2.2 Wie vermeide ich Fehler beim Ableiten?

Sind die nebenstehenden Vorkenntnisse vorhanden, bereitet insbesondere das Ableiten von Summen solcher Funktionen sowie von ganzrationalen Funktionen kaum Probleme.
Bei Produkten und Verkettungen von Funktionen muss die entsprechende Ableitungsregel beachtet werden. Besondere Sorgfalt ist geboten, wenn mehrere dieser Regeln angewandt werden müssen.

Vorkenntnisse

- Die Funktion f besitzt die Funktion f′ als **Ableitung**:
  $f(x) = x^n$ $\quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
  $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$
- **Summenregel:** Eine Summe wird „summandenweise" abgeleitet.
- **Faktorregel:** Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.

Beispiel 1: *(Summen- und Faktorregel)*
Bestimmen Sie f′ von f mit
a) $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 3x - 2$
b) $f(x) = 3x^2 + \frac{5}{x^2} - 2e^x$

Statt $\frac{1}{x^2}$ kann man auch x^{-2} schreiben.
Dadurch fällt das Ableiten leichter.

Lösung:
a) $f'(x) = 2 \cdot (4x^3) - 6 \cdot (2x) + 3 \cdot 1 - 0$
$= 8x^3 - 12x + 3$
b) $f'(x) = 3 \cdot (2x) + 5 \cdot \frac{-2}{x^3} - 2e^x = 6x - \frac{10}{x^3} - 2e^x$

Beispiel 2: *(Höhere Ableitungsregeln)*
Bestimmen Sie f′ von f mit
a) $f(x) = e^x \cdot (3x^2 - 4)$
b) $f(x) = (4x^2 - 5)^3$

Höhere Ableitungsregeln

- **Produktregel:**
  $(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- **Kettenregel:**
  $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Lösung:
a) $f'(x) = e^x \cdot (3x^2 - 4) + e^x \cdot 3(2x)$
$= e^x \cdot (3x^2 + 6x - 4)$
b) $f'(x) = 3 \cdot (4x^2 - 5)^2 \cdot 4(2x) = 24x \cdot (4x^2 - 5)^2$

Beispiel 3: *(Verbindung der höheren Ableitungsregeln)*
Bestimmen Sie f′ von f mit
a) $f(x) = (3x^2 - 4) \cdot e^{2x}$ b) $f(x) = (2x - 3)^3 \cdot (3x - 2)^2$.

Lösung:
a) $f'(x) = 6x \cdot e^{2x} + (3x^2 - 4) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}(3x^2 + 3x - 4)$
b) $f'(x) = 3(2x - 3)^2 \cdot 2(3x - 2)^2 + (2x - 3)^3 \cdot 2(3x - 2) \cdot 3$
$= 6(2x - 3)^2(3x - 2)[(3x - 2) + (2x - 3)]$
$= 6(2x - 3)^2(3x - 2)(5x - 5) = 30(2x - 3)^2(3x - 2)(x - 1)$

Tipp
f′(x) nicht ausmultiplizieren, sondern **ausklammern!**

2.3 Wie untersuche ich den Graphen einer ganzrationalen Funktion?

Einige Eigenschaften des Graphen einer Funktion kann man meist fast ohne Rechnungen am Funktionsterm erkennen.
Die x-Werte wichtiger Punkte auf einem Graphen erhält man als Lösungen der Gleichungen $f(x) = 0$; $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$.
Damit kann der Verlauf des Graphen meist angegeben werden.

Am Funktionsterm erkennt man:

- **Symmetrie:**
  Achsensymmetrie zur y-Achse:
  $\mathbf{f(-x) = f(x)}$
  Punktsymmetrie zum Ursprung:
  $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$
- **Verhalten für $x \to \pm\infty$:**
  Man betrachtet die höchste Potenz n von x und ihren Koeffizienten a_n:
  Wenn **n gerade und $a_n > 0$** ist, so strebt $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$.
  Wenn **n gerade und $a_n < 0$** ist, so strebt $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.
  Wenn **n ungerade und $a_n > 0$** ist, so strebt $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.
  Wenn **n ungerade und $a_n < 0$** ist, so strebt $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$.

Beispiel 1: *(Einfache Eigenschaften)*
Untersuchen Sie die Funktion f bzw. ihren Graphen K auf Symmetrie und Verhalten für $x \to \pm\infty$.
a) $f(x) = -x^3 + 6x$ b) $f(x) = 2x^4 - 3x^2$

Lösung:
a) Wegen $f(-x) = -f(x)$ ist K punktsymmetrisch zu $O(0|0)$;
es ist $n = 3$ und $a_3 = -1 < 0$, d.h.
für $x \to +\infty$ strebt $f(x) \to -\infty$ und
für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to +\infty$.
b) Wegen $f(-x) = f(x)$ ist K achsensymmetrisch zur y-Achse;
es ist $n = 4$ und $a_4 = 2 > 0$, d.h.
für $x \to \pm\infty$ strebt $f(x) \to +\infty$.

Beispiel 2: *(Wichtige Punkte)*
Untersuchen Sie den Graphen K der Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$
auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie damit K.

Lösung:
Gemeinsame Punkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0$ ergibt $\frac{1}{12}x^3 - 3x = 0$ und somit
$\frac{1}{12}x(x^2 - 36) = 0$.
Der Satz vom Nullprodukt liefert $x = 0$ oder $x^2 - 36 = 0$.

Wichtige Punkte:

- **Gemeinsame Punkte mit der x-Achse** haben die Lösungen von $\mathbf{f(x) = 0}$ als x-Wert.
- **Schnittpunkt mit der y-Achse** hat $\mathbf{f(0)}$ als y-Wert.
- Wenn $\mathbf{f'(x_E) = 0}$ und $\mathbf{f''(x_E) \neq 0}$, so ist $E(x_E|f(x_E))$ ein **Extrempunkt** von K.
- Wenn $\mathbf{f''(x_W) = 0}$ und $\mathbf{f'''(x_W) \neq 0}$, so ist $W(x_W|f(x_W))$ ein **Wendepunkt** von K.

Da $x^2 - 36 = 0$ nur für
$x = \pm 6$ gilt, sind die gemeinsamen Punkte von K und der x-Achse

$O(0|0)$ und $X_1(+6|0)$ und $X_2(-6|0)$.

Ableitungen:

Man erhält

$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3;$

$f''(x) = \frac{1}{2}x;$

$f'''(x) = \frac{1}{2}.$

Man sollte parallel zur Rechnung eine **Skizze erstellen**, in welche die gewonnenen Ergebnisse eingezeichnet werden. Man kann so rasch **Rechenfehler entdecken.**

Extrempunkte:

$f'(x) = 0$ ergibt $\frac{1}{4}x^2 - 3 = 0$ und somit $\frac{1}{4}(x^2 - 12) = 0$. Also ist $x = \pm 2\sqrt{3}$.

Da $f(+2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$, $f(-2\sqrt{3}) = +4\sqrt{3}$, und $f''(+2\sqrt{3}) = +\sqrt{3} > 0$, $f''(-2\sqrt{3}) = -\sqrt{3} < 0$ ist, hat K

den Hochpunkt $H(-2\sqrt{3}|+4\sqrt{3})$ und
den Tiefpunkt $T(+2\sqrt{3}|-4\sqrt{3})$.

Wendepunkte:

$f''(x) = 0$ ergibt $\frac{1}{2}x = 0$ und somit $x = 0$.

Da $f(0) = 0$ und $f'''(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ ist, hat K

den Wendepunkt $W(0|0)$.

Man erhält mit einer Wertetabelle den nebenstehenden Graphen.