Zahl und Funktion

Grundlagen der Analysis aus der Sek I

Oliver Passon

Seminar zur Didaktik der Analysis

Quellen

- Lehrpläne und Richtlinien des Landes NRW für Gymnasien und Gesamtschulen
- Lambacher Schweizer: „*Mathematik für Gymnasien*“, Klett (für die Klassen 5-9)
- „Zahlbereiche Eine elementare Einführung“, F. Padberg et al., Spektrum Verlag 1995.

Inhalt

- ***Zahl(-bereiche)***
  - „Fachwissenschaftliche“ Grundlagen
  - Negative Zahlen in Klasse 5 (Gy G8) bzw. Anfang 6 (Ge)
  - Brüche in Klasse 6 (Gy G8) bzw. Grundvorstellungen schon in Klasse 5 (Ge)
  - Reelle Zahlen in Klasse 8 (Gy G8) bzw. Klasse 9 (Ge)
- ***Funktionen***
  - Lineare Funktionen (Klasse 7)
  - Quadratische Funktionen (Klasse 8+9)
  - Wachstumsprozesse (Klasse 9) bzw. 10 (Ge)
  - Wichtige Begriffe in Hinblick auf die Analysis

Kleine Übung:

Wie erklären sie den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Zahlbereichen? (N, Z, Q, R, …)

Zahlbereiche: algebraische Grundbegriffe

- *Halbgruppe*: (M,•)
  - Abgeschlossen
  - Assoziativgesetz gilt
- *Monoid*
  - Halbgruppe mit neutralem Element
- *Gruppe*
  - Monoid
  - Inverses exisitiert
  - Falls kommutativ: abelsch
- *Ring:* M(•,+)
  - M(+) abelsche Gruppe
  - M(•) assoziativ
  - Distributivgesetz gilt: a,b,c ε M: a•(b+c)=a•b+a•c
- *Körper*: M(•,+)
  - M(•) und M(+) abelsche Gruppe
  - Distributivgesetz gilt

Zahlbereiche II

*Wir verstehen im folgenden die 0 als in **N** enthalten.*

(**N**,+) und (**N**,·) sind Monoide

Z entsteht aus **N**, indem man negative Zahlen als Inverse bezüglich der Addition konstruiert. (**Z**,+) ist eine abelsche Gruppe, (**Z**,·) ist ein Monoid

Z ist ein Ring

Die Menge der Brüche oder rationalen Zahlen **Q** entsteht aus **Z** durch Hinzunahme der Inversen bezüglich der Multiplikation.

(**Q**,+) und (**Q**\\{0},·) sind abelsche Gruppen.

Addition und Multiplikation sind distributiv

Q ist ein Körper

Zahlbereiche III

Die Menge der reellen Zahlen **R** entsteht aus **Q** durch topologische Vervollständigung:

Eine reelle Zahl ist eine Äquivalenzklasse aus Cauchy-Folgen. **R** ist ein Körper.

R ist ein geordneter Körper, d.h. ein Körper zusammen mit einer Ordnungsrelation „< “, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

N.B. Man kann zwischen algebraischen und transzendenten Irrationalzahlen unterscheiden…

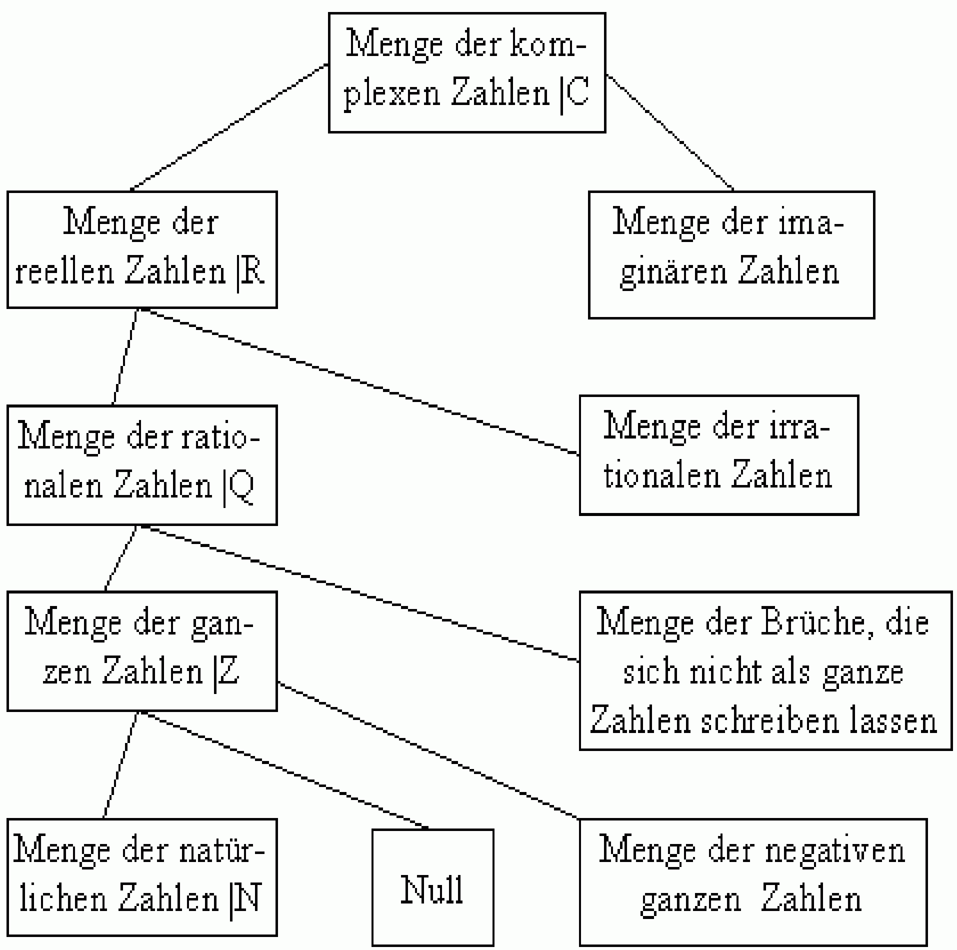
Die Menge der komplexen Zahlen **C** besteht aus Paaren reeller Zahlen (*a*,*b*), die in der Schreibweise *a*+*bi* mit i·i = -1 den üblichen Rechengesetzen genügen.

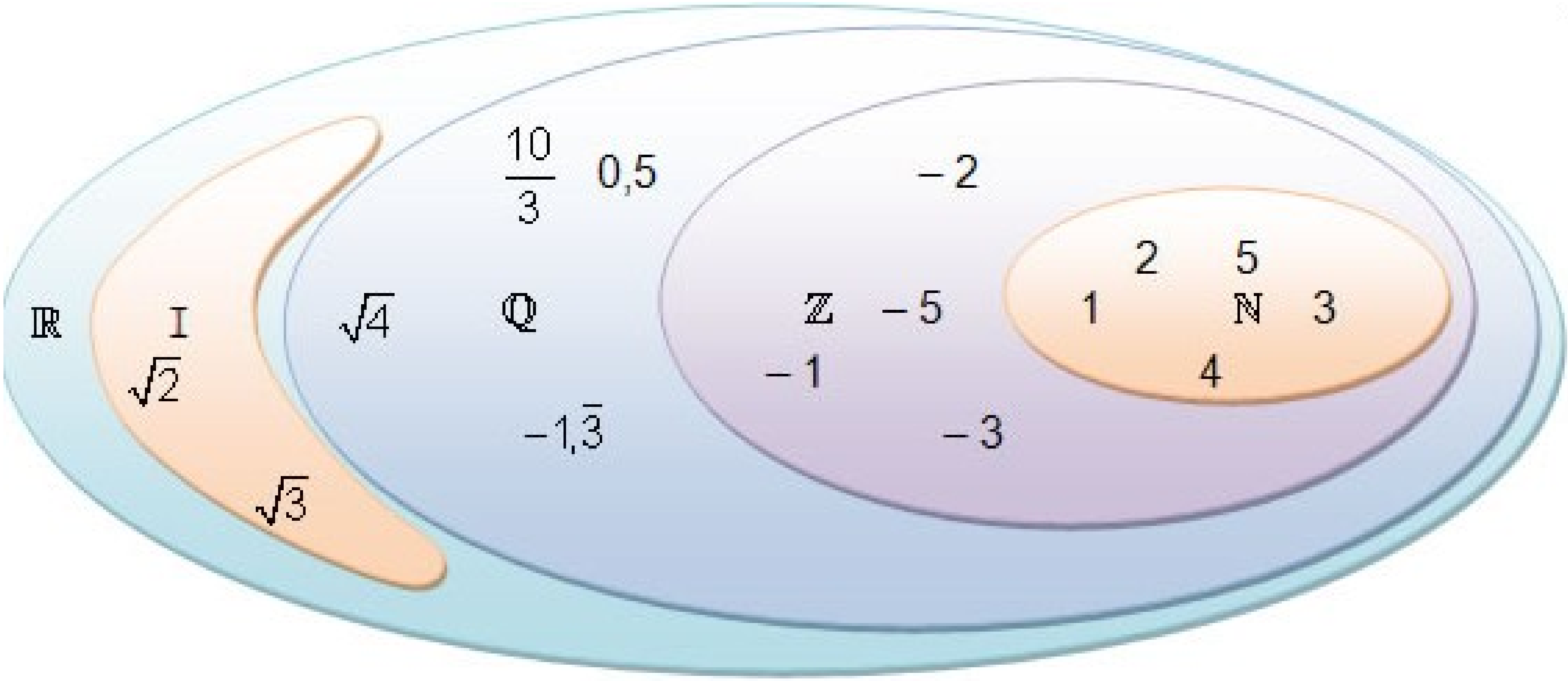
C ist ein Körper – aber nicht geordnet! In **C** ist jede algebraische Gleichung auflösbar.

Quaternionen sind darüber hinaus erweiterte Zahlbereiche, die nicht mehr kommutativ bezüglich der Multiplikation sind .

Übersicht über die Zahlbereiche

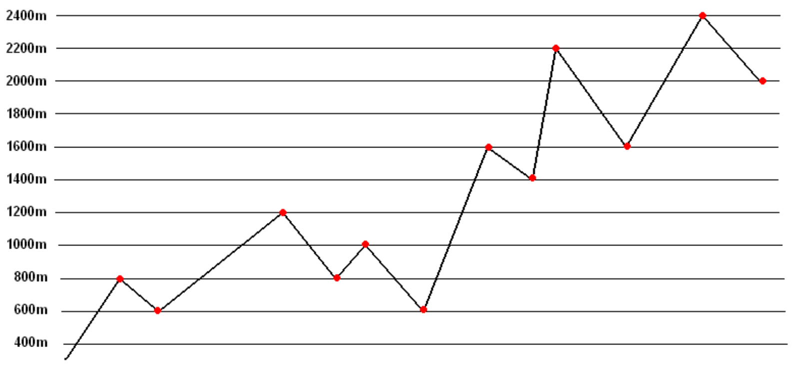
nach Athen & Bruhn 1976, S. 117

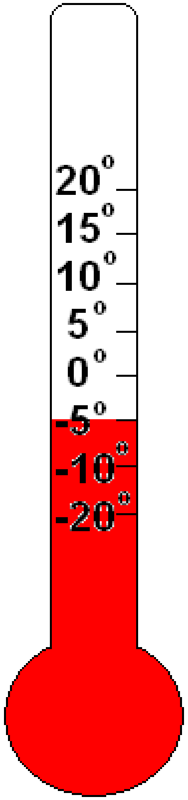



$\frac{10}{3}$
0,5
−2
2
5
$\mathbb{R}$
$\mathbb{I}$
$\sqrt{4}$
$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}$
−5
1
$\mathbb{N}$
3
$\sqrt{2}$
−1
4
$-1,\overline{3}$
−3
$\sqrt{3}$

Klasse 5 (G8)

- <u>Lehrplan</u>: Einführung der ganzen Zahlen
  - <u>„Begriff“</u> der ganzen Zahl
  - <u>Rechnen</u> in Z (noch keine Division)





- Notwendigkeit den Zahlbegriff zu erweitern:
  - Temperaturen „unter Null“
  - Schulden
  - Geografie („Höhe unter NN“)

<u>neuer Begriff</u>:
„***Vorzeichen***“ (-5)

<u>und:</u>
„Negative Zahlen sind kleiner als positive Zahlen…“

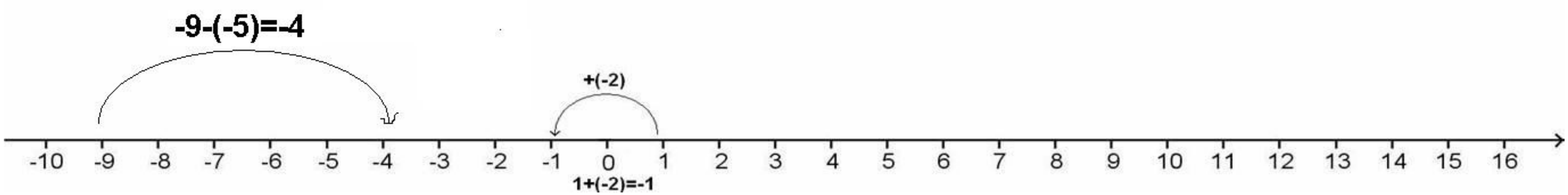
Rechnen in Z

- Addition und Subtraktion in Z:

  Veranschaulichung an der Zahlengeraden

„Schuldschein be-kommen…“

- Bei Mult. und Div. Über folgendes Argument:
- $3 \cdot 2 = 6$
- $3 \cdot 1 = 3$
- $3 \cdot 0 = 0$
- $3 \cdot (-1) = ?$



Kleine Übung II

Wie erklären sie die Regel „Minus mal Minus = Plus“?

Rechnen in Z II

- $3 \cdot (-1) = -3$
- $2 \cdot (-1) = -2$
- $1 \cdot (-1) = -1$
- $0 \cdot (-1) = 0$
- $-1 \cdot (-1) = ?$

→ “Minus mal Minus = Plus”

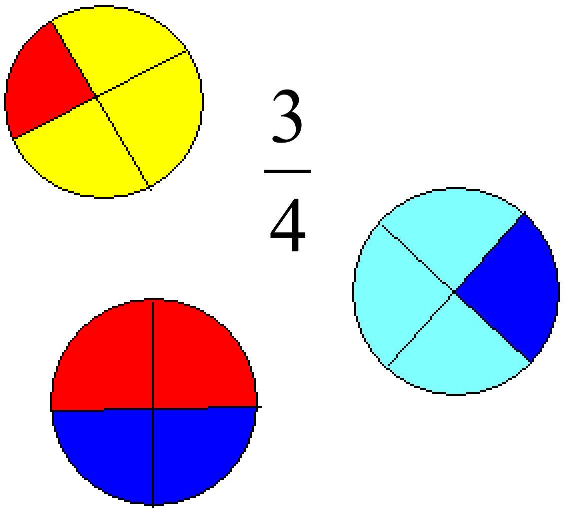
- Die Anwendung der Regeln erfolgt anschließend „mechanisch“:

i. $+(-n) = -n$
ii. $-(-n) = +n$
iii. Bei der Punktrechnung ist das Ergebnis negativ, wenn eine der Zahlen negativ ist…

Brüche in Klasse 6 (nach LS)

- Einführung über „Anteil von…“

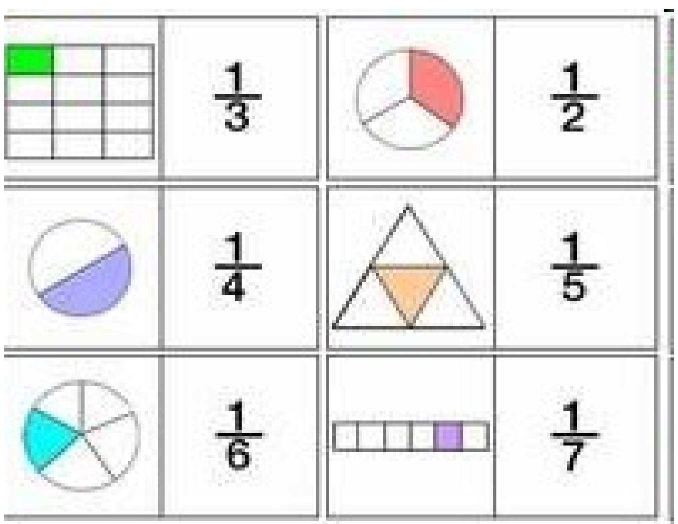
etwa: 4 Personen teilen sich 3 Pizzen



Neue Begriffe:
Zähler (zählt, wie viel aufgeteilt wird)
Nenner (nennt, an wie viele aufgeteilt wird)

Visualisierung von Brüchen

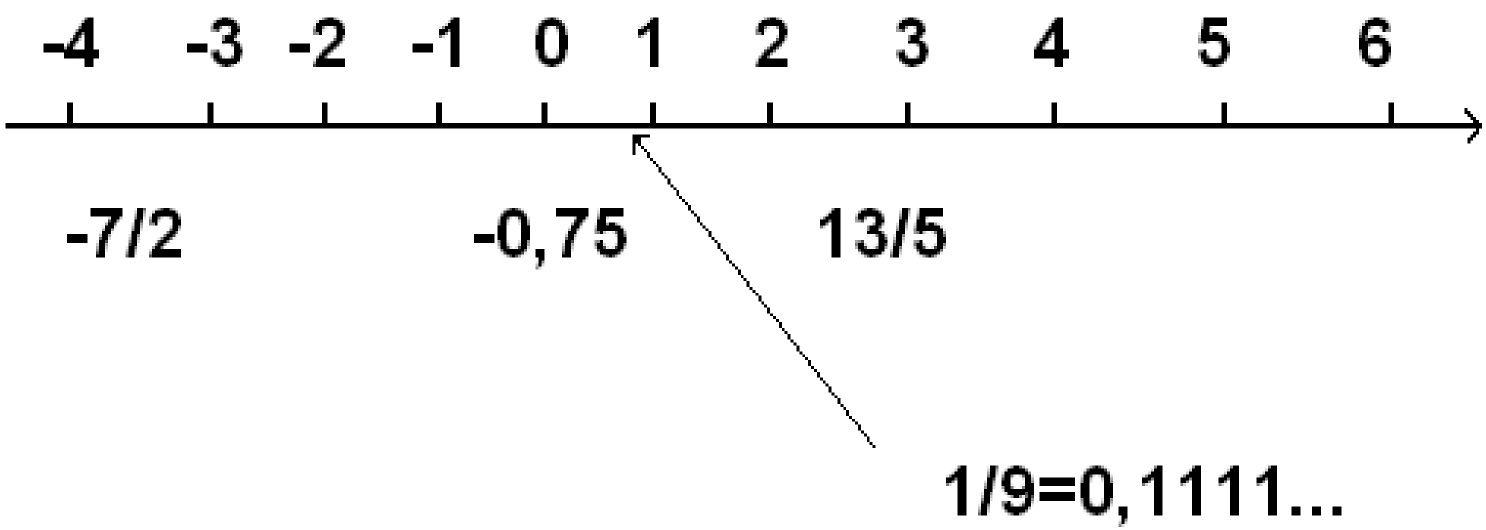
Der Tank fasst 60l. Wie viel sind im Tank, wenn er ⅓ voll ist?



<u>Wichtig</u>: keine Fixierung auf Kreisbilder…

- Hier schließen sich schwierige Fragen der Bruchrechen-didaktik an…

<u>Leitbild</u>: Ganze Zahlen, Brüche und Dezimalbrüche sind Punkte auf der Zahlengeraden…

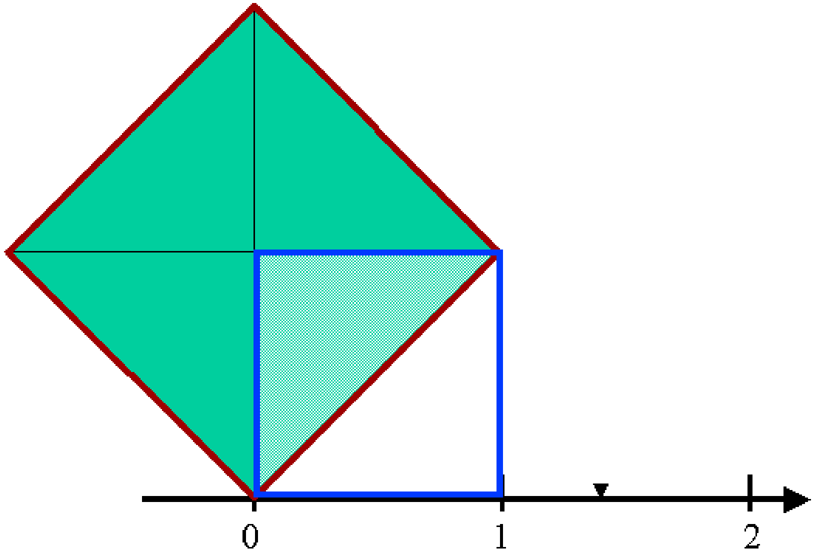


Reelle Zahlen (Klasse 8)

- Aus der 6 sind periodische Dezimalbrüche bekannt $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$
- <u>Man zeigt</u>: jeder Bruch kann als abbrechender oder periodischer Dezimalbruch geschrieben werden!
- z. Bsp. 0,10100100010000100000… ist jedoch ein nichtperiodischer Dezimalbruch!
- Diese Zahl ist nicht als Bruch darstellbar! Neuer Begriff: „*irrationale Zahl*“

Reelle Zahlen II (8. Klasse)

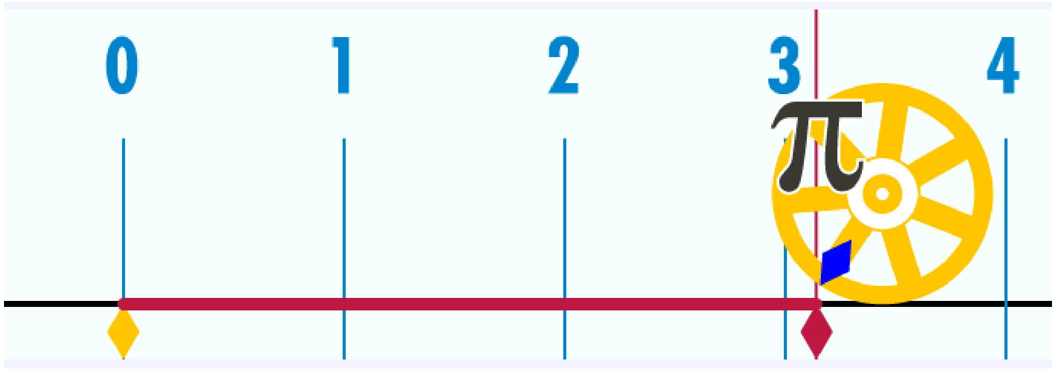
- Beachte: die Summe zweier irrationaler Zahlen kann wieder rational sein…
- Einführung der Wurzel und Intervallschachtelung zu ihrer näherungsweisen Bestimmung
- Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{p}$

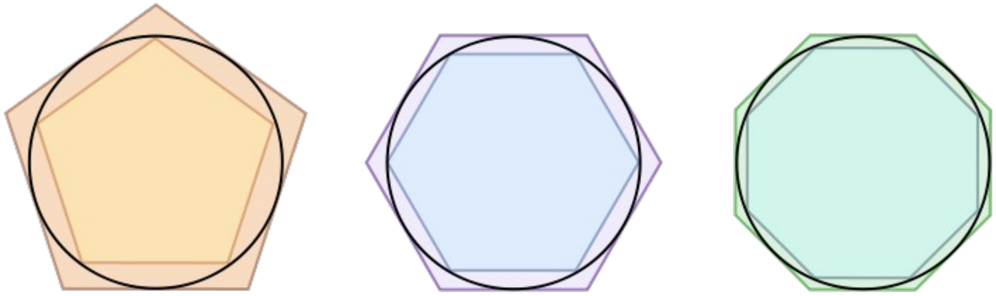


Reelle Zahlen in Klasse 8 II

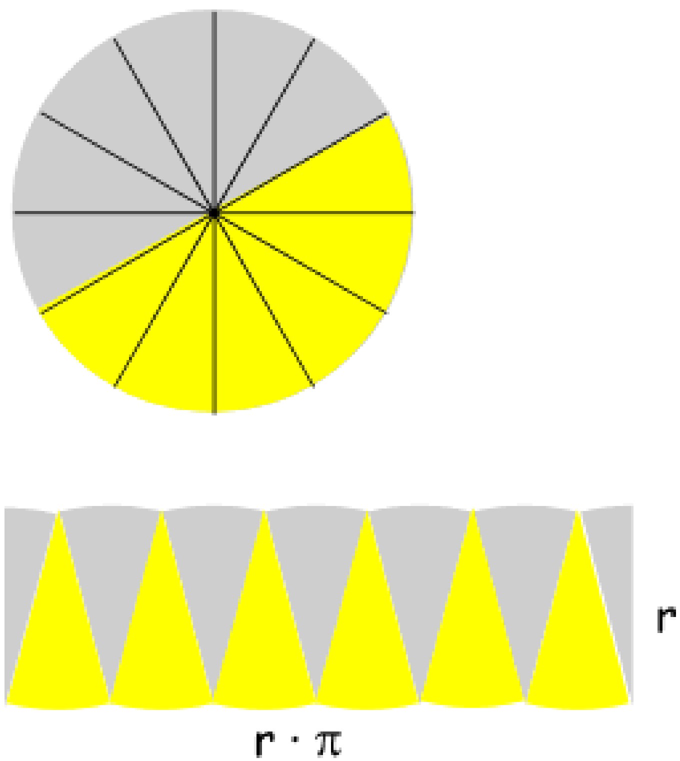
- Heuristische Einführung von π
- Idee der näherungsweisen Bestimmung…

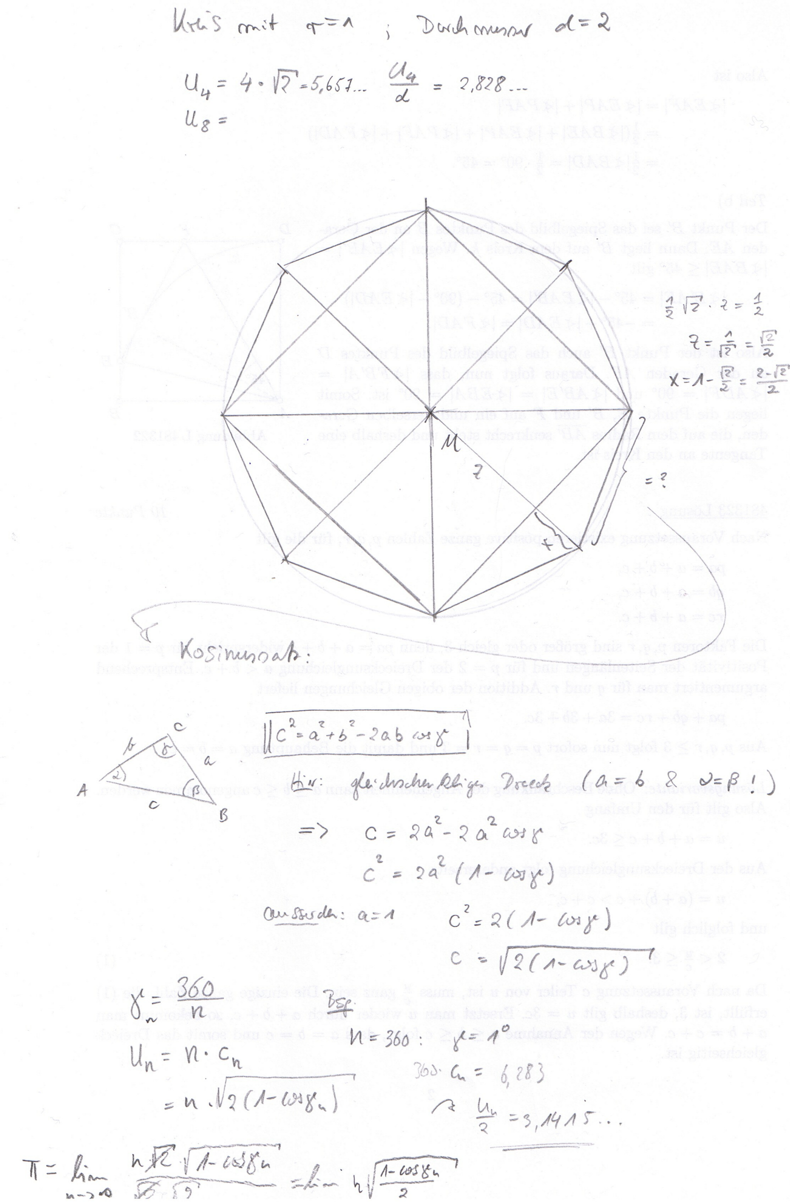
  in der Schule schwierig…





Pi in der Schule





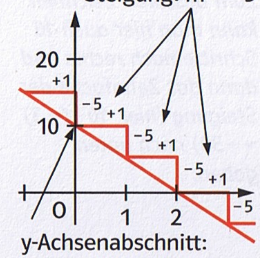
Zusammenfassung: Zahlbereiche in der Schule

- „neue Zahlen“ (Z, Q, R) werden im wesentlichen geometrisch gedeutet („Punkte auf der Zahlengeraden“)
- Mit dem „Permanenzprinzip“ (Hankel, 1867) können die Rechenregeln begründet werden
- Die zugrunde liegenden algebraischen Strukturen (vor allem: Inverse und Distributivität) stehen nur bei der Umformung von Gleichungen im Hintergrund (d.h. werden kaum explizit thematisiert…)
- Auch hier ist die Spannung zwischen „verstehen“ und „Kalkül“ bzw. „Produkt“ und „Prozess“ deutlich!
- In Hinblick auf die Analysis ist von Interesse, dass mit der Intervallschachtelung von Irrationalzahlen die Idee der Approximation (oder sog. Grenzwert) bereits angedeutet wird.

Der Funktionsbegriff

- Ab Klasse 7 Behandlung von „Zuordnungen“, Wertetabellen

Zuordnungen $x \rightarrow y$, bei denen man zur Berechnung des y-Wertes eine Gleichung der Form $y = m \cdot x + n$ aufstellen kann, heißen **lineare Funktionen.**
Der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse $S(0|n)$ heißt y-Achsenabschnitt n. Die Steigung m gibt an, um wie viel der y-Wert steigt/fällt, wenn der x-Wert um 1 zunimmt.

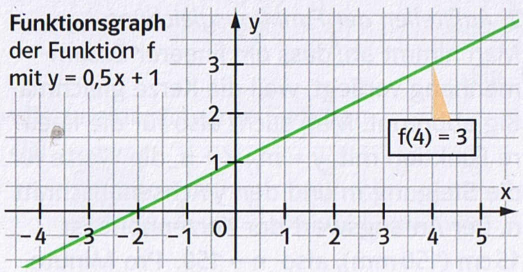


y-Achsenabschnitt: n = 10

Die roten Dreiecke nennt man auch ***Steigungsdreiecke****, weil sie die Steigung des Graphen beschreiben*

Funktionen werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet, oft verwendet man f, g oder h. Wird dem x-Wert 4 der y-Wert 3 zugeordnet, so nennt man 3 den **Funktionswert** an der Stelle $x = 4$ und schreibt auch $f(4) = 3$. Die Gleichung $y = 0{,}5x + 1$, mit der sich die Funktionswerte berechnen lassen, heißt **Funktionsgleichung**.

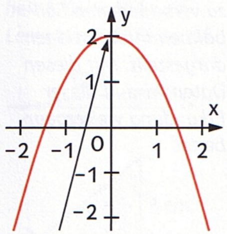
Funktionsgraph der Funktion f mit $y = 0{,}5x + 1$



LS, Klasse 8 (Gy G8)

Erkundung 3: Von quadratischen Zuordnungen

Siehe auch Lerneinheit 4, Seite 118.



Hier ist der Scheitelpunkt der höchste Punkt des Graphen.

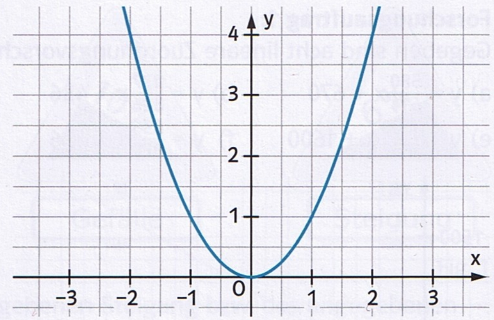
Die vier Forschungsaufträge dieser Erkundung können auch in einem ***Gruppenpuzzle*** *bearbeitet werden.*

Für den Forschungsauftrag 4 sollten neue Gruppen gebildet werden, wobei je mindestens ein Mitglied der Gruppen der For-

Vorinformation:
Der Graph der Zuordnung mit der Gleichung $y = x^2$ heißt Normalparabel. Mithilfe einer Wertetabelle kann man den Verlauf des Graphen nachvollziehen.

x	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2
x^2	4	1	0,25	0	0,25	1	4

Der tiefste bzw. höchste Punkt einer Parabel heißt **Scheitelpunkt**.



– Zeichnet den Graphen der Zuordnung mit $y = x^2$ und erstellt eine möglichst gute Schablone zum genauen Zeichnen des Graphen.

Forschungsauftrag 1 – Gruppe 1:
- Zeichne in ein Koordinatensystem den Graphen der Zuordnung mit $y = x^2$.
- Zeichne zusätzlich die Graphen der Zuordnungen mit
  $y_1 = x^2 + 2$, $y_2 = x^2 + 4$, $y_3 = x^2 - 3$
  $y_4 = x^2 - 1$, $y_5 = x^2 - \frac{1}{2}$, $y_6 = x^2 + 1{,}5$
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zuordnungsvorschrift und dem Scheitelpunkt des Graphen?
- Was kann man über den Verlauf des Graphen der allgemeinen Zuordnungsvorschrift $y = x^2 + e$ sagen, wobei e eine beliebige Zahl ist? Unterscheide die Fälle $e < 0$ und $e > 0$.

Forschungsauftrag 2 – Gruppe 2:
- Zeichne in ein Koordinatensystem den Graphen der Zuordnung mit $y = x^2$.
- Zeichne zusätzlich die Graphen der Zuordnungen mit
  $y_1 = 2 \cdot x^2$, $y_2 = 3 \cdot x^2$, $y_3 = 1{,}5 \cdot x^2$
  $y_4 = -1 \cdot x^2$, $y_5 = -2 \cdot x^2$, $y_6 = -\frac{1}{2} \cdot x^2$
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zuordnungsvorschrift und dem Scheitelpunkt des Graphen?
- Was kann man über den Verlauf des Graphen der allgemeinen Zuordnungsvorschrift $y = a \cdot x^2$ sagen, wobei a eine beliebige Zahl ist? Unterscheide die Fälle $a < 0$ und $a > 0$.

LS, Klasse 8 (Gy G8)

schungsaufträge 1 bis 3 vertreten sein sollte.

Wenn ihr mal nicht weiter wisst, könnt ihr einfach weitere Beispiele mit Zahlen aufstellen und diskutieren.

Auf der Seite 114 seht ihr ein Bild von einer Schablone!

Forschungsauftrag 3 – Gruppe 3:

- Zeichne in ein Koordinatensystem den Graphen der Zuordnung mit $y = x^2$.
- Zeichne zusätzlich die Graphen der Zuordnungen mit
  $y_1 = (x-1)^2$, $y_2 = (x-2)^2$, $y_3 = (x-3)^2$
  $y_4 = (x+1)^2$, $y_5 = (x+2{,}5)^2$, $y_6 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zuordnungsvorschrift und dem Scheitelpunkt des entsprechenden Graphen?
- Was kann man über den Verlauf des Graphen der allgemeinen Zuordnungsvorschrift $y = (x-d)^2$ sagen, wobei d eine beliebige Zahl ist? Unterscheide die Fälle $d < 0$ und $d > 0$.

Forschungsauftrag 4:

- Beschreibt den Verlauf der Graphen mit den folgenden Zuordnungsvorschriften
  $y_1 = (x-1)^2 + 2$, $y_2 = 2 \cdot (x-3)^2 + 4$,
  $y_3 = -2 \cdot (x-4)^2 - 3$, $y_4 = 3 \cdot (x+3)^2 - 1$,
  $y_5 = -(x+1{,}5)^2 - 2$, $y_6 = 3 \cdot (x-2{,}5)^2 + 5$
- Beschreibt den Einfluss von a, d und e auf den Verlauf des Graphen der Zuordnungsvorschrift $y = a \cdot (x-d)^2 + e$.
- Gebt allgemein den Scheitelpunkt an.
- Stellt eigene Beispiele für quadratische Zuordnungsvorschriften auf und beschreibt den Verlauf der Graphen.
- Zeichnet Graphen zu quadratischen Zuordnungen und lasst die anderen eurer Gruppe die Zuordnungsvorschrift aufstellen.

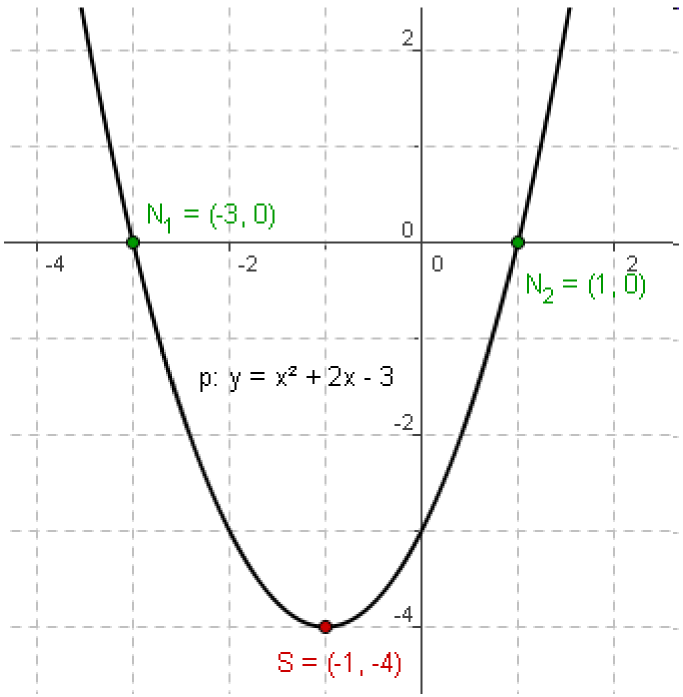
LS, Klasse 8 (Gy G8)

Kleine Übung III

Was „ist“ eine Parabel?

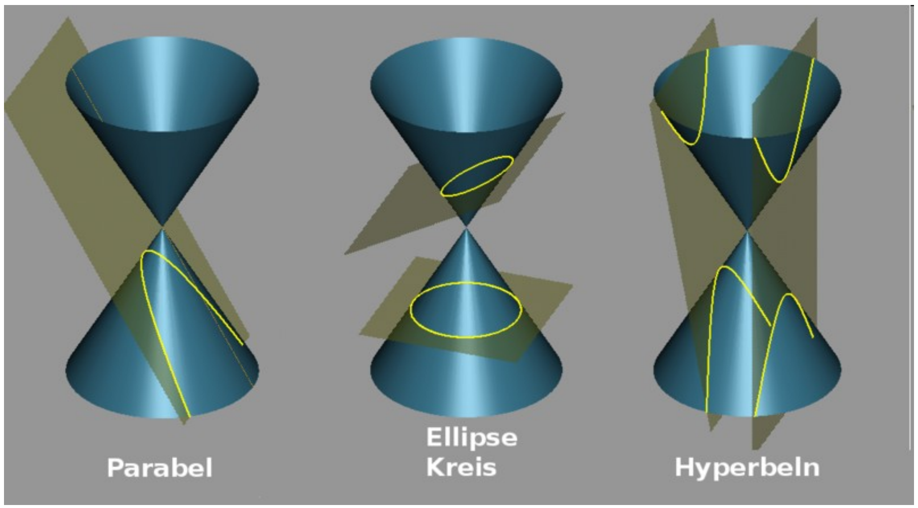
Exkurs: Funktionen
Was ist eine Parabel?

- Der Graph einer quadratischen Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$

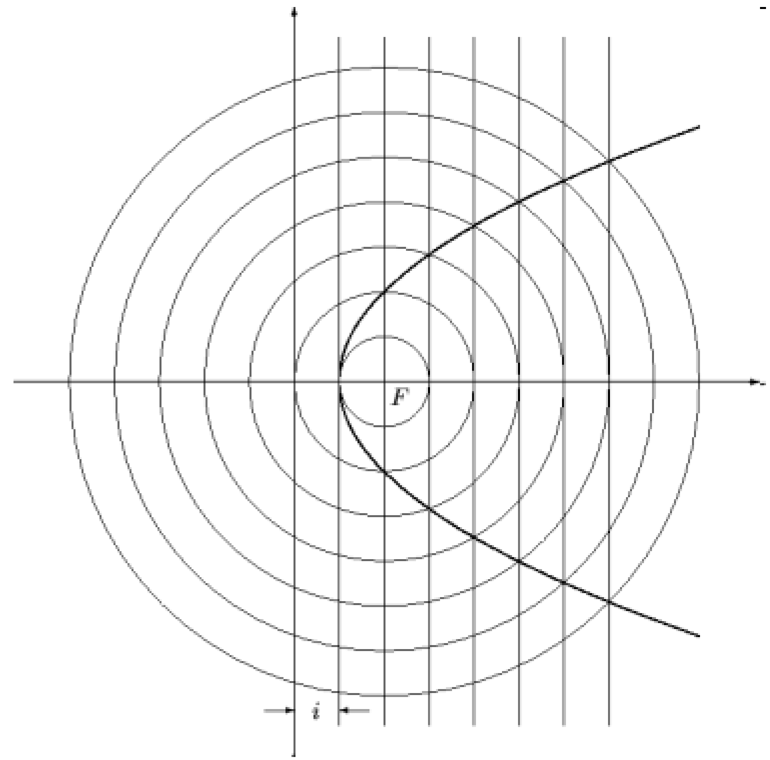


Rene Descartes (1596-1650)

Was ist eine Parabel? II

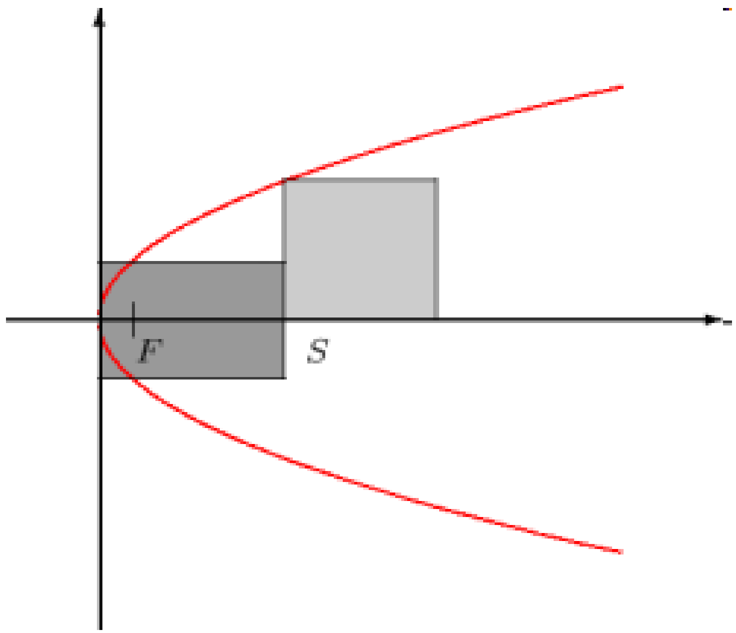


Ein Kegelschnitt



Die Menge aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden („Leitgerade“) und einem Punkt („Brennpunkt“) Den selben Abstand haben

Was ist eine Parabel III



Sperrungsrechteck und Ordinaten-Quadrat sind gleich groß!
Griechisch: παραβάλλειν (paraballein)

Klasse 9: Parameter

- Unterschied zwischen <u>Parameter</u> und <u>Variable.</u> Entscheidend für die Analysis: $f(x) = x^n \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Parameter haben einen Namen und eine Bedeutung

Die einzelnen Parameter in den allgemeinen Funktionsgleichungen haben Namen, die sich von den Eigenschaften am Graphen ableiten lassen. So kann man den Funktionsgleichungen mithilfe der Parameter auf einen Blick bestimmte Informationen entnehmen.

Für Graphen linearer Funktionen mit $y = mx + n$ gilt:

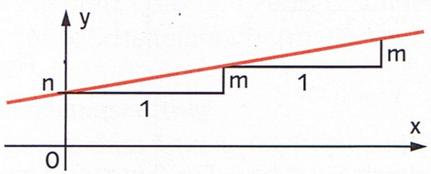


Fig. 1

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(\mathbf{0}|\mathbf{n})$. Geht man um 1 Einheit nach rechts, dann geht man um m Einheiten nach oben.

Der Faktor **m** heißt **Steigung** des Graphen und **n** ist der **y-Achsenabschnitt**.

Für Graphen quadratischer Funktionen mit $y = ax^2 + bx + c$ (Normalform) bzw. mit $y = a(x-d)^2 + e$ (Scheitelpunktform) gilt:

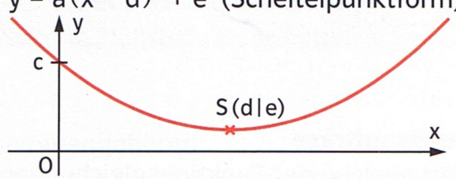


Fig. 2

Den Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|c)$ kann man in der Normalform ablesen. Den **Scheitelpunkt S(d|e)** kann man der Scheitelpunktform entnehmen.

Der Faktor **a** heißt **Streckungsfaktor** des Graphen und **c** ist der **y-Achsenabschnitt**.

LS, Klasse 9 (Gy G8)

Klasse 9: „Optimierungsaufgaben“

Viele Probleme aus der Wirtschaft, aus der Technik, im Alltag usw. kann man mithilfe von quadratischen Funktionen oder quadratischen Gleichungen lösen.
Wenn z. B. danach gefragt wird, wann eine Größe (z. B. ein Flächeninhalt, ein Gewinn) den kleinsten bzw. den größten Wert annimmt, spricht man von Optimierungsaufgaben. Wird der Sachzusammenhang mithilfe einer quadratischen Funktion beschrieben, muss man dazu den Scheitelpunkt bestimmen.
Es gibt aber auch viele Situationen, die mit quadratischen Funktionen modelliert werden, bei denen x-Werte für einen vorgegebenen Funktionswert gesucht werden. Hier führt das Lösen einer quadratischen Gleichung zur Lösung.

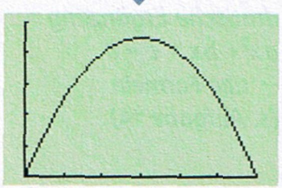
LS, Klasse 9 (Gy G8)

„Faltbox"

1 Verstehen der Aufgabe

2 Ausdenken eines Plans

3 Durchführen des Plans

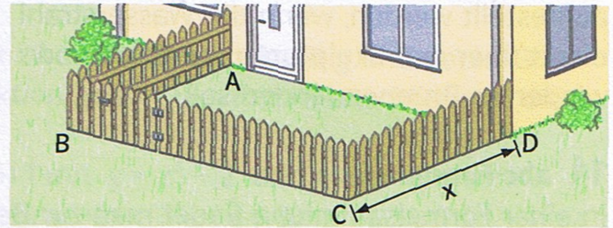


Parabel für die Funktion A mit $A(x) = x \cdot (12 - 2x)$

4 Rückschau

Problem 1 – Eine Optimierungsaufgabe mithilfe einer quadratischen Funktion lösen

Mit einem 12 m langen Zaun soll an einer Hauswand ein Rechteck für ein Kaninchengehege eingezäunt werden. Wie lang müssen die Seiten gewählt werden, damit es einen möglichst großen Flächeninhalt besitzt? Wie groß wäre dieser dann?



Verstehen der Aufgabe *(1. Was ist gegeben und 2. Was ist gesucht?)*

– Der Zaun ist 12 m lang. An der Hauswand wird kein Zaun benötigt.
– Der Flächeninhalt A (in m^2) soll maximal werden.

Ausdenken eines Plans *(1. Variable einführen und 2. Funktionsgleichung aufstellen)*

Für die Länge der Querseiten AB und CD wählt man die Variable x. Der Flächeninhalt des Rechtecks lässt sich mit der Formel A = Länge · Breite berechnen, wobei die Breite x beträgt. Für die Länge des Rechtecks gilt $12 - 2x$, denn der Zaun soll insgesamt 12 Meter lang sein. Die Funktion $x \to A$ mit der Funktionsgleichung $A(x) = x \cdot (12 - 2x)$ ist quadratisch. Der x-Wert des Scheitels der zugehörigen Parabel ist die gesuchte Länge der Querseite.

Durchführen des Plans *(Bestimmung des Scheitelpunktes)*

Man bestimmt den x-Wert des Scheitelpunktes z. B. als Mittelwert der beiden Nullstellen der Parabel $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$, denn es ist $A(x) = x \cdot (12 - 2x) = 0$, wenn $x = 0$ oder $12 - 2x = 0$. Also ist der x-Wert des Scheitelpunktes 3 und man erhält durch Einsetzen $y = 18$, also $S(3\,|\,18)$.
(Alternativ könnte man auch die Methode der quadratischen Ergänzung wählen.)
Da die Parabel nach unten geöffnet ist (vgl. den Graphen am Rand), ist der Flächeninhalt für $x = 3$ mit 18 m^2 am größten. Für die andere Seite des Rechtecks erhält man $12 - 2 \cdot 3 = 6$.

Rückschau *(1. Ergebnis prüfen und 2. Antwortsatz formulieren)*

Durch die Probe $(6 + 2 \cdot 3 = 12)$ bestätigt man die Richtigkeit der Rechnung.
Wird also für die Querseite des Rechtecks 3 m gewählt, so ist die Längsseite 6 m lang und der Flächeninhalt mit 18 m^2 maximal, vorausgesetzt, das Haus ist mindestens 6 m lang.

Zusammenfassung: Funktionsbegriff

- Ausgehend vom Zuordnungsbegriff wird ab der Klasse 8 stärker formalisiert (Funktionsschreibweise, …)
- f(x) – Schreibweise betont den Unterschied zwischen abhängiger und unabhängiger Größe
- Parameter und Variablenbegriff müssen sauber unterschieden werden
- Ein schlecht verstandener Funktionsbegriff führt aller spätestens dazu, dass die Kettenregel für immer mysteriös bleibt…
- Während der „algebraische Zahlbegriff“ in der Schule geometrisiert wird, findet eine „Algebraisierung“ von Kurven und Figuren statt…

Grundlagen für die Analysis aus der Sek I:

- Die SuS haben eine geometrische Deutung des Zahlbegriffs bis hin zu den reellen Zahlen
- Bei den irrationalen Zahlen ist ihnen auch die Idee der „beliebig genauen“ Approximation begegnet (→Grenzwertbetrachtungen).
- Die Schüler kennen Zuordnungen bzw. Funktionen zur Beschreibung von Veränderungen bzw. von Zusammenhängen zwischen Größen