

2.10 Wie erkenne ich Zusammenhänge zwischen f und f'?

Für eine Funktion f mit der Ableitungsfunktion f' gibt bekanntlich f'(x₀) die Steigung der Tangente für den Graphen K von f im Punkt P(x₀|f(x₀)) auf K an. Folglich ist die Monotonie von f am Graphen von f' ablesbar. Ebenso können die Extrempunkte und mit etwas mehr Aufwand auch die Wendepunkte von K bestimmt werden. Fig. 1 zeigt diese Zusammenhänge.

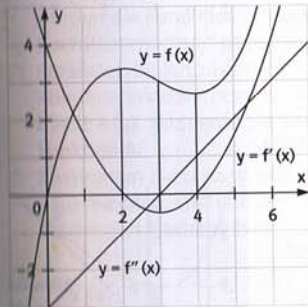


Fig. 1

Beispiel: (Erkennen von Zusammenhängen zwischen K und K')

Die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f hat den Graph K' (Fig. 2).

Begründen Sie, welche Aussagen über die Funktion f mit Graph K wahr, falsch oder nicht entscheidbar sind.

- (1) K hat zwei Tiefpunkte und einen Hochpunkt.
- (2) f ist streng monoton abnehmend für $-1 < x < 1$.
- (3) K verläuft durch den Punkt $O(0|0)$.
- (4) K ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung:

- (1) Dies ist wahr, es ist nämlich $f'(-3) = f'(+3) = f'(0) = 0$. An den Stellen ± 3 liegen ferner Vorzeichenwechsel von „-“ nach „+“ vor und an der Stelle 0 ein Vorzeichenwechsel von „+“ nach „-“. Damit liegen an den Stellen ± 3 Tiefpunkte und an der Stelle 0 ein Hochpunkt vor.
- (2) Dies ist falsch, da $f'(x) > 0$ für $-1 < x < 0$ gilt.
- (3) Dies ist nicht entscheidbar, da f und für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion g, welche durch $g(x) = f(x) + c$ definiert ist, dieselbe Ableitungsfunktion f' besitzen.
- (4) Dies ist wahr, da $f'(-x) = -f'(x)$ gilt, haben die Tangentensteigungen an allen Stellen $\pm x_0$ stets denselben Betrag, aber verschiedene Vorzeichen.

Einige Zusammenhänge zwischen dem Graphen K von f und dem Graphen K' von f' für eine beliebige Stelle x₀:

- Wenn K' $\begin{cases} \text{oberhalb} \\ \text{unterhalb} \end{cases}$ der x-Achse verläuft, ist f streng monoton $\begin{cases} \text{zunehmend} \\ \text{abnehmend} \end{cases}$.
- Wenn K' die x-Achse an der Stelle x₀ schneidet, hat K an der Stelle x₀ ein Extremum.
- Wenn K' streng monoton $\begin{cases} \text{zunehmend} \\ \text{abnehmend} \end{cases}$ verläuft, ist K eine $\begin{cases} \text{Linkskurve} \\ \text{Rechtskurve} \end{cases}$.
- Wenn K' an der Stelle x₀ ein Extremum hat, so hat K einen Wendepunkt mit dem x-Wert x₀.

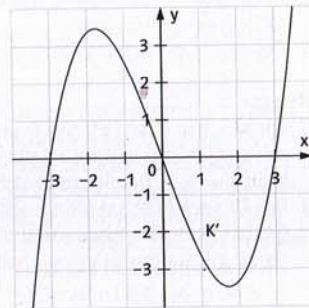


Fig. 2

2.11 Wie ermittle ich in Anwendungen Zeitpunkte stärkster Änderungen

In Anwendungen interessiert oft der Zeitpunkt, zu dem sich ein Sachverhalt am stärksten ändert. Da die Ableitung der Ausgangsfunktion die „Geschwindigkeit“ der Änderung beschreibt, sind Extremstellen der Ableitung gesucht. Diese kann man rechnerisch mit der zweiten Ableitung der Ausgangsfunktion ermitteln (vgl. Beispiel 1) oder aber mit dem GTR. In diesem Fall lässt man sich mit dem Befehl nDeriv den Graphen der Ableitung zeichnen und untersucht dieses auf Extremstellen (vgl. Beispiel 2).

Beispiel 1:

Die Konzentration eines Medikaments im Blut kann durch die Funktion f mit $f(t) = 8t \cdot e^{-t}$ modelliert werden (t in Stunden nach Einnahme des Medikaments; f(t) in Milliliter pro Liter). Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration des Medikaments am stärksten abgebaut wird.

Lösung:

Da die erste Ableitung die Änderung der Konzentration beschreibt, ist eine Extremstelle von f'(t) gesucht, in diesem Fall eine Minimumstelle. Damit muss die Ausgangsfunktion auf Wendestellen untersucht werden.

Mit der Produkt- und der Kettenregel erhält man aus $f(t) = 8t \cdot e^{-t}$:
 $f'(t) = 8(1-t) \cdot e^{-t}$; $f''(t) = 8(t-2) \cdot e^{-t}$; $f'''(t) = 8(3-t) \cdot e^{-t}$.

Die Bedingung $f''(t) = 0$ ergibt $t_1 = 2$ als einzig mögliche Wendestelle.

Weiterhin ist $f'''(2) = 8 \cdot e^{-2} > 0$; damit liegt ein Tiefpunkt des Graphen von f' vor. Also ist $t_1 = 2$ eine Wendestelle von f(t).

Zwei Stunden nach Einnahme wird das Medikament am stärksten abgebaut.

Beispiel 2:

Das Höhenwachstum einer Fichte in Abhängigkeit von der Zeit kann durch eine

Funktion f mit $f(t) = \frac{31}{1 + 22 \cdot e^{-0,1 \cdot t}}$ modelliert werden (t in Jahren; f(t) in Meter).

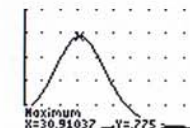
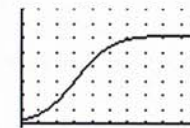
Ermitteln Sie das Alter, in dem die Fichte am stärksten wächst.

Lösung:

Gesucht ist das Jahr, in dem die Wachstumsgeschwindigkeit der Fichte am größten ist. Damit ist die Ableitung von f auf Extremstellen zu untersuchen. Mit dem GTR erhält man 30,9. Eine fast 31-jährige Fichte wächst am stärksten.

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=31/(1+22*e^(-0.1*X))
Y2=nDeriv(Y1,X,
X)
Y3=
Y4=
Y5=
    
```



Den Zeitpunkt, an dem

- eine Pflanze am schnellsten wächst
- eine Verkehrsdichte am schnellsten zunimmt
- eine Konzentration am stärksten abgebaut wird

erhält man als **Extremstelle der ersten Ableitung** bzw. als **Wendestelle der Ausgangsfunktion**.

2.12 Wie ermittle ich einen Bestand aus einer Änderungsrate?

Eine wichtige **Anwendung der Integration** ist die **Berechnung des Wertes einer Größe aus ihrer Änderungsrate** in einem Intervall und dem ursprünglichen Wert der Größe. Dies kommt nicht nur bei Wachstums- und Zerfallsprozessen vor sondern auch z. B. bei den physikalischen Größen **zurückgelegter Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung**.

Beispiel 1: (Funktion aus Änderungsrate)

Eine Funktion f mit $f(1) = 3$ hat an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ die momentane Änderungsrate $2x - \frac{1}{2}x^2$. Bestimmen Sie $f(x)$.

Lösung:

Es gilt $f'(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ und somit

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t) dt = 3 + \int_1^x (2t - \frac{1}{2}t^2) dt = 3 + \left[t^2 - \frac{1}{6}t^3 \right]_1^x = x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{6}.$$

Beispiel 2: (Bewegungen)

Ein Körper, der zur Zeit $t = 0$ den Weg $s(0) = 10$ zurückgelegt und die Geschwindigkeit $v(0) = 5$ hat, wird mit der Beschleunigung a beschleunigt, für die gilt

$$a(t) = 4 \cdot e^{-2t}$$

(t in s, s in m, v in ms^{-1} , a in ms^{-2}).

- Bestimmen Sie $v(t)$ und $s(t)$.
- Nach welcher Strecke hat der Körper eine Geschwindigkeit von 6 erreicht?
- Wie verhalten sich $v(t)$ und $s(t)$ für $t \rightarrow +\infty$?

Lösung:

$$a) \quad v(t) = v(0) + \int_0^t a(\tau) d\tau = 5 + \int_0^t 4 \cdot e^{-2\tau} d\tau = 5 + \left[-2 \cdot e^{-2\tau} \right]_0^t = 7 - 2 \cdot e^{-2t};$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau = 10 + \int_0^t (7 - 2 \cdot e^{-2\tau}) d\tau = 10 + \left[7\tau + e^{-2\tau} \right]_0^t = 9 + 7t + e^{-2t}.$$

Bestimmung von Funktionen aus ihren Änderungsraten

- Die **momentane Änderungsrate** einer Funktion f an der Stelle x_0 ist die Ableitung $f'(x_0)$.

- Aus f' kann f gewonnen werden durch

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

- Hat eine Größe F die Änderungsrate f ,

$$\text{so gibt } \int_{x_0}^x f(t) dt \text{ die } \mathbf{\ddot{A}nderung}$$

$$F(x) - F(x_0) \text{ der } \mathbf{Gr\ddot{o}\ss e F \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x \text{ an.}}$$

Weg \leftrightarrow Geschwindigkeit Geschwindigkeit \leftrightarrow Beschleunigung

Für den zur Zeit t zurückgelegten **Weg $s(t)$** , die **Geschwindigkeit $v(t)$** und die **Beschleunigung $a(t)$** gilt:

$$\blacksquare \quad s'(t) = v(t) \quad \text{und} \quad s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

$$\blacksquare \quad v'(t) = a(t) \quad \text{und} \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau.$$

- b) $v(t_0) = 6$ ergibt $7 - 2e^{-2t_0} = 6$ und dann $\frac{1}{2} = e^{-2t_0}$. Also ist $t_0 = \frac{1}{2} \ln(2) \approx 0,347$.

Der zum Zeitpunkt t_0 zurückgelegte Weg ist $s(t_0) = \frac{19}{2} + \frac{7}{2} \ln(2) \approx 11,93$. Der Körper erreicht also nach etwa 0,347s und 11,93m eine Geschwindigkeit von 6 ms^{-1} .

- c) Für $t \rightarrow +\infty$ strebt $v(t) \rightarrow 7$ und für große Werte von t gilt $s(t) \approx 9 + 7t$.

Mathematisch besagt dies, dass der Graph von s die Gerade mit der Gleichung $s(t) = 9 + 7t$ als Asymptote für $t \rightarrow +\infty$ hat.

Beispiel 3: (Wachstum einer Pflanze)

Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze kann durch die Funktion f mit $f(t) = 2,778 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 - 0,0035 \cdot t^2 + 0,111 \cdot t$; $0 \leq t \leq 50$ modelliert werden (t in Jahren seit der Pflanzung; $f(t)$ in Meter pro Jahr).

Welche Höhe hat die Pflanze näherungsweise nach 20 Jahren, wenn der Setzling bei der Pflanzung 20cm hoch war?

Lösung:

Für die Höhe nach 20 Jahren gilt:

$$F(20) = 0,2 + \int_0^{20} (2,778 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 - 0,0035 \cdot t^2 + 0,111 \cdot t) dt.$$

Mit dem GTR erhält man $F(20) \approx 14,18$.

Nach 20 Jahren ist also die Pflanze rund 14,20 Meter hoch.