Die logizistische Grundlegung der Mathematik

Von

Rudolf Carnap (Wien)

Das Problem der logischen und erkenntnistheoretischen Grundlegung der Mathematik ist noch nicht vollständig gelöst. Das Problem beschäftigt die Mathematiker und Philosophen lebhaft; eine Unsicherheit in den Fundamenten dieser „sichersten aller Wissenschaften" ist ja im höchsten Grade beunruhigend. Verschiedene Versuche zur Lösung des Problems sind schon gemacht worden; doch kann von keinem gesagt werden, daß er wirklich alle bestehenden Schwierigkeiten hat überwinden können. Es sind im wesentlichen drei Richtungen, in denen man die Lösung gesucht hat. Ihre Grundgedanken sollen in den drei heutigen Vorträgen dargestellt werden. Diese Richtungen sind: der *Logizismus*, dessen Hauptvertreter Russell ist, der von Brouwer vertretene *Intuitionismus* und Hilberts *Formalismus*.

Wenn ich Ihnen hier in großen Zügen die Hauptlinien des logizistischen Aufbaues der Mathematik vorführen soll, so sehe ich es als meine Aufgabe an, Ihnen nicht nur die Teile des Systems zu zeigen, in denen die Durchführung gut oder wenigstens einigermaßen gut gelingt; sondern ich will gerade auch auf die besonderen Schwierigkeiten hinweisen, auf die der logizistische Aufbau stößt.

Eine der wesentlichsten Fragen im Grundlagenproblem der Mathematik ist die nach dem Verhältnis zwischen Mathematik und Logik. Als „*Logizismus*" wird die Auffassung bezeichnet, daß die Mathematik auf Logik zurückführbar, also nichts anderes als ein Teil der Logik sei. Diese Auffassung ist von Frege (1884) zum erstenmal vertreten worden. Die englischen Mathematiker A. N. Whitehead und B. Russell haben in dem großen Werk „Principia Mathematica" einen systematischen Aufbau der Logik und der aus ihr entwickelten Mathematik gegeben. Wir wollen die These des Logizismus in zwei Teilthesen aufspalten, die nacheinander erörtert werden sollen: 1. die mathematischen *Begriffe* sind aus den logischen Begriffen ableitbar, und zwar durch explizite Definitionen; 2. die mathematischen *Sätze* sind aus den logischen Grundsätzen ableitbar, und zwar durch rein logische Deduktionen.

I. Die Ableitung der mathematischen Begriffe

Damit die These von der Ableitbarkeit der mathematischen Begriffe aus den logischen einen deutlichen Sinn bekommt, müssen wir angeben, welche logischen Begriffe hierbei vorausgesetzt werden. Es sind dies die folgenden. In der *Satzlogik*, die die Verknüpfungen zwischen unzerlegten Sätzen behandelt, sind die wichtigsten Begriffe: Negation eines Satzes p: „non-p" (symbolisch bezeichnet mit „$\sim p$"), die Disjunktion zweier Sätze: „p oder q" („$p \vee q$"), die Konunktion: „p und q" („$p \cdot q$"), die Implikation: „wenn p, so q" („$p \supset q$"). Die *Funktionenlogik* stellt die Begriffe in Form von Funktionen dar; z. B. bedeutet „$f(a)$" (gelesen: „f von a"), daß die Eigenschaft f dem Gegenstand a zukommt. Die wichtigsten Begriffe der Funktionenlogik sind Allgemeinheit und Existenz: „$(x) f(x)$" (gelesen: „für jedes x gilt f von x") bedeutet, daß die Eigenschaft f jedem Gegenstand zukommt; „$(\exists x) f(x)$" (gelesen: „es gibt ein x, so daß f von x") bedeutet, daß f mindestens einem Gegenstand zukommt. Schließlich kommt noch der Begriff der Identität hinzu: „$a = b$" bedeutet, daß a und b Namen desselben Gegenstandes sind.

Die angegebenen Begriffe brauchen nicht alle als undefinierte Grundbegriffe aufgestellt zu werden. Einige von ihnen sind auf andere zurückführbar. Zum Beispiel kann „$p \vee q$" definiert werden als „$\sim(\sim p \cdot \sim q)$", und „$(\exists x) f(x)$" als „$\sim[(x) \sim f(x)]$". Die logizistische These behauptet nun, daß die angegebenen logischen Begriffe hinreichen zur Definition aller mathematischen Begriffe, daß also keine spezifisch mathematischen Begriffe hinzugefügt zu werden brauchen.

Schon vor Frege waren die Mathematiker bei der Untersuchung der Abhängigkeit der mathematischen Begriffe voneinander zu dem Ergebnis gekommen, daß alle Begriffe der Arithmetik schließlich auf die natürlichen Zahlen (d. h. die im gewöhnlichen Zählprozeß verwendeten Zahlen 1, 2, 3 ....) zurückgehen, wenn auch an manchen Stellen noch keine scharfen Definitionen aufgestellt werden konnten. Die *Hauptaufgabe*, die der Logizismus zunächst lösen mußte, bestand somit in der Ableitung der natürlichen Zahlen aus den logischen Begriffen. Die Aufgabe wurde schon von Frege gelöst, Russell und Whitehead kamen unabhängig von ihm zu derselben

Lösung und stellten erst nachträglich die Übereinstimmung fest. Wesentlich an dieser Lösung ist, daß der logische Ort der natürlichen Zahlen richtig erkannt wurde: es sind logische Bestimmungen, die nicht den Dingen, sondern den Begriffen zukommen. Daß einem Begriff eine bestimmte Zahl, etwa 3, als seine Anzahl zukommt (in Zeichen: „$3\,(f)$"), bedeutet, daß drei Gegenstände unter ihn fallen. Dies kann nun tatsächlich mit Hilfe der vorhin genannten logischen Begriffe ausgedrückt werden. Es möge z. B. „$2_m\,(f)$" bedeuten, daß unter den Begriff f mindestens zwei Gegenstände fallen. Dies kann in folgender Weise definiert werden („$=_{Df}$" ist das Definitionszeichen; zu lesen: „soll kraft Definition bedeuten"):

$$2_m(f) =_{Df} (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,[\sim(x = y) \cdot f\,(x) \cdot f\,(y)],$$

in Worten: es gibt ein x und es gibt ein y derart, daß x nicht identisch mit y ist, daß f dem x zukommt und daß f dem y zukommt. Entsprechend sind 3_m, 4_m usw. zu definieren. Und jetzt kann die Anzahl Zwei selbst so definiert werden:

$$2\,(f) =_{Df} 2_m(f) \cdot \sim 3_m(f),$$

in Worten: unter f fallen mindestens zwei, aber nicht mindestens drei Gegenstände. Auch die arithmetischen Operationen können leicht definiert werden, z. B. die Addition zweier Zahlen mit Hilfe der Disjunktion zweier sich ausschließender Begriffe. Ferner wird der Begriff der natürlichen Zahl selbst abgeleitet.

Die Ableitung der weiteren Zahlarten: der positiven und negativen Zahlen, der Brüche, der reellen Zahlen, der komplexen Zahlen, erfolgt nicht, wie es der üblichen Auffassung entsprechen würde, durch Anfügung eines jeweils neuen Teilgebietes zu dem alten, sondern durch Konstruktion eines vollständig neuen Bereiches. Die natürlichen Zahlen bilden nicht eine Teilmenge der Brüche, sondern stehen nur zu gewissen Brüchen in einer bestimmten Zuordnung; die natürliche Zahl 3 und der Bruch $^3/_1$ sind hiernach nicht mehr identisch, sondern einander nur zugeordnet. Ebenso sind der Bruch $^1/_2$ und die zugeordnete reelle Zahl wohl zu unterscheiden.

Hier soll nur von der Definition der *reellen Zahlen* gesprochen werden; die Ableitung der anderen Zahlarten enthält keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Das Problem der reellen Zahlen ist dagegen, das muß deutlich zugestanden werden, bis jetzt noch in keiner der drei Richtungen restlos gelöst. Setzen wir die Reihe der Brüche (der Größe nach geordnet) als schon konstruiert voraus, so besteht die Aufgabe darin, auf Grund dieser Reihe der Brüche die Definition der reellen Zahlen aufzustellen. Gewisse reelle Zahlen, nämlich die rationalen, entsprechen einem Bruch selbst; die übrigen reellen Zahlen, die irrationalen, entsprechen, wie Dedekind (1872) gezeigt hat, einer „Lücke" in der Reihe der Brüche. Teilt man z. B. die (positiven) Brüche ein in die Klasse derjenigen, deren Quadrat kleiner als 2 ist, und die Klasse der übrigen, so bildet diese Einteilung einen „Schnitt" in der Reihe der Brüche. Dieser Schnitt entspricht der irrationalen reellen Zahl $\sqrt{2}$. Dieser Schnitt wird als „Lücke" bezeichnet, weil er durch keinen Bruch markiert wird. Denn weder besitzt jene „Unterklasse" einen größten, noch jene „Oberklasse" einen kleinsten Bruch, da es ja keinen Bruch gibt, dessen Quadrat gleich Zwei ist. In dieser Weise entspricht einer jeden reellen Zahl ein Schnitt in der Reihe der Brüche, und zwar jeder irrationalen reellen Zahl eine Lücke. An diese Überlegungen von Dedekind knüpft Russell an. Da jeder Schnitt durch seine Unterklasse eindeutig bezeichnet ist, so definiert Russell jede reelle Zahl als die Unterklasse des ihr entsprechenden Schnittes in der Reihe der Brüche. So wird z. B. $\sqrt{2}$ definiert als die Klasse (oder Eigenschaft) derjenigen Brüche, deren Quadrat kleiner ist als Zwei, und die rationale reelle Zahl $^1/_3$ als die Klasse aller Brüche, die kleiner sind als der Bruch $^1/_3$. Auf Grund dieser Definition läßt sich die gesamte Arithmetik der reellen Zahlen aufstellen. Auf gewisse Schwierigkeiten, auf die die Durchführung noch stößt, — sie hängen zusammen mit den sogenannten nichtprädikativen Begriffsbildungen — werden wir später eingehen.

Das Wesentliche an der angedeuteten logizistischen Methode der Einführung der reellen Zahlen ist, daß hier diese Zahlen *nicht „postuliert"*, sondern *„konstruiert"* werden. Es wird nicht durch Postulate oder Axiome die Existenz von Gebilden angesetzt, die die Eigenschaften der reellen Zahlen haben, sondern es werden durch explizite Definitionen logische Gebilde konstruiert, die auf Grund dieser Definitionen diejenigen Eigenschaften haben, die man in der Arithmetik den reellen Zahlen beizulegen pflegt. Eine Begriffsbildung ist nicht eine Erschaffung, sondern nur eine Namengebung für etwas, das als vorhanden schon nachgewiesen sein muß; es gibt keine „schöpferischen Definitionen". Diese *„konstruktivistische"* Auffassung gehört zu den Grundtendenzen des Logizismus.

Ebenso werden in konstruktivistischer Weise die weiteren mathematischen Begriffe eingeführt, sowohl die Begriffe der Analysis

(z. B. Konvergenz, Limes, Stetigkeit, Differentialquotient, Integral usw.) als auch die der Mengenlehre (vor allem die Begriffe der transfiniten Kardinal- und Ordinalzahlen).

II. Die Ableitung der mathematischen Sätze

Die *zweite Teilthese* des Logizismus besagt, daß die *mathematischen Sätze* aus den logischen Grundsätzen mit Hilfe der logischen Schlußoperationen deduzierbar sind. Das erforderliche System der Grundsätze der Logik ergibt sich durch eine Vereinfachung des Russellschen Systems; es enthält vier Grundsätze der Satzlogik und zwei der Funktionenlogik. Als Operationsregeln sind eine Einsetzungsregel und eine Implikationsregel (der modus ponens der alten Logik) zu nehmen. Die gleichen Grundsätze und Operationsregeln haben auch Hilbert und Ackermann ihrer Logik zugrunde gelegt.

Die mathematischen Begriffe sind durch explizite Definitionen eingeführt. Eine explizite Definition ist nichts anderes als die Festsetzung einer neuen, meist abkürzenden Schreibweise; gemäß dieser Festsetzung kann die Schreibweise stets wieder eliminiert werden. Daher kann jeder mathematische Satz rückübersetzt werden in einen Satz, in dem nur noch die früher genannten Hauptbegriffe der Logik vorkommen. Die zweite These kann deshalb auch so formuliert werden: jeder beweisbare mathematische Satz ist rückübersetzbar in einen Satz, der nur aus logischen Grundzeichen besteht und in der Logik beweisbar ist.

Bei der Ableitung der mathematischen Sätze stößt der Logizismus jedoch auf verschiedene *Schwierigkeiten*. Zunächst stellt sich heraus, daß manche Sätze der Arithmetik und Mengenlehre, wenn sie in üblicher Weise aufgefaßt werden, zu ihrem Beweis außer den logischen Grundsätzen noch besondere Grundsätze erfordern, die als *Unendlichkeitsaxiom* und als *Auswahlaxiom* (oder Multiplikationsaxiom) bezeichnet werden. Das Unendlichkeitsaxiom besagt, daß es zu jeder natürlichen Zahl eine größere gibt; das Auswahlaxiom besagt, daß es zu jeder Menge von elementfremden, nicht leeren Mengen, (mindestens) eine Auswahlmenge gibt, d. h. eine solche, die mit jeder der Elementmengen genau ein Element gemein hat. Für uns kommt es jetzt nicht auf den Inhalt der beiden Axiome an, sondern auf ihren logischen Charakter: beide sind Existenzsätze. Russell hatte aus diesem Grunde mit Recht Bedenken dagegen, sie als Grundsätze der Logik aufzustellen. Denn die Logik hat es ja nur mit den möglichen Formen zu tun und darf nicht darüber

Aussagen machen, ob etwas existiert oder nicht. Russell fand einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit. Er überlegte, daß die Mathematik ebenfalls eine rein formale Wissenschaft sei; daher darf auch sie von Existenz nicht im absoluten Sinn, sondern nur bedingungsweise sprechen: wenn Gebilde von der und der Art existieren, dann auch Gebilde von der und der Art, die sich aus jenen logisch ergeben. Er verwandelte deshalb einen mathematischen Satz, etwa S, der das Unendlichkeitsaxiom U oder das Auswahlaxiom A erfordert, in einen Bedingungssatz; nicht S, sondern $U \supset S$ bzw. $A \supset S$ wird als Behauptung aufgestellt. Dieser Bedingungssatz ist dann aus den Grundsätzen der Logik ableitbar.

Eine größere Schwierigkeit, vielleicht die Hauptschwierigkeit im Aufbau der Mathematik, hängt zusammen mit einem weiteren, von Russell aufgestellten Axiom, dem sogenannten *Reduzibilitätsaxiom.* Für die Kritiker des Systems der „Principia Mathematica" ist es der größte Stein des Anstoßes gewesen, und mit Recht. Wir sind mit den Gegnern des Logizismus darin einig, daß die Aufstellung dieses Axioms unzulässig ist. Die Lücke, die durch die Ausmerzung dieses Axioms entsteht, ist freilich noch nicht in einer restlos befriedigenden Weise ausgefüllt; davon wird später ausführlich zu sprechen sein. Die gemeinte Schwierigkeit ist verknüpft mit der Russellschen „*Typentheorie*", die wir in ihren Hauptzügen darstellen wollen. Wir haben eine „einfache Typentheorie" und eine „verzweigte Typentheorie" zu unterscheiden; die letztere ist eine von Russell vorgenommene, inzwischen aber durch Ramsey als unnötig erkannte Verschärfung der ersteren.

Wenn wir uns hier der Einfachheit halber auf einstellige Funktionen (Eigenschaften) beschränken und von mehrstelligen Funktionen (Beziehungen) absehen, so besteht die Typentheorie in der folgenden Einteilung der Ausdrücke in verschiedene „Typen". Zum Typus 0 gehören die Namen der Gegenstände („Individuen") des Denkbereiches, der in dem betreffenden Zusammenhang behandelt wird (etwa a, b ....). Zum Typus 1 gehören die Eigenschaften dieser Gegenstände (etwa $f(a)$, $g(a)$ ....). Zum Typus 2 gehören die Eigenschaften dieser Eigenschaften (etwa $F(f)$, $G(f)$ ....; hierher gehört z. B. der früher definierte Begriff $2\ (f)$). Zum Typus 3 gehören die Eigenschaften von Eigenschaften von Eigenschaften usf. Die Hauptregel der Typentheorie besagt nun: Jeder Begriff gehört zu einem bestimmten Typus und kann nur auf Ausdrücke des nächstniederen Typus mit Sinn bezogen werden. Daraus folgt, daß

Sätze von der Form $f(a)$, $F(f)$, $2(f)$ stets sinnvoll sind, nämlich entweder wahr oder falsch; dagegen sind Verbindungen wie $f(g)$, $f(F)$ weder wahr noch falsch, sondern sinnlos. Insbesondere sind hiernach auch Ausdrücke wie $f(f)$ oder $\sim f(f)$ sinnlos; d. h. man kann von einer Eigenschaft weder mit Sinn aussagen, sie komme sich selbst zu, noch, sie komme sich selbst nicht zu. Diese letztere Konsequenz ist, wie wir sehen werden, von Bedeutung für die Ausschaltung der Antinomien.

Hiermit ist die einfache Typentheorie in ihren Hauptzügen umrissen. Sie wird von den meisten Vertretern der modernen Logik als berechtigt und notwendig anerkannt. Russell hat in seinem System darüber hinaus noch die verzweigte Typentheorie aufgestellt, die jedoch heute meist abgelehnt wird. Hiernach wurden die Eigenschaften eines jeden Typus noch in „Ordnungen" unterteilt; diese Einteilung nahm nicht mehr Bezug auf die Art der Gegenstände, für die die Eigenschaft gilt, sondern auf die Form der Definition, durch die sie eingeführt ist. Über die Gründe, aus denen Russell diese Verschärfung für notwendig hielt, werden wir später sprechen. Die Folge der Aufstellung der verzweigten Typentheorie war, daß beim Aufbau der Mathematik, besonders in der Theorie der reellen Zahlen, gewisse Schwierigkeiten auftraten: Viele der grundlegenden Sätze ließen sich nicht nur nicht beweisen, sondern überhaupt nicht aussprechen. Diese Schwierigkeit konnte Russell nur durch einen Gewaltakt überwinden, nämlich durch die Aufstellung des Reduzibilitätsaxioms, durch das die verschiedenen Ordnungen eines Typus sich in gewisser Hinsicht auf die niederste Ordnung des Typus reduzieren ließen. Die einzige Begründung für dieses Axiom bestand jedoch in dem Umstand, daß kein anderer Ausweg aus der durch die verzweigte Typentheorie hervorgerufenen Schwierigkeit sichtbar war. Später, in der 2. Auflage der „Principia Mathematica" (1925), verwarf Russell selbst das Reduzibilitätsaxiom, veranlaßt durch die von Wittgenstein geübte Kritik. Er glaubte jedoch, die verzweigte Typentheorie nicht entbehren zu können, und gab die Ratlosigkeit der Situation zu. Hier wird deutlich, wie wichtig es nicht nur für den Logizismus, sondern für jeden Lösungsversuch des Grundlagenproblems der Mathematik wäre, wenn man zeigen könnte, daß man mit der einfachen Typentheorie allein auskommt. Ramsey, ein junger englischer Mathematiker, Schüler von Russell, der leider in diesem Jahr gestorben ist, hat 1926 einen Versuch in dieser Richtung unternommen, von dem wir noch sprechen werden.

III. Das Problem der nichtprädikativen Begriffsbildungen

Wenn wir überlegen wollen, ob die einfache Typentheorie ausreicht oder verschärft werden muß, so werden wir zunächst einmal nachsehen, welche Gründe denn Russell veranlaßt haben, diese Verschärfung trotz ihrer höchst unbequemen Folgen vorzunehmen. Da finden wir zwei Gründe, die eng miteinander zusammenhängen: die Notwendigkeit der Ausschaltung der logischen Antinomien und das sogenannte circulus-vitiosus-Prinzip.

Als *„logische Antinomien"* bezeichnet man Widersprüche, die zunächst in der Mengenlehre (als sogenannte „Paradoxien") auftraten, von denen Russell aber zeigte, daß sie allgemein-logischen Charakters sind: In der Logik selbst lassen sich solche Widersprüche aufweisen, wenn keine Typentheorie vorausgesetzt wird. Die einfachste Antinomie ist die des Begriffs „imprädikabel". Man definiert: Eine Eigenschaft ist „imprädikabel", wenn sie sich selbst nicht zukommt. Ist nun die Eigenschaft „imprädikabel" selbst imprädikabel? Angenommen, ja; dann käme sie sich selbst zu, wäre also, laut Definition von „imprädikabel", nicht imprädikabel. Angenommen, nein; dann käme sie sich selbst nicht zu, wäre also, laut Definition von „imprädikabel", imprädikabel. Nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt entweder ja oder nein; in beiden Fällen kommen wir aber zu einem Widerspruch. Ein anderes Beispiel ist die von Grelling aufgestellte Antinomie des Begriffes „heterologisch"; diese ist völlig analog zu der eben genannten, bezieht sich aber nicht auf Eigenschaften, sondern auf Eigenschaftsworte. Man definiert: Ein Eigenschaftswort ist „heterologisch", wenn die durch dieses Wort bezeichnete Eigenschaft ihm selbst nicht zukommt. (Beispiel: das Wort „einsilbig" ist heterologisch; denn es ist selbst nicht einsilbig.) Hier führt, wie leicht ersichtlich, sowohl die Annahme, das Wort „heterologisch" sei selbst heterologisch, als auch die entgegengesetzte Annahme zu einem Widerspruch. Von Russell selbst und von anderen Logikern sind zahlreiche derartige Antinomien aufgestellt worden.

Ramsey hat nun gezeigt, daß die Antinomien in zwei ganz verschiedene Arten zerfallen. Die der ersten Art sind in logischen Zeichen darstellbar; sie werden „logische Antinomien" (im engeren Sinn) genannt. Zu ihnen gehört das genannte Beispiel „imprädikabel". Ramsey hat nachgewiesen, daß die Antinomien dieser Art schon durch die einfache Typentheorie ausgeschaltet werden.

Z. B. kann der Begriff „imprädikabel“ gar nicht definiert werden, wenn die einfache Typentheorie vorausgesetzt wird; denn nach ihr ist ja ein Ausdruck von der Form, eine Eigenschaft komme sich selbst nicht zu ($\sim f(f)$), sinnlos und unzulässig.

Die Antinomien der zweiten Art werden als „semantische“ oder „epistemologische“ bezeichnet. Zu ihnen gehört die früher genannte Antinomie „heterologisch“, ferner die den Mathematikern bekannte Antinomie der kleinsten natürlichen Zahl, die in deutscher Sprache nicht mit weniger als 100 Buchstaben definiert werden kann. Ramsey hat nun gezeigt, daß diese Antinomien zweiter Art in der symbolischen Sprache der Logik und Mathematik gar nicht gebildet werden können und daher für den Aufbau der Mathematik aus der Logik überhaupt nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Der Umstand, daß sie in der Wortsprache auftreten, hatte Russell veranlaßt, besondere Beschränkungen der Logik zu ihrer Ausschaltung einzuführen, eben jene verzweigte Typentheorie. Aber vielleicht beruht ihre Entstehung nur auf einem Fehler unserer üblichen Wortsprache.

Da die Antinomien erster Art schon durch die einfache Typentheorie ausgeschaltet werden und die zweiter Art in der Logik nicht auftreten, erklärte Ramsey die verzweigte Typentheorie und damit auch das Reduzibilitätsaxiom für überflüssig.

Wie steht es aber nun mit Russells zweitem Grund für eine Verschärfung der Typentheorie, nämlich dem circulus-vitiosus-Prinzip? Dieses Prinzip lautet: „Keine Gesamtheit kann Glieder enthalten, die nur mit Hilfe dieser Gesamtheit definiert werden können.“ Das Prinzip kann auch ausgesprochen werden als *„Verbot der nichtprädikativen Begriffsbildungen“*; dabei heißt eine Begriffsbildung (Definition) „nichtprädikativ“, wenn sie ein Gebilde definiert unter Bezugnahme auf eine Gesamtheit, zu der das Gebilde gehört. (Der Begriff „nichtprädikativ“ hat nichts zu tun mit dem vorhin genannten Pseudobegriff „imprädikabel“.) Russells Hauptgrund für das Verbot war seine Meinung, daß aus der Übertretung dieses Verbotes die Antinomien entständen. Von einem etwas anderen Gesichtspunkt aus ist das Verbot vor Russell von Poincaré und nach Russell von Weyl mit Nachdruck aufgestellt worden; man wies hier darauf hin, daß ein nichtprädikativ definierter Begriff infolge des Zirkels in der Definition sinnlos sei. Wir wollen uns diese Auffassung an einem Beispiel deutlich machen.

Man kann den Begriff der „induktiven Zahl“ (der dem Begriff der natürlichen Zahl einschließlich der Null entspricht) so definieren:

eine Zahl heißt „induktiv", wenn sie alle erblichen Eigenschaften der Null besitzt; dabei soll eine Eigenschaft „erblich" genannt werden, wenn sie, sobald sie einer Zahl n zukommt, stets auch der nächstfolgenden Zahl $n + 1$ zukommt. In Zeichen:

$$Ind\,(x) =_{Df} (f)\,[(Erbl\,(f) \cdot f\,(0)) \supset f\,(x)].$$

Um diese Definition als zirkelhaft und unanwendbar zu erweisen, pflegt man in folgender Weise zu argumentieren. Im Definiens kommt der Ausdruck „(f)" vor, d. h. „für alle Eigenschaften (von Zahlen)". Da zu allen Eigenschaften auch die Eigenschaft „induktiv" gehört, so kommt die zu definierende Eigenschaft selbst schon in versteckter Weise im Definiens vor, soll also durch sich selbst definiert werden, was offenbar unzulässig ist. Die Sinnlosigkeit des in dieser nichtprädikativen Weise definierten Begriffs zeige sich, so sagt man, besonders deutlich, wenn man sein Vorliegen im Einzelfall beweisen wolle. Um etwa zu prüfen, ob die Zahl Drei induktiv ist, muß nach Definition untersucht werden, ob jede Eigenschaft, die erblich ist und die der Null zukommt, auch der Drei zukommt. Wenn ich dies für jede Eigenschaft untersuchen muß, so auch für die Eigenschaft „induktiv", die ja auch eine Eigenschaft von Zahlen ist. Ich muß also, um festzustellen, ob die Zahl Drei induktiv ist, unter anderem auch feststellen, ob die Eigenschaft „induktiv" erblich ist, ob sie der Null zukommt, und schließlich — und das ist der springende Punkt —, ob sie der Drei zukommt. Das aber würde bedeuten, daß die Feststellung überhaupt nicht möglich ist.

Bevor wir darauf eingehen, wie Ramsey versucht hat, diesen Gedankengang zu widerlegen, müssen wir uns noch klarmachen, wie Russell durch diese Überlegungen zur verzweigten Typentheorie geführt wurde. Er argumentierte so: Da es unzulässig ist, eine Eigenschaft zu definieren durch einen Ausdruck, der sich auf „alle Eigenschaften" bezieht, so müssen wir die Eigenschaften (des Typus 1) unterteilen: zur „ersten Ordnung" rechnen wir solche Eigenschaften, in deren Definition der Ausdruck „alle Eigenschaften" nicht auftritt; zur „zweiten Ordnung" solche, in deren Definition der Ausdruck „alle Eigenschaften erster Ordnung" auftritt; zur „dritten Ordnung" solche, in deren Definition der Ausdruck „alle Eigenschaften zweiter Ordnung" auftritt; usw. Der Ausdruck „alle Eigenschaften" ohne Bezug auf eine bestimmte Ordnung wird für unzulässig erklärt. Hiernach kommt dann niemals in der Definition einer Eigenschaft eine Gesamtheit vor, zu der sie selbst gehört.

Z. B. wird die Eigenschaft „induktiv" jetzt als Eigenschaft zweiter Ordnung in der folgenden, nicht mehr nichtprädikativen Weise definiert: Eine Zahl heißt „induktiv", wenn sie alle erblichen Eigenschaften erster Ordnung, die der Null zukommen, besitzt. Durch diese verzweigte Typentheorie werden nun aber erhebliche Schwierigkeiten für die Behandlung der reellen Zahlen hervorgerufen. Eine reelle Zahl wird, wie wir früher gesehen haben, definiert als Klasse oder, was im Grunde das gleiche bedeutet, als Eigenschaft von Brüchen. Z. B. wird, wie wir gesehen haben, $\sqrt{2}$ definiert als Klasse oder Eigenschaft derjenigen Brüche, deren Quadrat kleiner ist als Zwei. Da nun nach der verzweigten Typentheorie der Ausdruck „für alle Eigenschaften" ohne Bezug auf eine bestimmte Ordnung unzulässig ist, so darf auch der Ausdruck „für alle reellen Zahlen" sich nicht auf alle reellen Zahlen schlechthin beziehen, sondern nur auf die reellen Zahlen einer bestimmten Ordnung. Zur ersten Ordnung gehören dann diejenigen reellen Zahlen, in deren Definition ein Ausdruck von der Form „für alle reellen Zahlen" nicht vorkommt; zur zweiten Ordnung gehören diejenigen, in deren Definition ein solcher Ausdruck vorkommt, der dann aber auf „alle reellen Zahlen erster Ordnung" zu beschränken ist; usf. Es wird nun keine Definition und auch kein Satz mehr zugelassen, die sich auf alle reellen Zahlen schlechthin beziehen. Damit fallen aber viele der wichtigsten Begriffsbildungen und Sätze der Theorie der reellen Zahlen fort. Russell sah keinen Ausweg aus dieser Schwierigkeit, nachdem er seinen früheren Versuch, nämlich die Aufstellung des Reduzibilitätsaxioms, selbst als unzulässig erkannt hatte.

Hier liegt das *schwierigste Problem*, das die Aufgabe der Grundlegung der Mathematik gegenwärtig bietet: Wie ist die Logik zu gestalten, wenn einerseits die Gefahr der Sinnlosigkeit nichtprädikativer Begriffsbildungen vermieden werden soll, andererseits aber die Theorie der reellen Zahlen als Klassen (oder Eigenschaften) von Brüchen in befriedigender Weise aufgebaut werden soll?

IV. Versuch einer Lösung

Ramsey hat (1926) einen Aufbau der Mathematik entworfen, in dem er die genannte Schwierigkeit in kühner Weise dadurch zu überwinden sucht, daß er die verbotenen nichtprädikativen Begriffsbildungen als durchaus zulässig erklärt. Sie enthalten zwar, so sagt er, einen circulus; aber dieser circulus ist nicht vitiosus, sondern unschädlich. Er verweist auf die Kennzeichnung „der längste Mann in diesem Zimmer". Hier wird etwas gekennzeichnet mit Hilfe einer Gesamtheit, zu der es selbst gehört. Und doch hält niemand diese Kennzeichnung für unzulässig, da ja die gekennzeichnete Person schon vorher existiert und durch die Kennzeichnung nicht erschaffen, sondern nur herausgehoben wird. Ebenso, meint Ramsey, sei es nun auch mit den Eigenschaften; die Gesamtheit der Eigenschaften existiere schon an sich; daß wir Menschen endliche Wesen sind und daher nicht jede dieser unendlich vielen Eigenschaften für sich bezeichnen können, sondern manche von ihnen nur durch Bezugnahme auf die Gesamtheit aller Eigenschaften kennzeichnen können, sei ein empirisches Faktum, das die Logik nichts angehe.

Auf Grund dieser Auffassung läßt Ramsey die nichtprädikativen Begriffsbildungen zu. So kann er dann mit der einfachen Typentheorie auskommen und trotzdem die erforderlichen mathematischen Begriffsbildungen, besonders in der Theorie der reellen Zahlen, vornehmen.

Dieses erfreuliche Ergebnis ist gewiß verlockend. Aber mir scheint, wir dürfen uns dadurch doch nicht verleiten lassen, die von Ramsey zugrunde gelegte Auffassung anzunehmen, daß die Gesamtheit der Eigenschaften schon vor ihrer Kennzeichnung durch Definitionen existiere. Mir scheint, eine solche Auffassung ist nicht mehr weit entfernt von einem Glauben an ein platonisches Reich der Ideen, die an sich bestehen, unabhängig davon, ob und in welcher Form die endlichen Menschen imstande sind, sie zu denken. Ich glaube, wir müssen an der Auffassung Freges festhalten, daß auch in der Mathematik nur das als vorhanden angenommen werden darf, dessen Existenz bewiesen ist, und das bedeutet: mit endlich vielen Schritten bewiesen ist. Darin möchte ich auch den Intuitionisten zustimmen: Die Endlichkeit jeder logisch-mathematischen Operation, jedes Beweises und jeder Definition, ist nicht zu fordern wegen eines zufälligen empirischen Faktums, das den Menschen betrifft, sondern gehört zum Wesen der Sache. Man hat die Mathematik der Intuitionisten wegen dieser Auffassung eine „anthropologische Mathematik" genannt. Mir scheint, man müßte in Analogie dazu Ramseys Mathematik eine „theologische" Mathematik nennen. Denn er setzt sich bei der Gesamtheit der Eigenschaften, von der er spricht, über die Schranken des wirklich Erkennbaren und Definierbaren hinweg, geht gewissermaßen vom Standpunkt eines unendlichen Geistes aus, der nicht an die erbärmliche Notwendigkeit gebunden ist, jedes Gebilde in schrittweisem Fortgang konstruieren zu müssen.

So wird es für uns zur *entscheidenden Frage:* Ist es möglich, Ramseys Ergebnis beizubehalten, ohne seine absolutistische Auffassung mitzumachen? Ramseys Ergebnis, das ist: Beschränkung auf die einfache Typentheorie, und trotzdem Möglichkeit der Definition der mathematischen Begriffe, insbesondere in der Theorie der reellen Zahlen. Dieses Ergebnis wird erreicht, wenn wir, wie Ramsey, die nichtprädikativen Begriffsbildungen für zulässig erklären. Aber können wir das ohne Ramseys Begriffsabsolutismus? Ich möchte hier versuchen, eine bejahende Antwort auf diese Frage anzudeuten.

Wir greifen zurück auf das Beispiel der Eigenschaft „induktiv", für die wir eine nichtprädikative Definition aufgestellt hatten:

$$Ind\,(x) =_{Df} (f)\,[(Erbl\,(f) \cdot f\,(0)) \supset f\,(x)].$$

Wir wollen noch einmal prüfen, ob die Anwendung dieser Definition, also die Feststellung, ob der Begriff in einem bestimmten Einzelfalle zutrifft oder nicht, wirklich auf einen Zirkel führt und damit unmöglich wird. Daß die Zahl 2 induktiv sei, würde nach der gegebenen Definition bedeuten:

$$(f)\,[(Erbl\,(f) \cdot f\,(0)) \supset f\,(2)],$$

in Worten: Es gilt allgemein, daß eine beliebige Eigenschaft f, die erblich ist und der Null zukommt, auch der Zwei zukommt. Auf welchem Wege ist nun die Gültigkeit einer solchen Allaussage zu prüfen? Müßte man dazu jede einzelne Eigenschaft hernehmen, so ergäbe sich allerdings ein unlösbarer Zirkel; denn dabei würden wir auch auf die Eigenschaft „induktiv" stoßen. Die Feststellung wäre dann grundsätzlich unmöglich und daher der Begriff sinnlos. Aber die Prüfung einer logischen oder mathematischen Allaussage besteht nicht in einer Durchlaufung der Reihe der Einzelfälle. Denn es handelt sich dabei ja meist, und so auch in diesem Falle und überhaupt stets bei den nichtprädikativen Definitionen, um eine unendliche Gesamtheit. Der Gedanke an die Notwendigkeit der Durchlaufung beruht auf einer Verwechslung der „numerischen" Allgemeinheit, die sich auf vorgegebene Gegenstände bezieht, mit der „spezifischen" Allgemeinheit[1]). Die spezifische Allgemeinheit wird nicht dadurch festgestellt, daß Einzelfälle durchlaufen werden, sondern dadurch, daß aus gewissen Bestimmungen gewisse andere logisch abgeleitet

[1]) Vgl. hierzu: F. Kaufmann, Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung. Wien 1930.

werden. In unserem Beispiel: daß die Zahl Zwei induktiv sei, bedeutet, daß aus der Bestimmung „erblich sein und der Null zukommen“, die Bestimmung „der Zwei zukommen“ logisch folgt; in Zeichen: Aus „*Erbl* $(f) \cdot f(0)$“ kann, bei unbestimmt bleibendem f, durch logische Operationen abgeleitet werden „$f(2)$“. Und dies ist nun tatsächlich der Fall. Zunächst ist die Ableitung von „$f(0)$“ aus „*Erbl* $(f) \cdot f(0)$“ trivial; damit ist die Induktivität der Zahl Null bewiesen. Die weiteren Schritte beruhen auf der Definition des Begriffs „erblich“:

$$Erbl(f) =_{Df} (n)\,[f(n) \supset f(n+1)].$$

Mit Hilfe dieser Definition ist, wie leicht ersichtlich, aus „*Erbl* $(f) \cdot f(0)$‘, ableitbar „$f(0+1)$“, also „$f(1)$“. Damit ist bewiesen, daß die Zahl Eins induktiv ist. Unter Benützung dieses Ergebnisses ist, wiederum mit Hilfe der Definition der Erblichkeit, aus „*Erbl* $(f) \cdot f(0)$“ ableitbar „$f(1+1)$“, also „$f(2)$“. Damit ist die Zahl Zwei als induktiv erwiesen. Wir sehen also, daß die Definition der Induktivität, obwohl sie nichtprädikativ ist, doch die Anwendung nicht hindert: der Beweis, daß die definierte Eigenschaft im Einzelfall vorliegt (bzw. nicht vorliegt), kann geführt werden; die Definition ist damit als sinnvoll erwiesen.

Wenn wir den Gedanken an die Notwendigkeit eines Durchlaufens der Einzelfälle fallen lassen und uns klarmachen, daß die Allgemeingültigkeit einer Aussage für beliebige Eigenschaften nichts anderes bedeutet als ihre logische (genauer: tautologische) Geltung bei unbestimmter Eigenschaft, so kommen wir zu der Überzeugung, daß die nichtprädikativen Definitionen logisch zulässig sind. Ist eine Eigenschaft nichtprädikativ definiert, so mag die Entscheidung ihres Vorliegens oder Nichtvorliegens in einem bestimmten Einzelfalle zwar unter Umständen Schwierigkeiten machen, vielleicht auch unmöglich sein, falls die Logik kein entscheidungsdefinites System darstellt. Keineswegs aber wird diese Entscheidung infolge der Nichtprädikativität prinzipiell für alle Fälle unmöglich.

Wenn die hiermit skizzierte Auffassung sich als haltbar erweist, so wäre damit dem Logizismus aus seiner größten Schwierigkeit geholfen, die darin besteht, zwischen der Scylla des Reduzibilitätsaxioms und der Charybdis des Zerfalls der reellen Zahlen in verschiedene Ordnungen glücklich hindurchzugelangen.

Der Logizismus hat in der hier vertretenen Form mit jeder der beiden anderen Richtungen gewisse Züge gemein. Mit dem *Intuitionismus* verbindet ihn die konstruktivistische Tendenz in der Begriffsbildung, die ja auch Frege schon mit Nachdruck vertreten hat: Ein Begriff darf nicht axiomatisch eingeführt werden, sondern muß aus den undefiniert vorausgesetzten Grundbegriffen durch schrittweise explizite Definitionen konstruiert werden. Die Anerkennung der nichtprädikativen Definitionen scheint auf den ersten Blick dieser Tendenz zu widersprechen; das ist jedoch nur bei dem Aufbau in der von Ramsey vertretenen Form der Fall. Wir rechnen, ebenso wie die Intuitionisten, zu den Eigenschaften nur diejenigen Ausdrücke (genauer: Ausdrücke von der Form eines Satzes mit éiner freien Variabeln), die aus undefinierten Grundeigenschaften des betreffenden Bereiches nach bestimmten Konstruktionsregeln in endlich vielen Schritten konstruiert sind. Der Unterschied liegt aber darin, daß wir nicht nur die von den Intuitionisten angewandten Konstruktionsregeln für gültig ansehen (es sind die des sogenannten „engeren Funktionenkalküls"), sondern darüber hinaus auch die Verwendung des Ausdruckes „für alle Eigenschaften" (die Operationen des sogenannten „weiteren Funktionenkalküls").

Auch mit dem *Formalismus* besteht eine methodische Verwandtschaft. Der Logizismus stellt sich die Aufgabe, das logisch-mathematische System so aufzubauen, daß zwar die Aufstellung der Ausgangsformeln und der Operationsvorschriften im Hinblick auf die Bedeutung der Grundbegriffe geschieht, daß aber *innerhalb des Systems* die Kette der Deduktionen und die der Definitionen formalistisch weitergeführt wird, rein kalkülmäßig, d. h. ohne auf die Bedeutung der Grundbegriffe Bezug zu nehmen.