fall gewinnt man wie erwähnt durch einen komplexen Ansatz zwei reelle Lösungen. Im inhomogenen Fall ist offensichtlich nur der Realteil eine Lösung, da wir mit einem reellen Störglied $F_0 \cos \Omega t$ arbeiten. Es erweist sich jedoch als günstig, die DGL zu komplexifizieren, indem wir die Inhomogenität durch $F_0 e^{i\Omega t}$ ersetzen. Als Lösungen gewinnen wir am Ende der Rechnung wiederum den Realteil der Funktion $z(t)$. Es gilt nämlich für eine Lösung $z(t) = x(t) + iy(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + k\dot{z} + Dz &= F_0 e^{i\Omega t} \\ (m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx) + i(m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy) &= F_0(\cos \Omega \cdot t + i \sin \Omega \cdot t) \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil der Gleichung müssen übereinstimmen, weshalb der Realteil die gesuchte Lösung unseres Problems ist.

Dieser Ansatz ist also vom Typ eines "Störgliedansatzes", da er der äusseren Anregung entspricht. Allerdings ist im Exponenten eine zusätzliche Phase ϕ enthalten. Mit anderen Worten erlaubt man, daß die Auslenkung des Systems *verzögert* zur äusseren Anregung auftritt.

Einsetzen unseres Ansatzes führt auf die Gleichung:

$$-m\Omega^2 + ik\Omega + D = \frac{F_0}{A} e^{i\phi} \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow (D - m\Omega^2) + i(k\Omega) = \frac{F_0}{A} e^{i\phi} \quad (15)$$

Zwei komplexe Zahlen stimmen jedoch gerade dann überein, falls Real- und Imaginärteil identisch sind, bzw. Betrag und Phase. Die letzte Gleichung vermischt aber gerade die beiden verschiedenen Darstellungsarten komplexer Zahlen, sodaß man sich erinnern muß, daß für eine beliebige komplexe Zahl z folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \\ z &= |z|e^{i\phi} \end{aligned}$$

Daraus liest man ab:

$$\frac{F_0}{A} = \sqrt{(D - m\Omega^2)^2 + (k\Omega)^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{k\Omega}{D - m\Omega^2}\right)$$

Unsere endgültige Lösung gewinnt man nun durch Bildung des Realteiles, was in der e -Darstellung besonders einfach ist. Die spezielle Lösung der Differentialgleichung 13 lautet:

$$x(t) = A(\Omega) \cdot \cos[\Omega t - \phi(\Omega)] \quad (16)$$

Die Schreibweise $A(\Omega)$ und $\phi(\Omega)$ soll betonen, daß es sich bei Amplitude und Phase um Funktionen der “Anregungsfrequenz” Ω handelt. Aus den Gleichungen 14 liest man ab:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(D - m\Omega^2)^2 + (k\Omega)^2}} \quad (17)$$

Die Beziehung für die Phase ist oben schon angegeben. Hinzukommen die Lösungen der homogenen Gleichung, die wie wir gesehen haben jedoch alle mit t exponentiell abklingen. Deshalb wird für “große” t die Gleichung 16 unser System beschreiben.

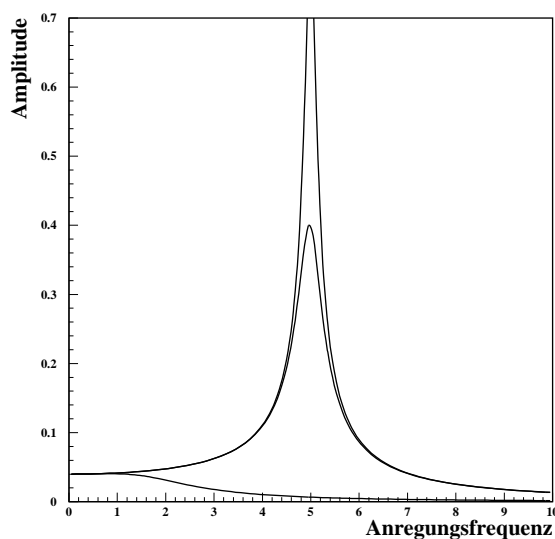


Abbildung 9: Der Graph der Funktion 17 für verschiedene Werte des Parameters k (\approx Dämpfung).

3.4.1 Diskussion der Lösung

Betrachten wir zuerst die Amplitude $A(\Omega)$. Für $\Omega \rightarrow 0$ nimmt sie den Wert F_0/D an, und für $\Omega \rightarrow \infty$ geht sie gegen Null. Wir suchen außerdem die Anregungsfrequenz, die

zu einer maximalen Amplitude führt. Dies liegt offensichtlich bei einem Minimum des Nenners vor, weshalb wir dessen erste Ableitung untersuchen:

$$\frac{d}{d\Omega} \sqrt{(D - m\Omega^2)^2 + (k\Omega)^2} = \frac{2k^2\Omega - 4m\Omega D + 4m^2\Omega^3}{2\sqrt{(D - m\Omega^2)^2 + (k\Omega)^2}}$$

Dessen Nullstelle liegt bei $\Omega_R = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{2m^2}}$. Einige Vereinfachungen bieten sich an: Die Eigenfrequenz unseres Systems ist bekanntlich $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$. Man definiert nun als ‘‘Güte’’ des Systems den Ausdruck $Q = \frac{\omega_0 m}{k}$. Die Güte ist umgekehrt proportional zu dem Energieverlust pro Periode. Damit lautet die Frequenz für die die Amplitude maximal wird: $\Omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Für die Wurzel sind wiederum drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $k^2 < 2mD$

Der Radikant ist positiv, und es liegt ein Maximum bei Ω_R (etwas unterhalb der Frequenz ω_0) vor. Man spricht, das sich das System in Resonanz befindet.

2. Fall: $k^2 > 2mD$

Der Radikant ist negativ, und somit gibt es keine reelle Nullstelle. Die Amplitudenfunktion fällt monoton ab.

3. Fall: $k = 0$

Ohne einen Dämpfungsterm hat die Funktion sogar einen Pol bei $\Omega_R = \omega_0$. Man spricht auch von einer Resonanzkatastrophe.

Die Abbildung 9 zeigt den typischen Verlauf der Amplitude als Funktion der Anregungsfrequenz in diesen drei Fällen.

Die Phase der Funktion 16 ist ebenfalls eine Funktion der Frequenz Ω , im allgemeinen schwingt das Sytem also zur äußeren Anregung ‘‘verschoben’’. Für $\Omega \rightarrow 0$ geht ϕ dabei gegen Null, und für $\Omega \rightarrow \infty$ gegen $-\pi$. Bei Ω_R beträgt der Phasenunterschied gerade $-\frac{\pi}{2}$, sodaß die Auslenkung $\frac{1}{4}$ -Zyklus hinter der Anregung zurück ist.

4 Schlussbetrachtungen

Wir haben auf den vorangehenden Seiten im Wesentlichen 3 verschiedene DGL diskutiert:

$$y' = \lambda y \Rightarrow y(x) \sim e^{\lambda t} \tag{18}$$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y(x) \sim \sin \omega t \tag{19}$$

$$y'' + a_1 y' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y(x) \sim e^{-\frac{a_1}{2}t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \text{ falls } : (\frac{a_1^2}{4} < \omega^2) \tag{20}$$

Gleichung 18 führte auf eine **exponentielle Dämpfung** und Gleichung 19 auf eine **harmonische Schwingung**. Das Erste ist charakteristisch für eine Änderung die proportional zur betrachteten Größe selbst ist, das Zweite für eine Änderung (z.Bsp. Auslenkung)

die proportional zur 2. Ableitung (also Kraft) ist. Gleichung 20 kombiniert nun diese beiden Merkmale und führt folgerichtig auf eine **exponentiell gedämpfte Schwingung**.

Ausserdem haben wir **inhomogene Gleichungen** studiert. In physikalischen Situationen entspricht dies typischerweise einer **äusseren Kraft** auf das System. Im Fall einer Schwingungsgleichung spricht man deshalb von einer **erzwungener Schwingung**. Eine spezielle Lösung findet man in der Regel durch einen Ansatz der die selbe Struktur wie das Störglied hat. Die allgemeine Lösung enthält ebenfalls die Lösungen der entsprechenden homogenen Gleichung. Hat die betrachtete DGL einen Dämpfungsterm "sterben" die homogenen Lösungen jedoch rasch aus, sodaß für grosse Zeiten der Zustand des Systems durch die Störfunktion gegeben ist.

Ist die äussere Anregung **periodisch** mit einer Frequenz Ω können zusätzlich **Resonanzphänomene** auftreten. Die Bedingung dafür lautet $\Omega \approx \omega_0$ – mit ω_0 der Frequenz des ungestörten Systems.