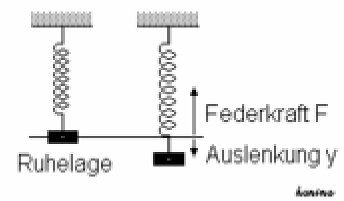
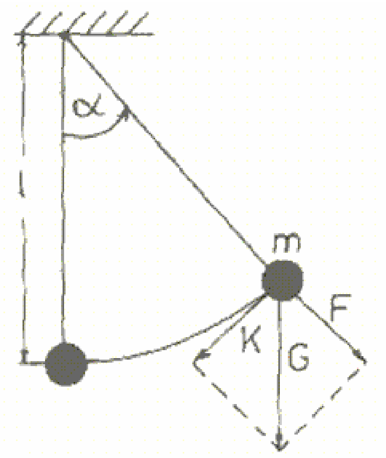
Schwingungen

Schwingungen treten in der Natur sehr sehr häufig auf! Beispiele sind unten abgebildet, nämlich eine Schaukel, ein Federpendel und ein Fadenpendel:





Was ist die Gemeinsamkeit aller „Systeme“, die Schwingungen ausführen können? Folgender Merksatz fasst es zusammen:

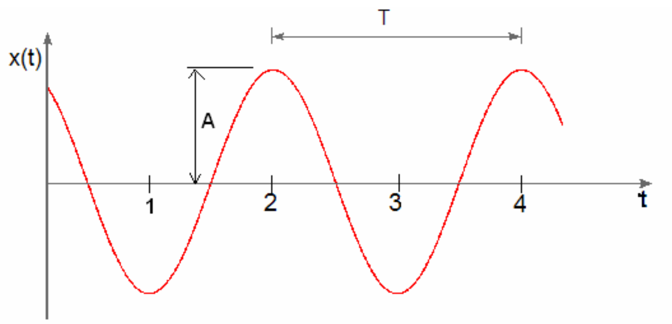
Ein System führt Schwingungen aus, wenn es eine stabile Ruhelage besitzt und bei Auslenkung aus dieser Ruhelage eine „rücktreibende“ Kraft wirkt.

Unter „rücktreibender Kraft“ ist dabei eine Kraft gemeint, die wieder zu**rück** in die Ruhelage führen möchte. Betrachten wir im Folgenden das Federpendel (als Beispiel) genauer. Die rücktreibende Kraft ist hier die „Federkraft“, für die das Hookesche Gesetz gilt: $F_R = -D \cdot x$. „*D*“ ist die Federkonstante und *x* die Auslenkung aus der Ruhelage (und nicht etwa die Länge der Feder!).

Durch die rücktreibende Kraft gelangt das Pendel also wieder in die Ruhelage – aufgrund der Trägheit bewegt es sich jedoch weiter. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis die Reibung (die wir zunächst vernachlässigen wollen) dem Treiben ein Ende macht.

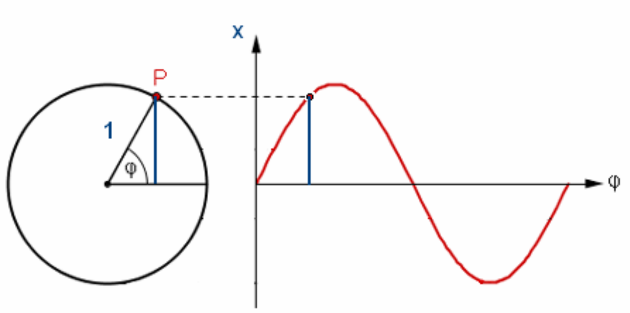
Wie sieht nun die Auslenkung als Funktion der Zeit aus, also die Funktion $x(t)$?

Die rechte Abb. zeigt den Verlauf im Falle einer speziellen Sorte von Schwingungen, den sog. „**harmonischen Schwingungen**“. Bei diesen ist die Auslenkung als Funktion der Zeit eine Sinus-Funktion! Die Federschwingung ist – wie viele andere – in guter Näherung eine solche harmonische Schwingung.



Die maximale Auslenkung aus der Ruhelage nennt man **Amplitude** (A) der Schwingung. Die Zeit, nach der sich der Vorgang wiederholt, nennt man **Schwingungsdauer** T. Also zum Beispiel der Abstand zwischen zwei „Bergen“ oder zwischen zwei „Tälern“. Unter der **Frequenz** einer Schwingung versteht mit die Anzahl der Schwingungen pro Zeit. Es gilt also $f = \frac{1}{T}$ (mit der Einheit 1Hz=s^{-1}).

Um zu zeigen, dass eine (harmonische) Schwingung tatsächlich durch die Sinusfunktion beschrieben wird, kann man etwa eine Kreisbewegung projizieren, wie in der rechten Abbildung. Der Blaue Abschnitt ist der Sinus des Winkels φ. Die Kreisscheibe muss sich dazu natürlich mit konstanter Geschwindigkeit drehen. Man definiert die „**Winkelgeschwindigkeit**“ als Winkel pro Zeit (Formelbuchstabe „ω“ – sprich „Omega“). In der Physik misst man den Winkel häufig im sog. Bogenmaß. Dabei entsprechen 360^{0} im Bogenmaß 2π (also dem Umfang des Einheitskreises!). Wir können also einen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der Schwingungsdauer herstellen: nach der Zeit T ist der Punkt auf dem Kreis um den Winkel 2π weitergelaufen, also $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



Für die anderen Winkel gilt dann $\varphi = \omega \cdot t$.

<u>Mathematische Beschreibung</u>

Wir wollen nun zeigen, dass ein Federpendel tatsächlich eine harmonische Schwingung ausführt und gleichzeitig die Schwingungsdauer berechnen! Wir erinnern zuerst daran (oder ist das neu?), dass zwischen den Funktionen für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung ein eleganter Zusammenhang besteht: Die Ableitung des Ortes (nach der Zeit) ist die Geschwindigkeit und die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion (nach der Zeit) ist die Beschleunigung! In der Physik schreibt man für die Ableitung übrigens einen Punkt über die Funktion. Es gilt also:

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$$

Bei unserem Federpendel gilt nun $F = -Dx$. Außerdem gilt ja immer: $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$. Zusammen also:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0}$$

Gesucht wird also die Funktion x(t), die diese Gleichung erfüllt! Eine solche Gleichung nennt man ***Differentialgleichung***, da Ableitungen der gesuchten Funktion in ihr vorkommen! Wir lösen diese Gleichung mit dem „Ansatz“ $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Die Ableitungen bilden (Achtung: Kettenregel!) und einsetzen führt auf $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$. So hängen als Winkelgeschwindigkeit bzw. Schwingungsdauer zusammen: Je größer die Masse, desto langsamer schwingt das Pendel. Je härter die Feder, desto schneller! Wir finden also für die Auslenkung aus der Ruhelage folgende Lösung:

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

Mit A der Auslenkung, D der Federkonstante und m der Masse, die am Pendel hängt.

Interessant ist, dass die Schwingungsdauer T nicht von der Amplitude abhängt, also etwa davon, wie weit man das Pendel am Anfang auslenkt. Auch wenn die Amplitude in Folge der Reibung kleiner wird, ändert sich die Periode also nicht! Das ist nützlich, wenn man etwa eine Pendeluhr baut.

Energiebetrachtung

Werfen wir noch rasch einen Blick auf die Energiebilanz unserer Bewegung. Bei einem Federpendel wird ständig Bewegungsenergie und Federenergie ineinander umgewandelt. Die kinetische Energie berechnet man als $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$. Die Federenergie ist $E_{Feder} = \frac{1}{2}Dx^2$. Die Summe aus beiden sollte konstant sein (schließlich haben wir Reibung bisher vernachlässigt). Setzen wir also unsere Lösung für $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ in die Beziehung für die Federenergie ein, und den Ausdruck $v(t) = \dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cos(\omega \cdot t)$ in die Beziehung für die kinetische Energie ein:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \\
&= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\
&= \frac{1}{2}mA^2\frac{D}{m}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t) \\
&= \frac{1}{2}DA^2 \cdot (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) \\
&= \frac{1}{2}DA^2
\end{aligned}
$$

Der Term mit den quadrierten Sinus- und Kosinus-Funktionen hat den Wert eins! Das Ergebnis ist also tatsächlich konstant. Der Wert dieser Konstante (Gesamtenergie) ist ebenfalls plausibel: es ist die Federenergie bei maximaler Auslenkung (also wenn die Geschwindigkeit Null ist!).

Gedämpfte Schwingungen

Im „richtigen Leben“ tritt natürlich eine zusätzliche Kraft auf, die Reibungskraft. Diese sorgt dafür, dass die Amplitude beständig abnimmt und die Schwingung irgendwann aufhört. Eine solche Schwingung nennt man „gedämpft“. Hier wird die Amplitude also ebenfalls eine Funktion der Zeit A(t). Die gestrichelte Linie wird durch eine e-Funktion Beschrieben – zumindest wenn die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist. Die Schwingungsdauer bleibt jedoch – wie wir schon gesehen haben – gleich.