Herleitung von Coriolis– und Fliehkraft

Ein Beobachter in einem *rotierenden* Bezugssystem drückt Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe seines Koordinatensystems $\hat{e}_i$ $(i \in 1, 2, 3)$ aus:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\hat{e}_i(t) \tag{1}$$

$$\vec{v}_R(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i(t)\hat{e}_i(t) \tag{2}$$

$$\vec{a}_R(t) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i(t)\hat{e}_i(t) \tag{3}$$

Der Index R deutet an, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung sich auf das rotierende System beziehen. **Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ ist mit Bedacht nicht indiziert worden, da er (bezüglich seiner Koordinaten) den physikalischen Ort bezeichnet!** Da die Basisvektoren $\hat{e}_i$ also ebenfalls Zeitabhängig sind, ergeben sich die Geschwindigkeit und Beschleunigung aus Sicht eines Inertialsystems zu:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \sum_i \frac{dr_i}{dt}\hat{e}_i(t) + \sum_i r_i \frac{d}{dt}\hat{e}_i(t) \\ &= \vec{v}_R + \sum_i r_i \frac{d}{dt}\hat{e}_i(t) \end{aligned}$$

und für die zweite Ableitung des Ortes:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_i \frac{d^2 r_i}{dt^2}\hat{e}_i(t) + 2\sum_i \frac{dr_i}{dt}\frac{d}{dt}\hat{e}_i + \sum_i r_i \frac{d^2}{dt^2}\hat{e}_i(t) \tag{4}$$

$$= \vec{a}_R(t) + 2\sum_i \frac{dr_i}{dt}\frac{d}{dt}\hat{e}_i + \sum_i r_i \frac{d^2}{dt^2}\hat{e}_i(t) \tag{5}$$

Für den wichtigen Spezialfall eines rotierenden Systems mit *konstanter* Winkel–geschwindigkeit[1] ω (d.h. $\dot{\omega} = 0$), ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_i(t) = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\hat{e}_i(t)\right) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \hat{e}_i}_{=0} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d}{dt}\hat{e}_i}_{=\vec{\omega}\times\hat{e}_i} \tag{7}$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) \tag{8}$$

Einsetzen der Beziehungen 6 und 8 in Gleichung 5 führt auf:

[1] Man beachte, dass die Darstellung der Winkelgeschwindigkeit im Inertial– bzw. rotierenden System sich um ein Vorzeichen unterscheiden!

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \vec{a}_R(t) + 2\sum_i \frac{dr_i}{dt} \underbrace{\frac{d}{dt}\hat{e}_i}_{=\vec{\omega}\times\hat{e}_i} + \sum_i r_i \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\hat{e}_i(t)}_{=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{e}_i)} \\
&= \vec{a}_R(t) + 2\vec{\omega}\times \underbrace{\sum_i \frac{dr_i}{dt}\hat{e}_i}_{=\vec{v}_R} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times \underbrace{\sum_i r_i\hat{e}_i)}_{=\vec{r}} \\
&= \vec{a}_R(t) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_R + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})
\end{aligned}
$$

Besteht der rotierende Beobachter auf der Beschreibung bezüglich seiner Koordinaten, so ist er gezwungen zusätzliche Kräfte einzuführen. Wir lösen die letzte Gleichung nach $\vec{a}_R(t)$ auf und multiplizieren sie mit der Masse m. $m\vec{a}_R$ bezeichnet dabei die Kraft, die der Beobachter im rotierenden System wahrnimmt:

$$
m\vec{a}_R = \underbrace{m(d^2\vec{r}/dt^2)}_{\text{physikalische Kraft}} \underbrace{-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_R}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{Fliehkraft}}
$$

Die Corioliskraft tritt also nur dann auf, wenn das System eine nichtverschwindene Geschwindigkeit $\vec{v}_R$ aufweist. Die Fliehkraft hingegen ist von dieser Bedingung unabhängig.