Wellen

Wellen treten in der Natur in großer Zahl auf: Wasserwellen, Schallwellen, Lichtwellen, Radiowellen, La Ola im Stadion…

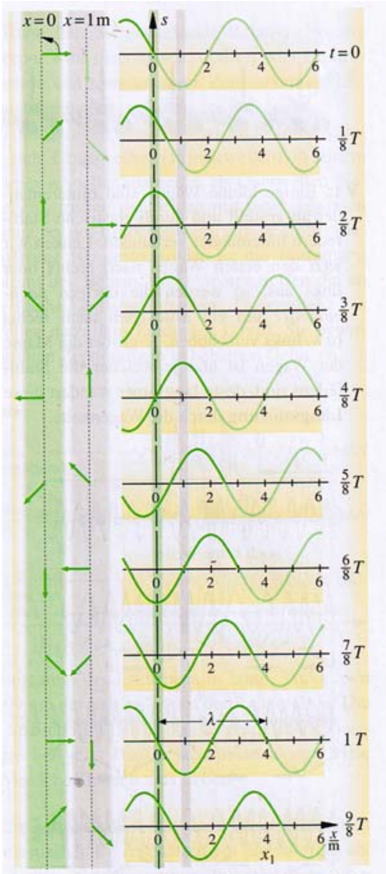
Von den oben genannten fallen die ersten beiden in die Kategorie „**mechanische Wellen**", denn sie sind an ein **Medium** gebunden (Wasser bzw. Luft). Die anderen Beispiele sind Wellen, die sich auch im Vakuum ausbreiten können!

1. *Was schwingt?*

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf mechanische Wellen, wie Schall, Wasserwellen oder die Wellen, die sich auf einer Wellenmaschine ausbreiten (siehe Abb. oben). Zunächst gucken wir jedoch nur auf 1-dimensionale Wellen. *Was breitet sich bei einer Welle aus?* Es ist nicht das Medium, sondern die „**Störung**" bzw. **Anregung**. Die Wellenmaschine ist ein gutes Modell für alle möglichen Wellen. Sie besteht aus einer Kette miteinander gekoppelter „Oszillatoren", d.h. Systeme, die Schwingungen ausführen können. Deshalb behandelt man „Schwingungen und Wellen" auch immer im „Doppelpack". Wird ein Körper einer Wellenmaschine in Schwingung versetzt, breitet sich diese Anregung über die ganze Kette aus.

2. *Grafische Darstellung und Phase*

Die Abbildungen rechts zeigen diesen Vorgang in 10 Einzelbildern. Dargestellt ist die Auslenkung (y-Achse) als Funktion des Ortes (x-Achse) zu (zehn) verschiedenen Zeiten! Die beiden linken Streifen zeigen Pfeile, die die Schwingung an den Orten x=0 und x=1m verdeutlichen. Wir betrachten nämlich wieder harmonische Schwingungen und die Auslenkungen verändern sich wie die Projektion einer Kreisbewegung (d.h. wie die Sinusfunktion). Der Winkel zwischen dem Pfeil und der x-Achse wird **Phasenwinkel** (oder kurz: Phase) genannt. Man sieht, dass der Punkt bei x=1m eine verzögerte Bewegung ausführt. Das ist klar, denn die Welle muss diesen Punkt ja erst erreichen! Man sagt: diese beiden Punkte haben eine Phasendifferenz von (in diesem Beispiel) 90° bzw. im Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$.



B 3: Eine Querwelle in 10 Momentaufnahmen: **a)** Betrachten Sie das Körperchen bei $x = 0$ durch den hellen Spalt nacheinander, d.h. von oben nach unten. Sie beobachten eine harmonische Schwingung in Phasensprüngen von $\pi/4$. Der gegen den Uhrzeigersinn rotierende Schwingungszeiger zeigt es an. **b)** Bewegen Sie für z.B. $t = 4T/8$ die Augen nach rechts, so sehen sie Körperchen, die in der Phase noch zurückliegen – je weiter rechts, desto mehr. Nach und nach werden sie alle die Bewegung des Körperchens bei $x = 0$ nachvollziehen. Bei $x = 1$ m liegt die Phase gegen $x = 0$ um $\pi/2$ zurück. **c)** In der Entfernung λ (Wellenlänge) von $x = 0$ schwingt ein Teilchen phasengleich zu $x = 0$, aber um die Periodendauer T verspätet.

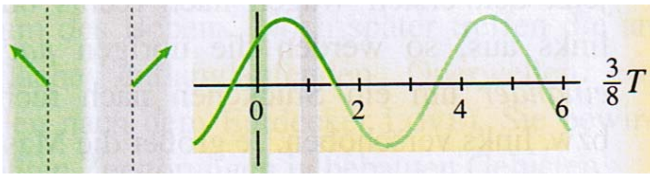
3. *Wie schnell ist eine Welle?*

Nach der Zeit T ist eine „komplette" Welle ausgesendet worden (siehe 9. Bild von oben) bzw. läuft der Phasenwinkel wieder von vorne los. Den Abstand von Punkten gleicher Phase nennt man „**Wellenlänge**“, abgekürzt mit dem griechischen Buchstaben λ (sprich „Lambda“). Die Wellenlänge ist für die **räumliche Darstellung** einer Welle also dasselbe, wie die Schwingungsdauer T in der **zeitlichen Darstellung** (also im Auslenkungs-Zeit Koordinatensystem). Da sich nach einer Schwingungsdauer genau eine Wellenlänge ausgebreitet hat, ist die Geschwindigkeit einer Welle durch $c = \frac{\lambda}{T}$ gegeben (bzw. man spricht von *c* als „Phasengeschwindigkeit“). Zum Beispiel breitet sich der Schall mit ca. $c = 340\,\frac{m}{s}$ aus. Wie groß ist also die Wellenlänge des Kammerton a (Frequenz: $f = 440Hz$)? Zur Erinnerung:

$f = \frac{1}{T}$, es gilt also $c = \lambda \cdot f$ bzw. $\lambda = \frac{c}{f}$. In unserem Beispiel liegt die Wellenlänge also bei ca. 75cm. Man sieht: je tiefer der Ton, desto größer die Wellenlänge. Das passt zu der Beobachtung, dass **tiefe** Musikinstrumente **größer** als **hohe** Instrumente sind (in den Abbildungen: Kontrabass vs. Piccolo Flöte).

4. Die mathematische Beschreibung

Die rechte Abbildung zeigt noch einmal eine Momentaufnahme einer Welle. Im Ursprung (x=0) schwingt sie gemäß der Beziehung für die harmonische Schwingung



wie: $s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$. An einer Stelle *x* rechts davon kommt die Störung verzögert an. Hier schwingen die Teilchen also gemäß $s(t,x) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_x))$, mit t_x der Zeit, die die Welle braucht, um den Ort *x* zu erreichen. Die Zeit t_x kann man aber aus der Geschwindigkeit berechnen: $t_x = \frac{x}{c} = \frac{x \cdot T}{\lambda}$. Außerdem gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Einsetzen in die Gleichung $s(t,x) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_x))$ führt dann auf:

$$\boxed{s(t,x) = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]}$$

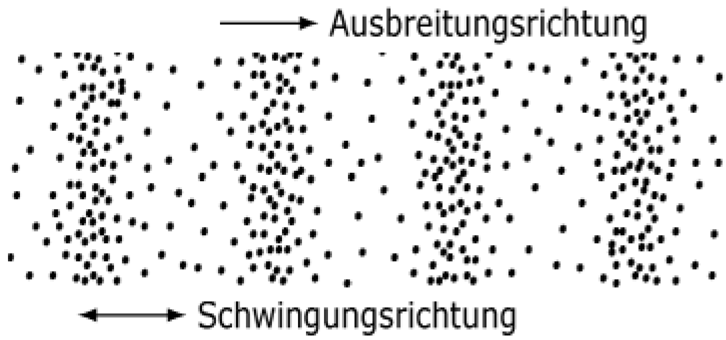
Diese Gleichung beschreibt also die Auslenkung s an der Stelle x zur Zeit t. Es ist eine Funktion mit 2 Argumenten! So etwas kommt in der Schule nicht oft vor! Man erkennt an dieser Form ebenfalls schön, wie sich **Wellenlänge** und **Schwingungsdauer** entsprechen: das eine ist die **räumliche**-, das anderen die **zeitliche Periode**! Die folgende Tabelle fasst alle Kenngrößen für die Beschreibung von Wellen noch einmal zusammen.

φ: ***Phase*** einer Welle.	Beschreibt den Schwingungszustand der Welle an einer bestimmten Stelle.
λ: ***Wellenlänge***:	Abstand zweier Punkte gleicher Phase (d.h. die beiden Punkte müssen gleiche Auslenkung und gleiche Geschwindigkeit haben)
T: ***Schwingungsdauer***	Zeit, die jeder einzelne Punkt der Welle für eine volle Schwingung benötigt. In der Zeit T schreitet die Welle um die Strecke l voran.
f: ***Frequenz***:	Zahl der Schwingungen eines Teilchens in der Zeiteinheit: $f = 1/T$
c: ***Phasen***- oder ***Wellengeschwindigkeit***:	Geschwindigkeit, mit der sich die Phase einer Welle (z.B. der Wellenberg) ausbreitet. Achtung: die Phasengeschwindigkeit ist nicht mit der Geschwindigkeit der von der Welle erfassten Teilchen zu verwechseln: $c = f \cdot \lambda$

Tabelle 1: *Kenngrößen von Wellen*

5. Transversal- und Longitudinalwellen

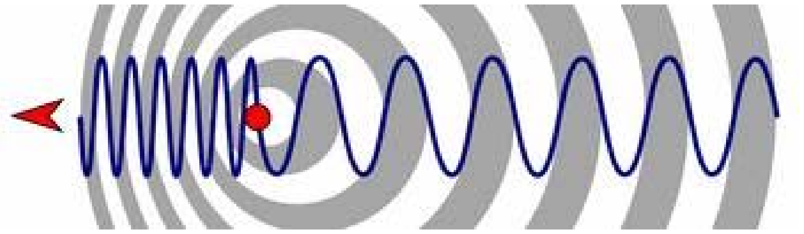
Bei einer Welle können verschiedene „**Bewegungsrichtungen**“ unterschieden werden. Zum einen die Richtung, in der sich die „Störung“ ausbreitet, also sich der Schall oder die Wasserwelle hin bewegt. Auf der anderen Seite besteht jeder Teil einer Welle aus einer Art von Pendel, das ebenfalls eine Bewegung ausführt! Dessen Schwingungen müssen nicht in dieselbe Richtung erfolgen! Bei unserer mechanischen Wellenmaschine sind diese beiden Bewegungen senkrecht zu einander. Man spricht hier auch von **Quer**- oder **Transversalwellen**. Im Gegensatz dazu breitet sich eine Schallwelle (in Luft) parallel zur Schwingung der Luft aus! Die Abbildung veranschaulicht diese periodischen Dichteschwankungen in der Luft bei einer Schallwelle. Hier spricht man von einer **Longitudinal**- oder **Längswelle**. Wasserwellen sind übrigens eine Mischform aus diesen beiden Typen.



Ausbreitungs- und Schwingungsrichtung bei einer Längswelle sind gleich!

6 Der Dopplereffekt

Nähert sich ein Polizeiauto mit Sirene und fährt anschließend an einem vorbei verändert sich nicht nur die Lautstärke des Signals, sondern auch seine Tonhöhe!



Wenn der „Sender" oder der „Empfänger" einer Welle bewegt sind ergeben sich scheinbare Frequenzänderungen. Dies nennt man den „Dopplereffekt" (benannt nach Christian Doppler, einem österreichischen Physiker). Am bekanntesten ist sicherlich der akustische Dopplereffekt, d.h. die scheinbare Frequenzveränderung bei Schallwellen. Die Abbildung illustriert den Fall einer bewegten Quelle (roter Punkt). Die Bewegung findet nach links statt. Dadurch werden die Wellen in diese Richtung „gestaucht". Das Signal scheint eine größere Frequenz zu haben (wg. $f = c/\lambda$) - also erscheint der Ton höher. Entfernt sich die Quelle vom Empfänger ist es gerade umgekehrt. Den genauen Wert dieser scheinbaren Tonhöhenveränderung rechnet man wie folgt aus:

Wie stark die Wellenlängen „gestaucht" bzw. „auseinander gezogen" werden hängt natürlich von der Geschwindigkeit *v* der Quelle ab: $\lambda' = \lambda \pm \frac{v}{f}$. Die gestrichene Größe bezeichnet die veränderte Wellenlänge. Je nach Bewegungsrichtung gilt das Vorzeichen „+" (Quelle entfernt sich) oder „-" (Quelle nähert sich). Für die wahrgenommene Frequenz gilt $f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda \pm \frac{v}{f}}$. Wir setzen in diesen Ausdruck $\lambda = c/f$ ein und erhalten

$$\boxed{f' = f \cdot \frac{c}{c \pm v}}$$

(selber nachrechnen!!!). Bewegt sich stattdessen der Empfänger, gilt:

$$\boxed{f'' = f \cdot \frac{c \pm v}{c}}.$$

7 Die Überlagerung von Wellen

Begegnen sich Wellen tritt eine „Überlagerung" auf. Sie können sich verstärken oder abschwächen. Bewegen sie sich in unterschiedliche Richtungen laufen sie anschließend allerdings ungestört weiter! Es gilt:

- Überlagern sich zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz längs einer Linie entsteht wieder eine harmonische Schwingung derselben Frequenz - unabhängig von der Phase.

- Ist die Phasendifferenz 180°(= π) löschen sich die Wellen aus, da jeweils Berg und Tal aufeinander treffen.
- Ist die Phasendifferenz 0° verstärken sich die Wellen aus, da jeweils Berg und Berg bzw. Tal und Tal aufeinander treffen.

7.1 Reflexion und stehende Wellen

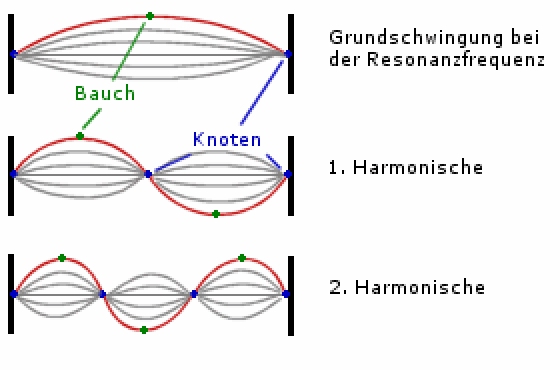
Trifft eine Welle auf den Rand des Mediums in dem sie sich ausbreitet kommt es (mindestens teilweise) zu einer Reflexion. Man denke etwa an eine Wasserwelle am Beckenrand etc. Hier können zwei Fälle unterschieden werden: entweder kann der Rand ebenfalls schwingen („loses Ende“) oder er ist starr („festes Ende“).

- Bei der Reflexion an einem festen Ende findet ein Phasensprung von 180° statt. D.h. Ein Wellenberg wird als Wellental zurückgeworfen!

- Bei der Reflexion an einem losen Ende tritt kein Phasensprung auf. Ein Wellenberg wird ebenfalls als Berg zurückgeworfen!

Auf meiner Webseite befinden sich zwei .wmv Filmchen, die einen beeindruckenden Versuch dazu zeigen!

Regt man eine Saite zu Schwingungen an breitet sich eine Welle auf ihr aus. Da sie „eingespannt“ ist kommt es am Rand zu dem, was wir „Reflexion an einem festen Ende“ genannt haben. Die zurücklaufende Welle hat also eine um 180° (bzw. im Bogenmaß π) verschobene Phase. Man beobachtet, dass bei bestimmten Frequenzen eine sog. stehende Welle entsteht. An den sog. „Bäuchen“ der Welle kommt es zu einer starken Auslenkung. Sog. „Knoten“ der Welle sind in Ruhe.



Stehende Wellen (zweidimensional)

Der Abstand der Knoten beträgt genau $\lambda/2$, da hier Wellenberg und Wellental aufeinander treffen. An diesen Stellen kommt es zu einer Aufhebung bzw. Auslöschung der Wellen. Nicht bei allen Frequenzen können sich stehende Wellen ausbilden. Vorraussetzung ist, dass die Länge der Saite *l* ein vielfaches von $\lambda/2$ ist:

$$\boxed{l = k \cdot \lambda / 2} \quad \text{mit } k \text{ einer natürlichen Zahl}$$

Wg. $f = \frac{c}{\lambda}$ kann diese Bedingung in Frequenzen umgerechnet werden:

$$\boxed{f_k = k\frac{c}{2l}}$$

Für k=1 nennt man diese Frequenz die Grundschwingung. Für k=2,3,… erhält man die sog. Oberschwingungen bzw. „harmonische Schwingungen“ bzw. kurz „Harmonische“ (siehe Abbildung).