

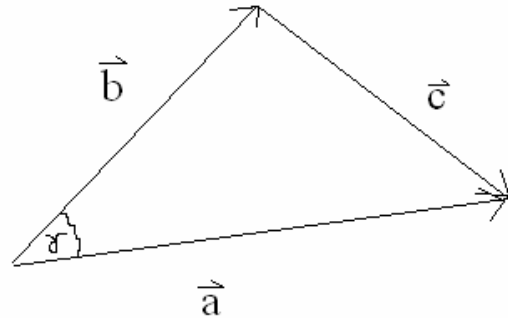
## Herleitung des Skalarprodukts

Wie berechnet man den Winkel zwischen 2 Vektoren (etwa den Winkel unter dem sich 2 Geraden schneiden)? Dazu verwendet man das sog. „Skalarprodukt“. Die folgende kleine Rechnung leitet es her!

Zunächst: Es gilt der sog. „Kosinussatz“ – eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Die Bezeichnungen sind im Dreieck rechts erläutert. Hier sind die Seiten jedoch Vektoren! Die Seitenlänge  $c$  bezeichnet also den Betrag des Vektors:  $c = |\vec{c}|$  etc...



Klar: Der Vektor  $\vec{c}$  kann durch die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ausgedrückt werden:  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

Außerdem können wir die Vektoren durch ihre Komponenten ausdrücken:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}.$$

Damit kann der Kosinussatz umgeschrieben werden:

$$(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma$$

...

$$-2a_x b_x - 2a_y b_y = -2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma$$

$$a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma$$

In der Zeile „...“ wurden die Klammern der linken Gleichungsseite ausmultipliziert und die Gleichung vereinfacht. Am Ende steht ein ganz einfacher Ausdruck. Man definiert:

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma} \quad \text{“Skalarprodukt der Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{“}$$

Unsere Rechnung hat ebenfalls gezeigt, wie man  $\vec{a} \circ \vec{b}$  ausrechnet, wenn die Komponenten der Vektoren bekannt sind:  $\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

### Anmerkungen:

- Es gilt das Kommutativ- und Distributivgesetz für diese „Multiplikation“.
- Das Ergebnis dieses Produktes ist kein Vektor!
- Weil der Kosinus von  $90^\circ$  Null ist, gilt:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$