

führen. Man brauchte z. B., um genügend viel Streuprozesse zu haben, eine viel zu ausgedehnte Gaswolke. Anders aber steht es, wenn man die äußerst verdünnten Atmosphären gewisser Sterne und Nebel als Riesenlaboratorien für solche Versuche betrachtet. Auf den starken Einfluß des Strahlungsdruckes für das Verhalten dieser Atmosphären ist von den Astronomen schon oft hingewiesen worden<sup>1)</sup>. Betrachten wir z. B. die sog. Riesensterne, so zeigt sich, daß in gewissen von ihnen alle oben aufgezählten Bedingungen für einen positiven Erfolg unseres Experiments erfüllt sind. Die Masse mancher dieser Sterne ist von der gleichen Größenordnung, wie die der Sonne. Ihr Durchmesser von der Größenordnung der Marsbahn [was in Einzelfällen mittels der MICHELSONSchen Interferenzmethode so direkt wie möglich bestimmt ist<sup>2)</sup>]. Aus diesen Daten kann man überschlagen, daß die mittlere Dichte eines solchen Sternes so niedrig ist, wie etwa die Dichte des Gasrestes in gewöhnlichen Röntgenröhren. In den höheren Schichten seiner Atmosphäre, die wir wegen ihres Leuchtens bei der Bestimmung des Durchmessers des Sternes mitmessen, wird die Größenordnung des Druckes  $10^{-8}$  bis  $10^{-10}$  mm Quecksilbersäule sicherlich nicht übersteigen. Somit sind alle Vorbedingungen für eine ungestörte Fluoreszenz der Atmosphäre erfüllt, die vom Licht des heißen Kerns des Sterns; angeregt wird<sup>3)</sup>. Die Einwirkung der Zusammenstöße von Atomen fällt fort, und eine sehr große Häufigkeit der Streuprozesse wird durch die große Schichtdicke gewährleistet. In der Tat fällt das Experiment in diesem Riesenlaboratorium wie erwartet aus, denn das Auftreten von Emissionslinien am langwelligeren Rand der Absorptionslinien ist hierbei eine altbekannte und häufige Beobachtung<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> SCHWARZSCHILD, EDDINGTON, MILNE.

<sup>2)</sup> Für mancherlei astronomische Angaben und Hinweise bin ich Herrn Kollegen KIENLE zu bestem Dank verpflichtet.

<sup>3)</sup> Auf die Bedeutung der Fluoreszenz für das Leuchten solcher Schichten hat neuerdings ROSSELAND, *Astrophys. Journ.*, hingewiesen.

<sup>4)</sup> Siehe z. B. die schönen Spektrogramme von R. CURTIS (*Stern P. Cygni 1911*), *Public. Astr. Obs. Univ. Michigan*, vol. III, S. 22. 1923.

Die Astronomen und Physiker haben sich mit diesem Phänomen wegen seiner Auffälligkeit schon öfters beschäftigt. In einigen Fällen hat man zwei Himmelskörper angenommen<sup>1)</sup>, von denen der eine Absorptionslinien, der andere Emissionslinien hat, in anderen Fällen hat man an eine Einwirkung von anomaler Dispersion in der Umgebung der Spektrallinien gedacht<sup>2)</sup>. Besonders diese letztere Erklärung ist durchaus berechtigt, aber sie muß das Vorkommen turbulenter Vorgänge in der Atmosphäre, das Auftreten isolierter Wolken absorbierender Materie innerhalb derselben und vor allen Dingen echte Absorption durch Zusammenstöße angeregter Atome voraussetzen. In vielen Fällen mag sie das Rechte treffen<sup>3)</sup>, nicht aber in den oben angeführten Beispielen, in denen es sich um Fluoreszenzangregung bei abnorm kleiner Dichte der Atmosphäre handelt.

Oft sind beim Leuchten der Sternatmosphären und der planetarischen Nebel äußerst kleinen Druckes nur Emissionslinien gefunden worden. Man könnte daran denken, daß in diesen Fällen die Absorptionslinien so schmal sind, daß sie durch Überstrahlung verschwinden, während die Emissionslinien durch die photographischen Effekte gerade verbreitert erscheinen. Ein solcher Vorgang ist bei Versuchen im Laboratorium so häufig zu beobachten, daß es sich vielleicht lohnen würde, unter Anwendung von Spektralapparaten größerer Dispersion nach den Absorptionslinien neben den Emissionslinien bei den Sternatmosphären zu suchen, bei denen man Grund hat die oben erwähnten Bedingungen als erfüllt anzusehen.

Zum Schluß möchte ich erwähnen, daß in den voranstehenden Zeilen das Problem nur qualitativ behandelt wird. Mit einer quantitativen Untersuchung der Fragen der Absorption und Emission äußerst verdünnter Atmosphären als Diffusionsprozeß von Energiequanten ist Herr FRENKEL in Petersburg zur Zeit beschäftigt.

Göttingen, November 1926, II. Phys. Institut.

<sup>1)</sup> SEELIGER, *Astron. Nachr.* 130, 393. 1892; 157, 255. 1902.

<sup>2)</sup> H. EBERT, *Astron. Nachr.* 164, 64. 1904.

<sup>3)</sup> Z. B. anscheinend bei der Deutung der Spektren der Novae.

## Quantenmechanik und Statistik.

Von M. BORN, Göttingen.

Die Entdeckung ganzzahliger Gesetze für die Linienspektren ist eine der Wurzeln, aus denen die Quantenmechanik erwachsen ist. CARL RUNGE war einer der ersten, der die Tragweite der von BALMER im Wasserstoffspektrum gefundenen Regelmäßigkeit erkannte, und nach ähnlichen Serien bei anderen Elementen zu suchen begann. Der große Erfolg, der ihm dabei beschieden war, rückt ihn in die Reihe der Forscher, die die experimentellen Grundlagen der Quantentheorie geschaffen haben. Auch die neue Quantenmechanik ist

ein Sproß dieser Entwicklung; ist doch eine ihrer Hauptstützen das Kombinationsprinzip der Spektrallinien. Danach scheint es gerechtfertigt, in diesem RUNGE-Heft einige Betrachtungen über Quantenmechanik anzustellen. Es soll keineswegs ein Bericht über den Stand der Quantenmechanik gegeben werden; ein solcher ist erst kürzlich in dieser Zeitschrift von dem Begründer der neuen Theorie veröffentlicht worden, ein Aufsatz, dessen einziger Mangel darin besteht, daß in der Aufzählung der beteiligten Forscher der Name HEISEN-

BERG nicht vorkommt. Vielmehr soll ein Versuch erläutert werden, den Sinn des neuen Formalismus zu verstehen.

Vorläufig liegt ja in der Hauptsache ein überaus rasch leistungsfähiger und wandlungsfähiger Formalismus vor, und zwar, was betont werden muß, *nur* einer; denn die verschiedenen Algorithmen, die Matrizenlehre, die nicht-kommutative Analysis DIRACS, die partiellen Differentialgleichungen SCHRÖDINGERS sind mathematisch äquivalent. Geleistet wird die Berechnung der stationären Zustände der Atome und der durch sie bestimmten Strahlungen (unter Vernachlässigung der Rückwirkung der Strahlung auf die Atome, der Dämpfung); es hat den Anschein, als ob hier nichts mehr zu wünschen übrig bleibt, da jedes neue Beispiel, das durchgerechnet wird, Übereinstimmung mit der Erfahrung liefert.

Aber die Frage nach den möglichen Zuständen der Materie erschöpft doch keineswegs den Bereich der physikalischen Probleme. Zum mindesten ebenso wichtig, vielleicht noch wichtiger ist die Frage nach dem *Ablauf* von Vorgängen, die bei Störungen des Gleichgewichtes eintreten. Die klassische Physik konzentrierte sich überhaupt auf diese letztere Frage, da sie dem Strukturproblem gegenüber ziemlich machtlos war. Umgekehrt ist die Quantenmechanik dem Ablaufproblem bisher fast ganz ausgewichen, weil es sich nicht ohne weiteres dem Formalismus einpassen ließ. Hier soll nun über einige Ansätze berichtet werden, die sich auf das Ablaufproblem in der Quantenmechanik beziehen.

In der klassischen Dynamik gilt unumschränkt der Satz, daß die Kenntnis des Zustandes (nämlich der Lagen und Geschwindigkeiten aller Materieteilchen) in einem Augenblick den Ablauf eines abgeschlossenen Systems für alle Zukunft determiniert; das ist die Fassung, die das Kausalgesetz in der Physik annimmt.

Mathematisch drückt sich das dadurch aus, daß die physikalischen Größen Differentialgleichungen von bestimmtem Typus genügen. Aber neben dieser kausalen Gesetzlichkeit hat stets die statistische Betrachtungsweise eine Rolle gespielt. Allerdings pflegte man das Auftreten von Wahrscheinlichkeiten damit zu rechtfertigen, daß der Anfangszustand niemals wirklich exakt bekannt sei; solange dies nicht erreicht sei, werde eben, gewissermaßen provisorisch, von der Statistik Gebrauch gemacht.

Die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung geht aus von der Annahme, man habe Grund gewisse Fälle als gleich wahrscheinlich anzusehen, und leitet daraus die Wahrscheinlichkeit verwickelter Kombinationen ab; oder allgemeiner: aus einer angenommenen Verteilung (z. B. der gleichmäßigen: „gleich wahrscheinliche Fälle“) wird eine andere, von ihr abhängige Verteilung abgeleitet. Der Fall, daß sich die abgeleitete Verteilung als ganz oder teilweise unabhängig von der angenommenen Ausgangsverteilung erweist, ist natürlich besonders wichtig.

Dem entspricht nun auch das Vorgehen der Physik: Sie muß eine Annahme über eine Ausgangsverteilung, wenn möglich über gleich wahrscheinliche Fälle, machen und sie muß sich bemühen zu zeigen, daß es schließlich auf die Wahl der Ausgangsverteilung für die beobachtbaren Erscheinungen gar nicht ankommt. Beides sehen wir in der statistischen Mechanik vor uns: Es wird eine Einteilung des Phasenraumes in gleich wahrscheinliche Zellen vorgenommen, wobei nur einige allgemeine mechanische Sätze (Energieprinzip, LIOUVILLEScher Satz) als Leitstern dienen; daneben aber gehen die Bemühungen, diese Statistik der „Raumgesamtheit“ in eine Statistik, der „Zeitgesamtheit“ zu verwandeln mit dem Zwecke, von der Willkür der Zelleneinteilung loszukommen. Aber die Ergodenhypothese, die hierzu dient und besagt, daß jedes System im Laufe der Zeit ganz von selbst alle Zellen gleich oft passiert, ist eben eine Hypothese und wird es wohl bleiben. Es scheint daher, daß die Berechtigung der Wahl gleichwahrscheinlicher Fälle durch die Zelleneinteilung des Phasenraumes nur a posteriori aus ihrem Erfolg bei der Deutung der Naturvorgänge abgeleitet werden kann.

So ähnlich ist es überall, wo in der Physik von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen Gebrauch gemacht wird. Betrachten wir als Beispiel die atomaren Stoßvorgänge, etwa den Stoß eines Elektrons gegen ein Atom. Ist die kinetische Energie kleiner als die erste Anregungsenergie des Atoms, so erfolgt der Stoß „elastisch“, d. h. ohne Energieverlust. Dann kann man fragen, in welche Richtung das Elektron durch den Stoß geworfen wird. Die klassische Theorie betrachtet jeden solchen einzelnen Stoßvorgang als kausal determiniert; wenn man die genauen Lagen und Geschwindigkeiten aller Elektronen des Atoms und des stoßenden Elektrons in einem Augenblick kennen würde, könnte man die Ablenkung des letzteren genau vorausberechnen. Nun fehlt uns leider diese Kenntnis der Mikro-Konfiguration; daher muß man sich wieder mit Mittelwerten begnügen. Hierzu muß man, was gewöhnlich nicht betont wird, notwendigerweise eine Annahme über gleich wahrscheinliche Konfigurationen machen; dies geschieht in möglichst „natürlicher“ Weise, indem man Bestimmungsstücke der relativen Lage der ursprünglichen Elektronenbahn gegen das Atomzentrum und gewisse Winkelvariable oder Bewegungsphasen einführt und gleiche Intervalle für diese als gleich wahrscheinlich ansetzt. Aber das ist eben eine Annahme, die nur durch den Erfolg gerechtfertigt werden kann.

Das Eigentümliche dieses Vorgehens ist nun, daß die Einführung der Mikrokoordinaten nur geschieht, um die Determiniertheit des Einzelprozesses wenigstens im Prinzip zu retten. Denn praktisch muß man sie ja aufgeben: der Experimentator zählt nur die in eine bestimmte Richtung abgelenkten Teilchen, ohne sich um die Einzelheiten der Bahn zu kümmern; das wesentliche

Stück der Bahn, auf dem die Wechselwirkung mit dem Atom stattfindet, ist ja auch der Beobachtung verborgen. Aus solchen Zählungen aber kann man nun Rückschlüsse auf den Mechanismus des Zusammenstoßes machen. Ein berühmtes Beispiel hierfür sind die Beobachtungen RUTHERFORDS über die Streuung der  $\alpha$ -Strahlen, wo allerdings Phasen der Atombewegung als Mikrokoordinaten nicht in Betracht kommen, sondern nur der Abstand des Atomkerns von der ursprünglichen Bahn des  $\alpha$ -Teilchens. RUTHERFORD konnte durch die Statistik der Streuung die Gültigkeit des COULOMBSchen Gesetzes für die Wechselwirkung zwischen dem  $\alpha$ -Teilchen und dem getroffenen Atomkern nachweisen. Aus der dabei benutzten Formel für die Anzahl der Teilchen in einer bestimmten Ablenkungsrichtung ist dabei die Mikrokoordinate (der Bahnabstand) eliminiert.

Wir haben hier also den Fall vor uns, daß ein Kraftgesetz durch Zählung, durch Statistik ermittelt wird, nicht durch Beobachtung einer Beschleunigung nach dem NEWTONSchen Bewegungsgesetz.

Die Methode ist im Grunde nichts anderes, als wenn beim Würfelspiel der Verdacht aufkommt, ein Würfel sei „falsch“, weil eine Zahl dauernd merklich häufiger als in  $1/6$  der Fälle erscheint: Man schließt aus der Statistik auf ein Drehmoment.

Ein anderes Beispiel ist die „Barometerformel“. Gewiß läßt sich diese rein mechanisch begründen, indem man die Luft als Kontinuum auffaßt und das Gleichgewicht zwischen hydrodynamischem Druck und Schwere ansetzt; aber tatsächlich ist doch der Druck nur statistisch definiert, als mittlere Impulsübertragung durch die Stöße der Moleküle, und es ist daher nicht nur ebenso berechtigt, sondern tiefer begründet, die Barometerformel als Zählung der Moleküle im Schwerfeld anzusehen, aus der das Gesetz dieses Feldes abgeleitet werden kann.

Diese Betrachtungen sollen zu dem Gedanken hinführen, daß man an Stelle der NEWTONSchen Kraftdefinition auch eine statistische setzen könnte, wie in der klassischen Mechanik das Fehlen einer Kraft durch die Trägheitsbewegung einer Partikel gekennzeichnet wird, so hier durch die Gleichförmigkeit einer Verteilung einer Menge von Partikeln über gewisse Bestimmungsstücke (wobei die Wahl dieser Koordinaten in beiden Fällen zu ähnlichen Problemen führt). Wie dort die Größe einer Kraft durch die Beschleunigung einer Partikel gemessen wird, so hier durch die Ungleichförmigkeit einer Menge von Teilchen.

In der klassischen Theorie besteht selbstverständlich die Aufgabe, die beiden Kraftdefinitionen aufeinander zurückzuführen, und dahin zielt alles Bemühen zur rationellen Begründung der statistischen Mechanik; wir haben uns aber klarzumachen versucht, daß dies nicht restlos gelungen ist, weil schließlich die Wahl der „gleichwahrscheinlichen Fälle“ nicht umgangen werden kann.

So vorbereitet richten wir nun unsern Blick auf die Quantenmechanik. Auffällig ist, daß hier schon rein historisch der Begriff von a-priori-Wahrscheinlichkeiten eine Rolle gespielt hat, die sich nicht auf gleich wahrscheinliche Fälle zurückführen ließen, wie z. B. die „Sprungwahrscheinlichkeiten“ bei den Emissionsprozessen. Aber es könnte ja sein, daß dies nur an der Mangelhaftigkeit der Theorie liegt.

Wichtiger ist der Umstand, daß eine exakte Festlegung von Partikeln in Raum und Zeit offenbar im Rahmen des Formalismus der Quantenmechanik nicht möglich ist. Man könnte allerdings hiergegen einwenden, daß nach SCHRÖDINGER die Partikel gar keine scharf definierten Örter haben können, weil sie nichts sind als Wellengruppen oder Wellenpakete mit verschwimmenden Umrissen; aber diese Vorstellung der Wellenpakete möchte ich hier beiseite lassen, weil sie nicht durchgeführt und wohl auch gar nicht durchführbar ist. Denn die SCHRÖDINGERSchen Wellen laufen ja gar nicht im gewöhnlichen Raume, sondern im „Konfigurationsraume“, der so viele Dimensionen hat, als die Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems beträgt (3 N-Dimensionen für N Partikel). Die quantentheoretische Beschreibung der Systeme enthält bestimmte Aussagen über die Energie, den Impuls, den Drehimpuls der Systeme; aber die Frage, „wo ist ein bestimmtes Partikel zu einer gegebenen Zeit?“ die beantwortet sie nicht oder höchstens in Grenzfällen, wo die Quantenmechanik in die klassische Mechanik übergeht. Damit ist aber die neue Theorie in bester Übereinstimmung mit dem Vorgehen der Experimentatoren, denen ja auch die Mikrokoordinaten unzugänglich sind und die daher nur Fälle zählen, Statistik treiben. Dies legt den Gedanken nahe, daß die Quantenmechanik ebenfalls nur Antwort gibt auf richtig gestellte statistische Fragen, aber im allgemeinen die Frage nach dem Ablauf eines Einzelprozesses unbeantwortet läßt. Sie wäre dann also eine eigenartige Verschmelzung von Mechanik und Statistik.

Danach hätte man mit den Differentialgleichungen der Wellenmechanik etwa folgendes Bild zu verknüpfen: Der nach diesen Gleichungen sich ausbreitende Wellenvorgang stellt keineswegs direkt die Bewegung der Materie dar, sondern bestimmt nur die möglichen Bewegungen oder besser „Zustände“ der Materie. Die Materie selbst kann nach wie vor unter dem Bilde beweglicher (punktförmiger) Teilchen (Elektronen, Protonen) vorgestellt werden; nur sind diese Korpuskeln in vielen Fällen gar nicht als Individuen zu identifizieren, z. B. dann, wenn sie zu einem Atomverband zusammenzutreten. Ein solcher Atomverband besitzt eine diskrete Folge von „Zuständen“; es gibt aber auch kontinuierlich zusammenhängende Zustandsreihen, die das eigentümliche Merkmal haben, daß bei einem Zustande dieser Klasse immer eine Wirkung längs einer Bahn vom Atom mit endlicher Geschwindigkeit forteilt, genau so, als ob ein

Teilchen abgeschleudert wäre. Diese Tatsache ist es, die die Vorstellung von Korpuskeln rechtfertigt, ja herausfordert, obwohl dies in manchen Fällen, wie gesagt, nicht wörtlich genommen werden darf. Zwischen den Korpuskeln bestehen elektromagnetische Kräfte (von deren endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit für den Augenblick abgesehen werden möge); sie werden, soweit wir wissen, durch die in der klassischen Elektrodynamik geltenden Gesetze als Funktionen der Koordinaten der Partikel beschrieben (z. B. COULOMBSche Anziehung). Aber diese Kräfte sind nicht, wie in der klassischen Theorie, den Beschleunigungen der Partikel proportional, haben überhaupt keinen direkten Zusammenhang mit der Bewegung der Teilchen. Vielmehr schiebt sich das Wellenfeld dazwischen: Die Kräfte bestimmen die Schwingungen einer gewissen Zustandsgröße  $\psi$ , die von den Lagen aller Partikel simultan abhängt (also einer Funktion im „Konfigurationsraum“), und zwar in der Weise, daß  $\psi$  einer Differentialgleichung zu genügen hat, deren Koeffizienten von den Kräften abhängen.

Die Kenntnis der Funktion  $\psi$  nun erlaubt, den Ablauf eines physikalischen Vorganges zu berechnen, soweit er überhaupt durch die quantenmechanischen Gesetze festgelegt ist: nämlich nicht im Sinne kausaler Determiniertheit, sondern im Sinne der Wahrscheinlichkeit. Jeder Vorgang besteht aus Elementarprozessen, die man als Übergänge oder Sprünge zu beschreiben pflegt; dabei scheint es so zu liegen, daß der Prozeß selbst sich jeder anschaulichen, raum-zeitlichen Darstellung entzieht und nur sein Endergebnis festgestellt werden kann. Dieses besteht eben darin, daß das System am Ende in einem anderen Quantenzustande angetroffen wird als zu Anfang. Die Bestimmung dieser Übergänge durch die Funktion  $\psi$  geschieht nun in folgender Weise: Jedem Zustande des Atoms entspricht ein ganz bestimmter Schwingungszustand, d. h. eine bestimmte charakteristische Lösung oder „Eigenfunktion“ der Wellengleichung; z. B. dem Normalzustande die Funktion  $\psi_1$ , dem folgenden Zustande  $\psi_2$  usw. Der Einfachheit halber nehmen wir an, das System sei im Normalzustande  $\psi_1$ . Tritt nun ein Elementarprozeß auf, so hat sich diese Lösung nach Ablauf der Ursachen des Prozesses in eine andere von der Form

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3 + \dots$$

verwandelt, die eine Überlagerung einer Anzahl von „Eigenfunktionen“ mit ganz bestimmten Partialamplituden  $c_1, c_2, \dots$  darstellt. Dann geben die Quadrate dieser Amplituden, also die Größen

$$c_1^2, c_2^2, c_3^2, \dots$$

die Wahrscheinlichkeiten dafür an, daß sich das System am Ende im 1., 2., 3., ... Zustande befindet; also ist z. B.  $c_1^2$  die Wahrscheinlichkeit, daß das System trotz der äußeren Einwirkung im Normalzustande verharret,  $c_2^2$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es in den zweiten Zustand springt

usw.<sup>1)</sup> Diese Wahrscheinlichkeiten sind also durch den Mechanismus determiniert. Was aber das betrachtete System tatsächlich im einzelnen Falle tut, ist nicht determiniert, wenigstens nicht im Rahmen der heute bekannten Gesetze. Dieses Faktum ist aber gar nichts neues; denn wie wir oben z. B. an den Stoßgesetzen erläutert haben, liefert faktisch auch die klassische Theorie nur Wahrscheinlichkeiten bei Atomprozessen. Nur führt die klassische Theorie erst Mikrokoordinaten ein, die den Prozeß determinieren, um sie dann wegen Unkenntnis ihrer Werte durch Mittelbildung wieder zu eliminieren; während die neue Theorie ohne diese Mikrokoordinaten auskommt und dabei zu entsprechenden Resultaten gelangt. Dabei ist es natürlich niemandem verwehrt, an die Existenz der Mikrokoordinaten zu glauben; doch werden diese erst dann physikalisch von Bedeutung sein, wenn man Methoden zu ihrer experimentellen Bestimmung ersonnen haben wird. Auf die daran sich knüpfenden philosophischen Fragen einzugehen, ist hier nicht der Ort; es soll nur der Standpunkt geschildert werden, auf den man durch Zusammenfassung der physikalischen Erfahrungen gedrängt wird. Man entzieht der Kraft ihre klassische Aufgabe, direkt Bewegungen zu bestimmen, und erteilt ihr die neue Aufgabe, Wahrscheinlichkeiten von Zuständen zu bestimmen. Während man aber früher versucht hat, diese beiden Dinge in Einklang zu bringen, die eine Kraftdefinition aus der anderen abzuleiten, so hat dies jetzt streng genommen keinen Sinn mehr; die Frage ist nur, warum die klassische Kraftdefinition in einem weiten Erfahrungsbereich überhaupt brauchbar gewesen ist. Die Antwort darauf lautet, wie immer in solchen Fällen: „weil die klassische Theorie ein Grenzfall der neuen Theorie ist“. Und zwar handelt es sich in der Hauptsache um den sog. „adiabatischen“ Grenzfall, d. h. den, wo die äußere Einwirkung (oder auch die Wechselwirkung zwischen Teilen des Systems) äußerst langsam erfolgt. Es ergibt sich, daß dann mit großer Annäherung

$$c_1^2 = 1, c_2^2 = 0, c_3^2 = 0, \dots$$

herauskommt, d. h. es besteht keine Wahrscheinlichkeit für einen Sprung, sondern das System befindet sich nach dem Aufhören des Prozesses wieder im Ausgangszustande. Eine solche langsame Einwirkung ist also „reversibel“, wie in der klassischen Theorie. Man kann dies auch auf den

<sup>1)</sup> Es ist vielleicht nicht überflüssig, den Unterschied der hier vorgeschlagenen Auffassung gegenüber der bekannten statistischen Lichttheorie von BOHR, KRAMERS und SLATER hervorzuheben. Dort werden die Erhaltungssätze für Energie und Impuls fallen gelassen; sie sollen nur im Mittel gelten. Hier dagegen sind die Erhaltungssätze durch den quantenmechanischen Formalismus ganz von selbst gewahrt; die Statistik bezieht sich nur auf Größen, wie die Ablenkungsrichtungen beim Stoß, deren Analoga in der BOHRschen Theorie nicht „quantisierbar“ sind (Winkelvariable).

Fall verallgemeinern, wo das System am Ende unter anderen Bedingungen steht, wie am Anfang; dann ist der Zustand „adiabatisch“ verändert, ohne daß ein Sprung stattgefunden hat. Das ist der Grenzfall, mit dem die klassische Mechanik allein zu tun hatte.

Die Frage, ob sich diese Anschauungen überall bewähren, ist natürlich noch offen. Die Stoßvorgänge konnten mit ihrer Hilfe quantenmechanisch formuliert werden und das Ergebnis ist qualitativ in voller Übereinstimmung mit dem Experiment. Damit ist eine präzise Deutung gerade jener Beobachtungen gewonnen, die als der unmittelbarste Beweis der quantenhaften Struktur der Energie angesehen werden: die un stetigen Energiestufen (Anregungsspannungen), die zuerst von FRANCK und HERTZ gefunden wurden. Das plötzliche Einsetzen der angeregten Zustände bei wachsender Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen ist eine direkte Folge der Theorie. Sie gibt überdies Formeln für die Verteilung der Elektronen über die verschiedenen Ablenkungswinkel; und diese Formeln weichen in charakteristischer Weise von den Ergebnissen ab, die man nach der klassischen Theorie erwarten würde. Dieser Umstand wurde schon vor der Entwicklung der allgemeinen Theorie von ELSASSER bemerkt<sup>1)</sup>. Er ging von der DE BROGLIESchen Idee aus, daß die Bewegung der Partikeln von Wellen begleitet wird, deren Frequenz und Wellenlänge durch die Energie und den Impuls der Teilchen bestimmt ist. ELSASSER berechnete die Wellenlänge für langsame Elektronen und fand sie von der Größenordnung  $10^{-8}$  cm, was gerade in den Bereich atomarer Dimensionen fällt. Hieraus schloß er, daß der Stoß eines Elektrons gegen ein Atom zu einer Beugung der DE BROGLIEWellen Anlaß geben sollte, ganz analog zu der bekannten Erscheinung der Zerstreuung von Licht an kleinen Teilchen. Die wechselnden Intensitäten der Wellen in verschiedenen Richtungen würden dann wechselnden Anzahlen der in diese Richtungen abgelenkten Elektronen entsprechen. Andeutungen eines solchen Effekts zeigen Experimente von DAVISSON und KUNSMAN<sup>2)</sup> über die Reflexion von Elektronen an Metalloberflächen. Eine vollständige Bestätigung dieser kühnen Hypothese wurde von DYMOND<sup>3)</sup> erbracht durch Messungen der Elektronenverteilung nach dem Stoß gegen Heliumatome.

Leider erlaubt der augenblickliche Stand der Quantenmechanik nur eine qualitative Beschreibung dieser Erscheinung; für eine vollständige Ableitung wäre die vollständige Lösung des Problems der Heliumstruktur erforderlich. Daher ist es besonders wichtig, die Theorie auf die oben erwähnten Experimente von RUTHERFORD und sei-

nen Mitarbeitern über die Zerstreuung von  $\alpha$ -Strahlen anzuwenden; denn in diesem Falle haben wir es mit einem einfachen und vollständig bekannten Mechanismus zu tun, der gegenseitigen Ablenkung zweier geladener Teilchen. Die klassische Formel, die RUTHERFORD aus einer Betrachtung der hyperbolischen Bahnen der Teilchen ableitete, ist in weitem Umfange experimentell bestätigt worden; aber neuerdings haben BIELER<sup>1)</sup>, RUTHERFORD und CHADWICK<sup>2)</sup> Abweichungen von diesem Gesetz bei den Zusammenstößen von  $\alpha$ -Teilchen mit leichten Atomen gefunden, und BLACKETT, der diese Erscheinung jetzt eingehend studiert, hat den Gedanken ausgesprochen, ob nicht auch diese Abweichungen durch Beugung von de Brogliewellen erklärt werden könnten. Im Augenblick ist nur die Vorfrage beantwortet worden, ob die klassische Formel von RUTHERFORD als Grenzfall aus der Quantenmechanik abgeleitet werden könne. G. WENTZEL<sup>3)</sup> hat gezeigt, daß das tatsächlich der Fall ist. Der Verfasser dieser Mitteilung<sup>4)</sup> hat ferner die Berechnung des Stoßes eines geladenen Teilchens gegen ein Wasserstoffatom durchgeführt und Formeln erhalten, welche zugleich die Stöße von Teilchen beliebiger Energie (von langsamen Elektronen bis zu schnellen  $\alpha$ -Teilchen) darstellen. Bisher ist nur die erste Näherung entwickelt worden, die die feineren Beugungseffekte noch nicht zur Darstellung bringt; man erhält einen Ausdrück, der so verschiedene Dinge wie die RUTHERFORDSchen Streugesetze für  $\alpha$ -Strahlen und den Querschnitt von Wasserstoffatomen für stoßende Elektronen in dem von LENARD studierten Geschwindigkeitsbereiche zusammenfaßt. Dieselbe Methode führt zu einer Berechnung der Anregungswahrscheinlichkeit von H-Atomen durch Elektronenstoß; doch sind diese Rechnungen noch nicht vollständig durchgeführt.

Aber auch, wenn die hier erläuterten Vorstellungen sich weiter bewähren, so besagt das nicht, daß sie irgendwie endgültig sind. Schon jetzt kann man sagen, daß sie noch viel zu sehr an die üblichen Begriffe von Raum und Zeit anknüpfen. Der Formalismus der Quantenmechanik ist jedenfalls viel biegsamer und läßt noch viel allgemeinere Deutungen zu. So kann man z. B. die Koordinaten und Impulse der Teilchen durch sog. „kanonische Transformationen“ durcheinander schütteln und dadurch für dieselben Vorgänge zu ganz andern Formelsystemen mit anderen Wellenfunktionen  $\psi$  kommen. Der Grundgedanke aber, daß es sich um „Wahrscheinlichkeitswellen“ handelt, wird wohl in verschiedener Gestalt bestehen bleiben.

<sup>1)</sup> E. S. BIELER, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. B. 105, 434. 1924.

<sup>2)</sup> E. RUTHERFORD und J. CHADWICK, Phil. Mag. 50, 889. 1925.

<sup>3)</sup> G. WENTZEL, Zeitschr. f. Physik. 40, 590. 1926.

<sup>4)</sup> M. BORN, Gött. Nachr. 1926, S. 146.

<sup>1)</sup> W. ELSASSER, Naturwissenschaften 13, 711. 1925.

<sup>2)</sup> DAVISSON und KUNSMAN, Phys. Rev. 22, 243. 1923.

<sup>3)</sup> E. G. DYMOND, Nature 118, 336. 1926.