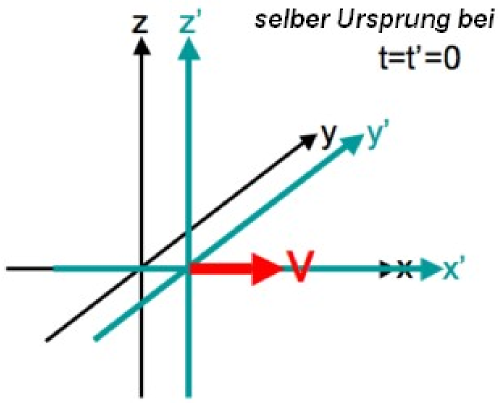
Kurzfassung der speziellen Relativitätstheorie

Oliver Passon

1 Raum, Zeit und Bewegungszustände in der klassischen Physik

Bereits in der klassischen Mechanik[1] (also der Theorie Newtons) gilt, dass sich keine „absolute“ Bewegung feststellen lässt. Damit ist gemeint, dass sich mit keinem (mechanischem) Experiment feststellen lässt, ob das Labor in Bezug auf die Erde ***ruht*** oder sich mit ***konstanter*** Geschwindigkeit bewegt. Lediglich falls das „Labor“ in Bezug auf die Erde ***beschleunigt*** wird, treten Unterschiede auf. Man denke etwa an die Kurvenfahrt in einem Auto und die dabei auftretenden „Scheinkräfte“. Ein „Bezugssystem“ in dem die Gesetze der Newtonschen Physik gelten, wird „Inertialsystem“ genannt (von lat. *iners* = *träge*, denn in ihm gilt auch das Trägheitsgesetz: *Jeder Körper verharrt in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung, wenn keine Kraft auf ihn wirkt.*). Aus dem oben gesagten folgt dann, dass jedes System, das sich relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ebenfalls ein Inertialsystem ist.

Untersuchen wir die Gleichberechtigung von Bezugssystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, etwas technischer. Uns interessiert, wie die Messungen innerhalb dieser Systeme ineinander umgerechnet werden können:



1.1 Wechsel von Bezugssystemen

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme („Bezugssysteme“), die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit *v* (längs der x-Achse) bewegen[2]. Es gelten also die folgenden Beziehungen zwischen den Koordinaten der beiden Systeme: $z = z' \quad y = y' \quad x = x' + v \cdot t$. Gleichzeitig geht man in der klassischen Physik davon aus, dass die Zeit in beiden Systemen gleich verstreicht, also für die „Zeitkoordinaten“ $t = t'$ gilt. Ein Beobachter innerhalb eines der beiden Systeme kann sich selbst als „in Ruhe“ auffassen und wird dem jeweils anderen System die Geschwindigkeit v (bzw. -v) zuordnen.

Lässt ein Beobachter im gestrichenen System einen Körper aus seiner Ruhelage fallen, beobachtet man aus dem ungestrichenen System also einen waagerechten Wurf mit der Geschwindigkeit *v* längs der *x*-Achse (und umgekehrt)! Während die Koordinaten mit denen die identischen Vorgänge beschrieben werden also voneinander abweichen, gibt es auch Größen, deren Werte in beiden Systemen identisch sind! Es gilt nämlich:

- Die Differenzen $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ zwischen zwei Ortskoordinaten in beiden Bezugssystemen sind gleich groß, denn $\Delta x = x_2 - x_1 = (x'_2 + vt) - (x'_1 + vt) = \Delta x'$. Der gemeinsame Summand vt fällt durch die Subtraktion heraus.
- Aus $x = x' + v \cdot t$ folgt $\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} + v$. Bezeichnet man die Geschwindigkeiten mit $u = \frac{x}{t}$

1 Durch die spezielle Relativitätstheorie wird die bisherige Mechanik zur „klassischen Mechanik“ – ähnlich wie durch die „moderne Kunst“ die bisherigen Werke zu „Klassikern“ werden...

2 Man denke etwa an das System „Erde“ und einen mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus fahrenden Zug...

und $u' = \frac{x'}{t'}$, gilt also $u = u' + v$. Genau wie oben zeigt man, dass für die Geschwindigkeitsdifferenzen $\Delta u = \Delta u'$ gilt.

- Schließlich gilt auch $\Delta t = \Delta t'$. Da die Beschleunigung jedoch $a = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ ist („für beliebig kleine Zeitdifferenzen"), gilt auch $a = a'$.

Jetzt wird auch klar, warum in beiden Systemen die selben mechanischen Gesetzmäßigkeiten gefunden werden – bzw. keine Möglichkeit besteht festzustellen, welches System sich „in Wirklichkeit" in Ruhe oder Bewegung befindet. In Puncto Länge, Geschwindigkeitsänderung und Beschleunigung (bzw. Kraft $F = m \cdot a$. Hier verwendet man also die zusätzlich Annahme, dass der Masse eines Körpers in beiden Bezugssystemen der selbe Wert zugeordnet wird.) stimmen schließlich die Messungen notwendig überein! Das bisher gesagte kann auf unterschiedliche Weise zusammengefasst werden:

- Gelten die Gesetze der Mechanik in einem Bezugssystem, dann auch in allen, die sich relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegen (***Galileisches Relativitätsprinzip***).
- Durch kein mechanisches Experiment kann ein „absoluter" Bewegungszustand nachgewiesen werden.

Wir sehen also, dass innerhalb der Mechanik[3] gleichförmige Bewegung „relativ" ist, d.h. nur in Bezug auf ein Koordinatensystem erklärt ist (deshalb spricht man auch von „Bezugssystem"). Das Konzept eines „absoluten" Raums hat in der Mechanik also keinen Platz (wohingegen die Zeit sehr wohl „absolut" ist..). Die Gleichungen mit deren Hilfe wir die Koordinaten ineinander umgerechnet haben ($t = t' \quad z = z' \quad y = y' \quad x = x' + v \cdot t$) werden auch „Galilei Transformationen[4]" genannt. Während sich die Ortskoordinaten und Geschwindigkeiten bei dieser Umrechnung also ändern, sind Orts**differenzen**, Geschwindigkeits**differenzen** sowie Beschleunigungen in allen Inertialsystemen gleich. Man sagt, diese Größen sind „invariant" (d.h. unveränderlich) bei der Anwendung der Galilei-Transformationen.

1.2 Elektromagnetische Wellen und Bezugssysteme

Mit der Vorhersage elektromagnetischer Wellen durch James Maxwell (1864) und ihrem Nachweis durch Heinrich Hertz (1886) stellt sich die Frage nach ihrem Medium. Es wurde damals wie selbstverständlich angenommen, dass es ein solches geben müsse – den sog. „Äther" oder „Licht-Äther". Dieser „Stoff" müsse im wesentlichen das gesamte Universum ausfüllen und die gemessene Lichtgeschwindigkeit würde dann von der Geschwindigkeit der Lichtquelle relativ zum Äther abhängen. Das Inertialsystem, das relativ zum Äther ruhen würde, hätte plötzlich eine ausgezeichnete Rolle und durch optische bzw. elektromagnetische Experimente könnte ein (in diesem Sinne) „absoluter" Bewegungszustand festgestellt werden. Alle Versuche, diese Relativbewegung nachzuweisen, scheiterten jedoch! Einstein folgerte aus diesem und weiteren Gründen, dass es keinen Äther gibt. Anscheinend schien die Geschwindigkeit des Lichts nicht von der Bewegung der Quelle abzuhängen und auch mit diesen Versuchen ließ sich Bewegung oder Ruhe in keinem „absoluten" Sinne nachweisen. Das Relativitätsprinzip

3 Die Beschränkung auf die Mechanik erfolgt im Wesentlichen dadurch, dass wir nur die Umrechnung von Längen und Zeit betrachten...

4 Wir betrachten hier den Spezialfall, dass die Relativgeschwindigkeit längs der x-Achse gerichtet ist. Im allgemeinen kann diese natürlich in eine beliebige Richtung zeigen. Die Gleichungen werden dann komplizierter – am Prinzip ändert sich jedoch nichts...

schien also nicht nur für die Mechanik zu gelten. Damit wären die beiden Postulate der speziellen Relativitätstheorie (Einstein, 1905) motiviert:

Relativitätsprinzip Die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form (d.h. alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt und man kann nicht sinnvoll von absoluter Ruhe sprechen)
Konstanz der Lichtgeschwindigkeit Die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c hat in jedem Inertialsystem denselben Wert (299792458m/s), ist also vom Bewegungszustand der Quelle ebenso unabhängig wie von dem des Beobachters.

Diese Postulate können nicht bewiesen werden und stattdessen werden wir ihre (erstaunlichen) Folgerungen untersuchen. Diese sind tatsächlich experimentell glänzend bestätigt worden. Innerhalb der klassischen Physik stehen diese Postulate in einem Widerspruch, denn bei Wechsel in ein anderes Bezugssystem müsste jede Geschwindigkeit (also auch die Lichtgeschwindigkeit) transformiert werden. Aus Sicht der Relativitätstheorie muss also eine der intuitiven Annahmen der klassischen Mechanik (bzw. der Galilei-Transformationen) unzutreffend sein. Einstein identifizierte die Definition von „Gleichzeitigkeit" als die experimentell ungeprüfte Voraussetzung – wie im folgenden noch genauer gezeigt werden wird.

2 Die spezielle Relativitätstheorie

Wir untersuchen nun die Folgerungen aus den beiden obigen Postulaten. Wir werden also neue Transformationvorschriften für die Umrechnung von Orts- und Zeitkoordinaten verschiedener Bezugssysteme brauchen. Neben diesem „kinematischen Teil" werden wir anschließend fragen müssen, welche Auswirkungen die spezielle Relativitätstheorie auf die „Dynamik" hat, also die Begriffe Impuls, Kraft, Masse und Energie.

2.1 Die Lichtuhr (bewegte Uhren gehen langsamer – Zeitdilatation)

Wir betrachten im Folgenden zwei Uhren, die aus zwei parallelen Spiegeln im Abstand *d* bestehen, zwischen denen ein Lichtblitz hin und her reflektiert wird. Jedes mal wenn der Lichtblitz einen Spiegel trifft soll die Uhr „ticken".

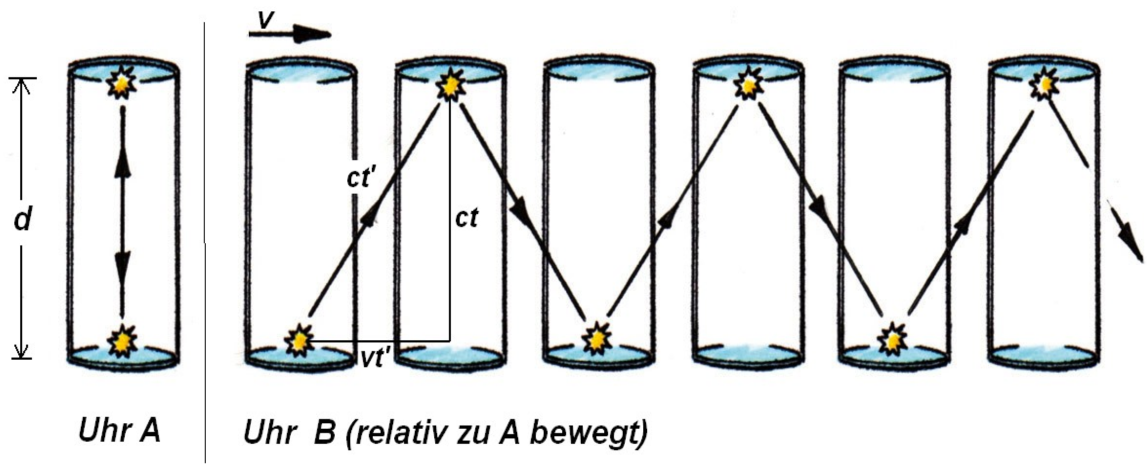


Abbildung 1: Lichtuhr zur Begründung der Zeitdilatation

Zunächst sollen beide Uhren ruhen und synchron laufen. Ihre „Ticks" werden also im

Zeitabstand $t = \frac{d}{c}$ erfolgen. Nun soll Uhr B relativ zu Uhr A mit der Geschwindigkeit v bewegt werden (siehe Abbildung 1). Ein Beobachter, der sich relativ zu Uhr A in Ruhe befindet, sieht also einen längeren Lichtweg der B-Uhr. Da sich dieses Lichtsignal mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitet („***Konstanz der Lichtgeschwindigkeit***") wird also eine längere Zeit t' zwischen zwei Ticks liegen. Aus Abbildung 1 ersieht man, dass $(ct')^2 = (vt')^2 + (ct)^2$ gilt. Auflösen nach der „B-Zeit" ergibt:

$$
\begin{aligned}
(ct')^2 &= (vt')^2 + (ct)^2 \\
t'^2 \cdot (c^2 - v^2) &= c^2 t^2 \\
t'^2 &= \frac{c^2}{(c^2 - v^2)} t^2 \\
t'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} t^2 \\
t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot t
\end{aligned}
$$

Mit anderen Worten wird die bewegte Uhr aus Sicht des mit Uhr A ruhenden Beobachters um den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ langsamer gehen. Weil dieser Faktor in Berechnungen der speziellen Relativitätstheorie so häufig vorkommt, hat man für ihn die Abkürzung γ („gamma") eingeführt. Natürlich wird auch umgekehrt ein Beobachter, der mit Uhr B mitbewegt ist, die Uhr A um den Faktor γ langsamer laufen sehen! Diese Verlangsamung der Zeit wird „***Zeitdilatation***" genannt (aus lat.: *dilatare* ‚ausbreiten', ‚aufschieben').

- ***Folgerung aus dem Gedankenexperiment mit der Lichtuhr:*** Es könnte der Eindruck entstanden sein, dass wir hier lediglich eine erstaunliche Eigenschaft dieses speziellen „Uhrentyps" aufgedeckt haben. Eine Frage lautet, ob auch gewöhnliche mechanische oder Quarzuhren in einem bewegten Bezugssystem langsamer laufen. Die Antwort innerhalb der speziellen Relativitätstheorie muss lauten: „ja" – alle Uhren verlangsamen ihren Lauf, denn ansonsten würde der Vergleich zwischen „Lichtuhr" und „gewöhnlicher" Uhr erlauben, den Bewegungszustand „absolut" zu bestimmen. Dies widerspräche aber dem ***Relativitätsprinzip***. Aus Sicht der speziellen Relativitätstheorie liegt keine Eigenschaft von Uhren vor, sondern eine Eigenschaft der „Zeit". Bereits das Galileische Relativitätsprinzip hat den „absoluten Raum" abgeschafft, während die Zeit „absolut" blieb ($t = t'$). In der speziellen Relativitätstheorie wird auch diese absolute Bezugsgröße abgeschafft.

- Als Nebenprodukt aus der Gleichung $t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ gewinnen wir eine weitere physikalische Einsicht: Offensichtlich ist diese Gleichung nur für $v < c$ sinnvoll, da sonst der Radikant negativ wird! Daraus können wir schließen, dass sich ein Inertialsystem relativ zu einem anderen nur mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegen kann. Daher kann sich kein materielles Objekt, das ja in Bezug auf ein Inertialsystem in Ruhe sein kann, mit einer Geschwindigkeit, deren Betrag ≥c ist, bewegen. Das trifft auf alle Teilchen und Körper zu, die eine nichtverschwindende Masse haben. Lediglich „*masselose* Teilchen“ wie Photonen bilden hier eine Ausnahme: sie bewegen sich immer genau mit Lichtgeschwindigkeit.

- ***Experimentelle Überprüfung***. Für diese Zeitverlangsamung („Zeitdilatation“) gibt es tatsächlich viele experimentelle Bestätigungen. Zum Beispiel haben die amerikanischen Physiker Hafele und Keating 1971 vier synchronisierte Atomuhren in Flugzeugen transportiert und die Zeitdifferenz zu einer auf der Erde ruhenden Uhr gemessen. Die Vorhersagen der Relativitätstheorie wurden bestätigt. Weitere experimentelle Bestätigungen werden wir noch diskutieren.

2.2 Der optische Dopplereffekt

Während die Lichtgeschwindigkeit nicht von der Bewegung von Quelle (oder Beobachter) abhängen, ist die Frequenz des Signals sehr wohl von der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger abhängig. Diesem „Dopplereffekt“ waren wir bereits bei Schallwellen begegnet. Weil hier tatsächlich die Bewegung relativ zu einem Medium betrachtet werden musste, waren die Fälle (i) bewegter Sender und ruhender Empfänger sowie (ii) ruhende Quelle und bewegter Empfänger zu unterscheiden.

Dies führte auf folgende Beziehungen:

$$f_E = f_S\left(1 - \frac{v_e}{c}\right) \quad \text{Empfänger entfernt sich}$$

$$f_E = f_S\,\frac{1}{1 + v_s/c} \quad \text{Sender entfernt sich}$$

(mit c der Schallgeschwindigkeit und v_e bzw. v_s der Geschwindigkeit von Empfänger bzw. Sender relativ zur Luft). Bei Licht (also dem „optischen Dopplereffekt“) müssen (bzw. können) diese beiden Fälle natürlich nicht mehr unterschieden werden. Wir werden sehen, dass unter Berücksichtigung der Zeitdilatation beide Gleichungen die selbe Form annehmen. Im Folgenden bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit und v die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger.

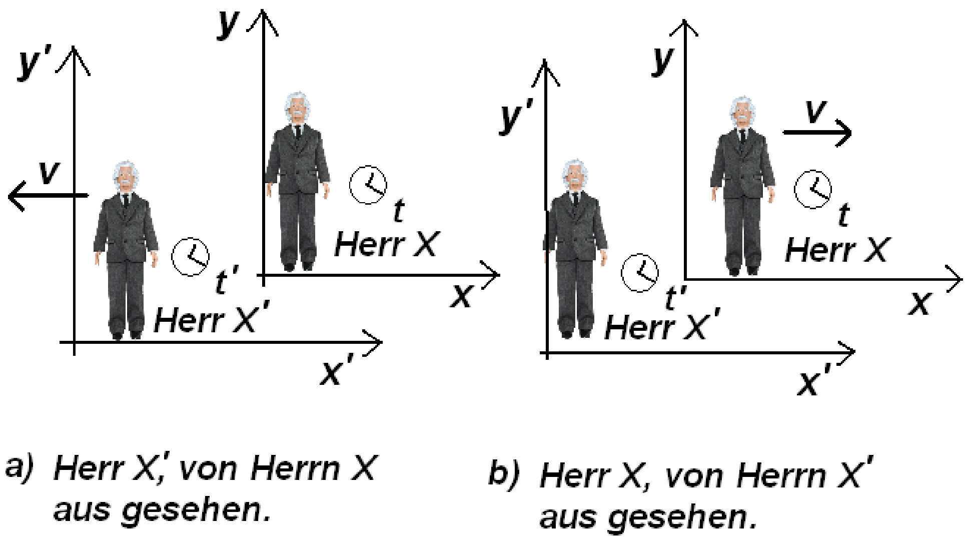
- ***Bewegter Sender:*** Aus dem Ruhesystem des Empfängers verläuft die Zeit des bewegten Senders langsamer; die Sendefrequenz erscheint also um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ***kleiner*** ($f_s \to f_s \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$).

- ***Bewegter Empfänger:*** Aus dem Ruhesystems der Quelle geht die Zeit des Empfängers langsamer. Ihm erscheint der Sender deshalb eine um den Faktor γ ***erhöhter*** Frequenz anzustrahlen ($f_s \to f_s \cdot \gamma$).

Setzt man diese Korrekturen in die Doppler-Gleichungen ein, findet man für beide Ausdrücke: $f_E = f_S\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$ bzw. $\lambda_E = \lambda_S\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$. Entfernen sich Sender und Empfänger vergrößert sich also die Wellenlänge aus Sicht des Empfängers und man spricht von „Rotverschiebung“. Bewegen sich Sender und Empfänger auf einander zu (für die Geschwindigkeit einen negativen Wert einsetzten!) verkleinert sich die Wellenlänge für den Empfänger und man spricht von „Blauverschiebung“.

2.3 Die Lorentztransformationen

Die Zeitdilatation widerspricht der Galilei-Transformation, gemäß der $t = t'$ gilt. Wie sehen die neuen Transformationsvorschriften aus, mit deren Hilfe die Orts- und Zeitkoordinaten verschiedener Inertialsysteme in einander umgerechnet werden? Wir wollen zwei Beobachter betrachten, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen. Wir nennen sie Herr X und Herr X', die ihre Beobachtungen jeweils in den Koordinaten (x,y,z,t) bzw. (x',y',z',t') ausrücken (siehe Abbildung). Wir betrachten wieder der Einfachheit halber nur die Zeit und eine Ortskoordinate („x" – längs dieser Richtung soll die Relativbewegung der Bezugssysteme stattfinden)[5].



Die gesuchten Gleichungen müssen ***linear*** sein, denn die geradlinige Bewegung in einem System soll ebenfalls geradlinig im anderen Bezugssystem sein. Somit haben wir ein lineares Gleichungssystem mit vier Unbekannten zu lösen:

$$x' = a\cdot x + b\cdot t \qquad \text{(Gleichung 1)}$$
$$t' = e\cdot t + f\cdot x \qquad \text{(Gleichung 2)}$$

Die Galilei-Transformation haben die selbe Struktur (mit: $a=1,\ b=v, e=1$ und $f=0$)

- ***Berechnung von e***
  Ein in x=0 ruhender Beobachter sieht eine bewegte Uhr um γ langsamer gehen. Einsetzen in Gleichung 2 führt auf: $t' = \gamma\cdot t + f\cdot 0$ – also $e=\gamma$.
- ***Berechnung von b***
  Für Herrn X' bewegt sich die Uhr mit der Geschwindigkeit v nach rechts (siehe Abbildung). Er sieht sie also bei $x' = vt'$. Zusammen mit x=0 in Gleichung 2 eingesetzt ergibt sich:
  $$vt' = 0 + bt$$
  $$b = v\frac{t'}{t}$$
  $$b = v\gamma$$
  Die letzte Umformung hat wieder die Beziehung $t' = \gamma\cdot t$ ausgenutzt.
- ***Berechnung von a***
  Genausogut können wir uns vorstellen, dass eine Uhr im Ursprung von X' steht (also $x'=0$) und Herr X ihr die Geschwindigkeit *-v* (Bewegung nach links) zuordnet – also $x=-vt$. Diese Werte in Gleichung 1 eingesetzt ergeben $0 = a(-vt) + (v\gamma)t$ und somit $a=\gamma$.

5 Es ist relativ leicht einzusehen, dass in die anderen Richtungen $y' = y$ sowie $z' = z$ gelten muss.

- ***Berechnung von f***
  Hier verwenden wir die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Für ein Lichtsignal beobachtet Herr X : $x = ct$ und Herr X' : $x' = ct'$. Setzen wir dies in die Gleichungen 1 und 2 ein, haben sie die Form:
  $$x' = \gamma \cdot x + \gamma \cdot v \cdot t \Rightarrow \quad ct' = \gamma ct + \gamma vt$$
  $$t' = \gamma \cdot t + f \cdot x \quad \Rightarrow \quad t' = \gamma t + fct$$
  Dividiert man diese beiden Gleichungen durch einander erhält man: $\frac{ct'}{t'} = \frac{\gamma ct + \gamma vt}{\gamma t + fct}$

  aufgelöst nach f ergibt dies $f = \frac{v}{c^2}\gamma$.

Damit sind die gesuchten Koeffizienten bestimmt und die Umrechnung zwischen Inertialsystemen erfolgt gemäß:
$$x' = \gamma \cdot x + \gamma \cdot v \cdot t = \gamma (x + vt)$$
$$t' = \gamma \cdot t + \gamma \frac{v}{c^2} \cdot x = \gamma \left(t + \tfrac{v}{c^2} x\right)$$

Erinnern wir uns an die Definition von γ lautet die ausführliche Form also:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t + x \cdot \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}}$$

<u>Lorentztransformationen</u>
(bei Relativgeschwindigkeit längs der x-Achse)

Für Geschwindigkeiten v, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind (man schreibt auch $v << c$) wird $\gamma \approx 1$ sowie $v / c^2 \approx 0$. Es ergeben sich dann die Gleichungen der Galilei-Transformation. Dies drückt man durch die Formulierung aus, dass „relativistische Effekte" erst bei großen Geschwindigkeiten eine Rolle spielen und die klassische Physik ein „Grenzfall" der Relativitätstheorie ist.

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die Konsequenzen der SRT sehr viel leichter untersuchen als bisher. Betrachten wir als erste Anwendung die Längenmessung in verschiedenen Bezugssystemen.

2.4 Folgerung: bewegte Maßstäbe sind kürzer – Lorentzkontraktion

In der klassischen Mechanik gilt für Längen (also Ortsdifferenzen) $\Delta x = \Delta x'$. In der SRT gilt dies nicht mehr! Stellen wir uns einen Maßstab vor, dessen Enden an den Ortskoordinaten x_1' und x_2' ***ruhen***, der im gestrichenen System also die Länge $\Delta x' = (x_2' - x_1')$ hat. Die Länge, die Herr X in seinem ***relativ dazu bewegten*** System feststellt, berechnet sich durch Anwendung der Lorentztransformation: $x_1' = \gamma x_1 + \gamma v t_1$ sowie $x_2' = \gamma x_2 + \gamma v t_2$. Die Differenz ergibt: $\Delta x' = \gamma (x_2 - x_1) + \gamma v (t_2 - t_1)$. „Längen messen" bedeutet jedoch, die Orte zur selben Zeit zu bestimmen, also $t_2 = t_1$. Daraus folgt jedoch $\Delta x' = \gamma (x_2 - x_1) = \gamma \cdot \Delta x$ bzw. $\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'$. Herr X misst also für den bewegten Stab eine Länge, die um den Faktor

$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ verkürzt ist! Dies ist als Verkürzung des „Raumes“ aufzufassen – also eine Veränderung der Geometrie – und keine dynamische „Stauchung“ von bewegten Objekten.

2.4.1 „Anschauliche“ Herleitung der Lorentzkontraktion

Tatsächlich folgt die Lorentzkontraktion bereits aus der Zeitdilatation und kann auch ohne die Lorentztransformationen begründet werden. Betrachten wir eine Uhr, die mit Geschwindigkeit v an einem Maßstab vorbeifliegt. In seinem Ruhesystem habe der Maßstab die Länge L_{Ruhe} und die Uhr braucht also $\Delta t = \frac{L_{\text{Ruhe}}}{v}$ um ihn zu „überfliegen“. Aus Sicht der ruhenden Uhr vergeht die Zeit jedoch schneller (Merke: bewegte Uhren gehen langsamer...). Deshalb wird hier ein ***kleineres*** Intervall für den Überflug gemessen $\Delta t \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Wie beurteilt man aus dem System der ruhenden Uhr also die Länge des mit Geschwindigkeit v bewegten Maßstabes? Als $L_{\text{bewegt}} = v \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Es gilt also $L_{\text{bewegt}} = L_{\text{Ruhe}} \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}$ bzw. bewegte Maßstäbe sind in (in Bewegungsrichtung) um den Faktor γ^{-1} kürzer als in ihrem Ruhesystem.

Kombinierte Anwendungsaufgabe zu Zeitdilatation und Längenkontraktion

Vom Standpunkt eines ruhenden Beobachters X dehnt sich die Zeit in einem relativ zu ihm bewegten Bezugssystem X' aus während Strecken in Bewegungsrichtung verkürzt erscheinen. Diese Beziehung gilt jedoch wechselseitig, d.h. ein in X' ruhender Beobachter sieht die Zeit in X langsamer verstreichen sowie die dortigen Strecken verkürzt.

a) Myonen sind instabile Teilchen, die durch kosmische Strahlung in einer Höhe von ca. 10km über der Erdoberfläche ***entstehen*** (sog. sekundäre kosmische Strahlung). Ihre Halbwertszeit beträgt $\tau_0 = 1{,}5 \mu s$. Ihre Geschwindigkeit liegt bei 99,5% der Lichtgeschwindigkeit. In einer Halbwertszeit legen sie somit eine Strecke von $3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6} s = 450 m$ zurück. Rechnet man auf dieser Grundlage die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreffen auf der Erde aus erhält man einen viel zu geringen Wert. Im Gegensatz zur Beobachtung sollten praktisch keine Myonen die Erdoberfläche erreichen. Der Grund für diese Diskrepanz liegt darin, dass die obige Lebensdauer nur in ihrem Ruhesystem gilt! Aus Sicht der Erde verläuft ihre Zeit langsamer und die Lebensdauer verlängert sich auf

$$\tau_0 \cdot \gamma = \frac{1{,}5 \mu s}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}995c}{c}\right)^2}} \approx 15 \mu s .$$

Die Messung der Myonrate bestätigt

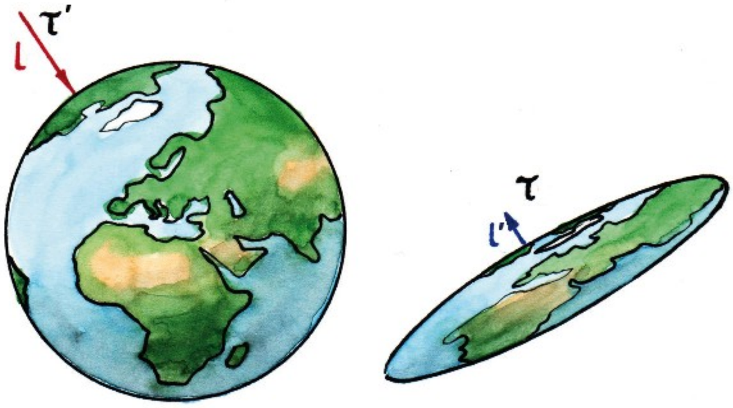


Abbildung 2: Links: Das Myon hat aus dem Ruhesystem Erde eine längere Halbwertszeit und kann die Strecke von 10km zurücklegen. Rechts: Vom Ruhesystem des Myons ist die Halbwertszeit geringer - aber die Entfernung zur Erde verkürzt!

tatsächlich diesen durch die Zeitdilatation größeren Wert der Halbwertszeit.

b) Warum erreicht das Myon aber aus Sicht seines eigenen Ruhesystems die Erdoberfläche? Hier beträgt die Halbwertszeit schließlich nur $1{,}5\mu s$? Die Antwort liegt natürlich in der Lorentz-Kontraktion. Im Ruhesystem des Myons bewegt sich die Erde mit 0,995-facher Lichtgeschwindigkeit in seine Richtung. Die Entfernung zur Erde wird dadurch durch den Faktor $\sqrt{1-0{,}995^2} \approx 0{,}1$ verkürzt. Der Abstand erscheint aus dem Myon-System also auf ca. 1km geschrumpft (siehe Abbildung 2).

2.5 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

Mit Hilfe der Lorentztransformationen können wir uns nun auch leicht einen Überblick darüber verschaffen, welche Geschwindigkeit Beobachter aus verschiedenen Bezugssystemen einem Objekt zuordnen. Wir verwenden die Beziehung $u' = \frac{x'}{t'}$ und müssen also lediglich die beiden entsprechenden Gleichungen der Lorentz-Transformation durch einander dividieren:

$$u' = \frac{\gamma(x+vt)}{\gamma\left(t + x\frac{v}{c^2}\right)}$$ | durch γ und t dividieren (Trick: $\frac{x}{t} = u$) $$u' = \frac{\frac{x}{t}+v}{1+\frac{\frac{x}{t}v}{c^2}} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}.$$

Wieder erkennt man, dass die newtonsche Geschwindigkeitsaddition $u' = u + v$ abgewandelt wird! Überprüfen wir noch, dass die neue Additionsregel tatsächlich die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gewährleistet. Sei also $u = c$ und dieses Lichtsignal wird aus einem System betrachtet, in dem die Quelle zusätzlich mit der Geschwindigkeit v bewegt ist. Dann misst dieser Beobachter: $u' = \frac{c+v}{1+\frac{vc}{c^2}} = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = \frac{c+v}{\frac{c+v}{c}} = c$. Das ist allerdings spektakulär! Die relativistische Regel für die Addition von Geschwindigkeiten stellt also sicher, dass die Lichtgeschwindigkeit aus allen Bezugssystemen den gleichen Wert hat!

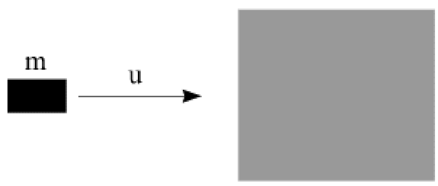
3 Relativistische Dynamik

Wir wissen nun wie Abstände, Geschwindigkeiten und Zeiten in der SRT bei Bezugssystemwechsel transformiert werden. Wir wenden uns nun den Begriffen Impuls, Kraft und Energie zu! Tatsächlich werden hier die beiden Postulate der SRT zur Begründung nicht mehr ausreichen! Die Darstellung bedient sich großzügig bei Franz Embacher (http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/SRT/).

3.1 Relativistischer Impuls (oder „relativistische Massenzunahme“)

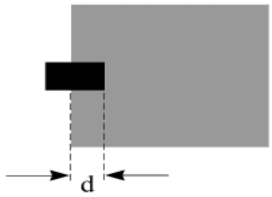
Der Impuls (=Masse mal Geschwindigkeit) ist die eigentliche Grundgröße der Mechanik, denn er ist erstens Erhaltungsgröße („in einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Impulse konstant“) und zweitens ist seine zeitliche Änderung gleich der Kraft. Wie nicht anders zu erwarten muss seine Definition in der SRT abgewandelt werden, wenn er weiterhin diese ausgezeichneten Eigenschaften
behalten soll. Aber der Reihe nach:

- Wir betrachten einen Körper m, der auf ein ruhendes Hindernis trifft. Seine Masse sei so viel größer, dass er praktisch in Ruhe bleibt.

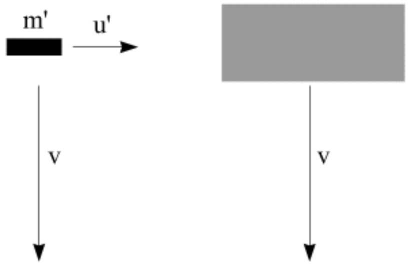


Außerdem sein die Geschwindigkeit viel kleiner als c ($u << c$).

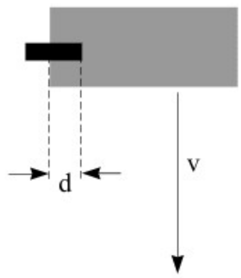
- Die Situation sei so eingerichtet, dass die Eindringtiefe proportional zum Impuls (p=m u) des Teilchens sei. Wir können mit diesem Versuch also den Impuls messen! Wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Geschwindigkeit u dürfen wir zudem die klassische Definition des Impulses verwenden.



- Nun betrachten wir die Situation aus einem anderen Bezugssystem, dass sich senkrecht zu unserem Aufprall mit der Geschwindigkeit v bewegt. Diese Geschwindigkeit sei beliebig groß[6]. Aus der Perspektive dieses Systems sind die Körper in vertikaler Richtung Längenkontrahiert. In horizontaler Richtung sind die Strecken jedoch unverändert. Dennoch ändert sich die ***Geschwindigkeit*** u (genauer: sie verringert sich). Dies liegt daran, dass aus Sicht dieses Bezugssystems die Zeit um den Faktor γ langsamer vergeht! Es gilt somit $u' = \gamma \cdot u$



- Nun betrachten wir den Aufprall aus Sicht des bewegten Bezugssystems. Die Eindringtiefe ist unverändert, denn die Lorentzkontraktion wirkt nur in Richtung der Relativgeschwindigkeit. Jetzt erscheint es also so, als wenn ein ***langsamerer*** Körper ein Loch gleicher Tiefe schlagen kann! Das ist kurios, denn die Eindringtiefe sollte ja ein Maß für den Impuls sein, der sich gemäß $p' = m \cdot u'$ verringert hat. Die Gültigkeit dieser Beziehung dürfen wir durchaus annehmen, denn nach Voraussetzung ist u ja viel kleiner als c – und somit auch u'



- Es gibt an dieser Stelle *zwei Mögliche Auswege*:

  ➔ man nimmt an, dass die ***Masse*** aus Sicht des gestrichenen Systems **größer** ist. Definiert man $m' = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ wird die kleinere Geschwindigkeit gerade ausgeglichen! Die Größe m' wird dynamische oder relativistische Masse genannt. Im Unterschied dazu bezeichnet man m_0 als Ruhemasse (also die Masse des Körpers im Bezugssystem, in dem der Körper ruht). Man spricht hier von einer relativistischen ***Massenzunahme***[7].

---

6 Für unser Argument brauchen wir $u << v < c$. Auf diese Weise gilt auch $u^2 + v^2 \approx v^2$.

7 Dieses Konzept wird von einigen Autoren jedoch als irreführend betrachtet. Wir werden später sehen, dass die relativistische Versionen von Impuls und Energie auf die Beziehung $p = \frac{E}{c^2} \cdot v$ führt. Als Quelle der ***Trägheit*** sollte also eher die Gesamtenergie aufgefasst werden – und keine „geschwindigkeitsabhängige“ Masse der Form

➔ Statt die Masse zu transformieren, kann man die Größe $\vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ als „neuen“ (d.h. relativistischen) Impuls auffassen. Dann kann man auf die Unterscheidung von Ruhe- und dynamischer Masse auch verzichten.

Entscheiden ist, dass der so definierte relativistische Impuls eine ***Erhaltungsgröße*** ist, d.h. in einem abgeschlossenen System ändert sich die Summe der relativistischen Impulse nicht. Die relativistische Verallgemeinerung der Kraft definiert man nun (wie in der newtonschen Physik) als zeitliche Ableitung des (relativistischen) Impulses!

3.2 Die Vakuumlichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit

Wir hatten bereits erwähnt, dass die Lichtgeschwindigkeit als „Grenzgeschwindigkeit“ betrachtet werden muss, d.h. kein (massiver) Körper kann bis auf diese Geschwindigkeit beschleunigt werden. Das formale Argument lautete, dass der relativistische Gamma-Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ für $v = c$ unendlich wird.

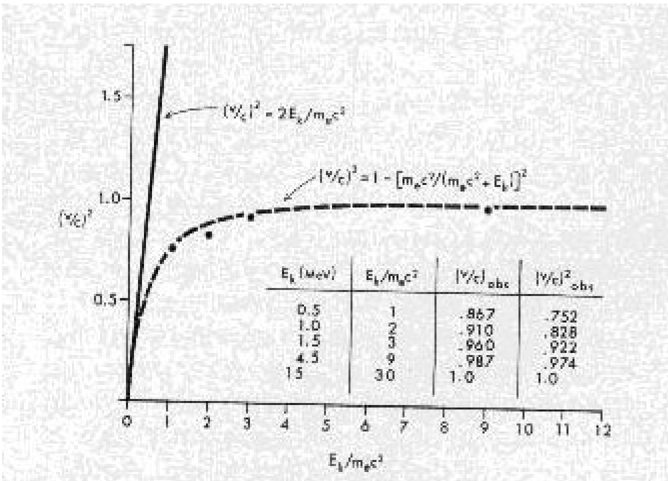


Abbildung 3: Messwerte des Bertozzi Versuchs.

Nun könnte dies natürlich auch nur auf eine Grenze der Anwendbarkeit dieser Theorie deuten und diese Behauptung sollte experimentell überprüft werden. Genau dies wurde von William Bertozzi 1964 durchgeführt. Er beschleunigte Elektronen mit einer Spannung von 0,5-15MeV und maß die Zeit, die sie zum Zurücklegen einer bestimmten Strecke brauchen (also ihre Geschwindigkeit mit Hilfe der „Laufzeit“). Aufgrund der klassischen Beziehung $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ hätte man bei diesen Spannungen eine Geschwindigkeit vom bis zu 30-fachen der Lichtgeschwindigkeit erwartet. Tatsächlich wurde c nicht übertroffen und er erhielt die Messwerte der Abbildung 3 (verbunden durch die gestrichelte Linie). Es stellt sich also die Frage, wo die elektrische Energie geblieben ist, die gemäß der Beziehung $E_{el} = e \cdot U$ in die Elektronen „investiert“ wurde. Dies führt uns auf die Diskussion der relativistischen Energie!

3.3 Relativistische Energie

Eine anschauliche Erklärung dafür, dass Bertozzi die Elektronen nicht auf Lichtgeschwindigkeit (geschweige denn Überlichtgeschwindigkeit) bringen konnte liegt natürlich darin, dass die bewegte Masse zunimmt. Gemäß $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ würde sie bei v=c über alle Grenzen wachsen – die Energie zu ihrer Beschleunigung müsste also ebenfalls unendlich sein. Offensichtlich ist die klassische Beziehung der kinetischen

---

$m_{rel} = \frac{E}{c^2}$. Statt von „Ruhemasse“ m_0 sollte deshalb auch besser einfach von <u>der</u> Masse m gesprochen werden.

Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ nicht mehr anwendbar. In ihr einfach m durch die relativistische Masse zu ersetzen reicht aber ebenfalls nicht aus! Die Beziehung die wir suchen muss für kleine Geschwindigkeiten jedoch mit der klassischen Vorhersage übereinstimmen! Wir verwenden nun eine nützliche mathematische Näherung: Es gilt für kleine Werte von x (d.h. $x << 1$): $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$. Für unseren Gamma-Faktor bedeutet dies natürlich: $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ (bei $v << c$). Betrachten wir die relativistische Masse unter dieser Näherung erhalten wir:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2}.$$

Die relativistische Masse hat also zwei Anteile: die Ruhemasse sowie einen Ausdruck, der in der Form $\frac{E_{kin}}{c^2}$ geschrieben werden kann! Eine naheliegende Interpretation dieser Gleichung lautet, dass die zugeführte kinetische Energie zu Masse wird – bzw. dass ***Masse und Energie „äquivalent" sind***. Mann kann die Gleichung ebenfalls mit c^2 durchmultiplizieren und erhält $m(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$. Es liegt dann nahe, den Term m_0c^2 als Ruheenergie aufzufassen (Energie bei v=0, auch E_0 genannt) und $m(v)\cdot c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ als die relativistische Gesamtenergie:

$$E_{ges} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0c^2 + E_{kin}.$$

Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, dass wir hier ein Gleichheitszeichen geschrieben haben (und kein "$\approx$"). Wir wollen diese Gleichung nämlich verwenden, um die neue („relativistische")kinetische Energie zu definieren:

$$E_{kin} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

Nähert man wieder $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$ erhält man natürlich: $E_{kin} \approx \frac{1}{2}mv^2$. Wir gewinnen also für kleine Geschwindigkeiten die bekannte Beziehung für die kinetische Energie zurück. Mit dieser Gleichung für die (relativistische) kinetische Energie können wir nun erneut einen Blick auf Bertozzis Experiment (Abschnitt 3.2) werfen. Dieser hatte Elektronen die kinetische Energie $E_{el} = e\cdot U$ zugeführt. Wir sind nun in der Lage, die Geschwindigkeit zu berechnen, die die Elektronen dadurch erhalten: $e\cdot U = m_0c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$. Auflösen nach v ergibt: $v = c\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{eU}{m_0c^2}+1\right)^2}}$. Man erkennt zudem: Wächst die Spannung, nähert sich die

Wurzel immer mehr der 1 an. Die Geschwindigkeit nähert sich somit immer weiter der Lichtgeschwindigkeit – ohne sie zu erreichen. Einen Schönheitsfehler hat die Beziehung $E = mc^2$ jedoch – sie versagt bei der Behandlung masseloser Teilchen (wie etwa den Photonen). Dieser Frage widmen wir uns im nächsten Abschnitt.

Anwendungsaufgabe zu Geschwindigkeit und Energie

In den Experimenten der Teilchenphysik treten Energien und Geschwindigkeiten auf, bei denen relativistische Korrekturen eine große Rolle spielen. Etwa wurden am Speicherring LEP im Forschungszentrum CERN bei Genf Elektronen auf eine Energie von 45GeV beschleunigt.

Frage: Welche Geschwindigkeit hatten diese Elektronen?

45GeV (Gigaelektronenvolt) entspricht einer Energie von $45 \cdot 10^9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J = 7{,}2 \cdot 10^{-9} J$. Die Ruheenergie eines Elektrons beträgt lediglich $E_0 = m_0 c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg \cdot (3 \cdot 10^8 m/s)^2 = 8{,}19 \cdot 10^{-14} J$. Die Elektronenenergie beträgt also ca. das 88.000-fache der Ruheenergie. Wir schreiben also:

$E = 88000 m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$. Diese Gleichung kann nun leicht nach der Geschwindigkeit aufgelöst werden: $v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{88000^2}} \approx 0{,}9999999999 \cdot c$. Das Zuführen weiterer Energie vergrößert also kaum noch die Geschwindigkeit, sondern lediglich die Trägheit der Elektronen!

3.4 Zusammenhang zwischen Energie und Impuls

Tragen wir unsere Beziehungen noch einmal zusammen:

Relativistischer Impuls: $$p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E}{c^2} \cdot v$$

Relativistische Energie: $$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

In der klassischen Physik kann man die kinetische Energie durch den Impuls ausdrücken ($E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$). Etwas ähnliches finden wir auch in der SRT. Aus den obigen Gleichungen folgt (einfach den relativistischen Impuls durch die relativistische Energie teilen):

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{E}v = pc^2 \quad (*)$$

Die Beziehung für die relativistischen Energie kann zudem wie folgt umgeschrieben werden:

$$E\sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 c^2 \quad |\,\text{quadrieren und ausmultiplizieren}$$

$$E^2 - \frac{(Ev)^2}{c^2} = (m_0 c^2)^2 \quad |\,\text{einsetzen von } (*)$$

$$E^2 - (pc)^2 = (m_0 c^2)^2$$

Die letzte Gleichung wird oft auch nach E aufgelöst:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} \quad \textbf{\textit{Relativistischer Energiesatz}}$$

Diese Beziehung wird auch als relativistischer Energiesatz bezeichnet.

Masselose Teilchen

Wir wissen bereits, dass massive Teilchen die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen können. Die sog. „Photonen“, die sich offensichtlich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, haben also keine (Ruhe-)Masse. Sie nennt man auch „masselose“ Teilchen. Aus dem relativistischen Energiesatz kann (mit $m_0 = 0$) nun auch ihre Energie abgelesen werden: $E = pc$ bzw. $p = \frac{E}{c}$. Für die Photonenenergie wissen wir aus der Quantenmechanik, dass $E = h \cdot f = h\frac{c}{\lambda}$ gilt. Daraus entnehmen wir: $pc = h\frac{c}{\lambda}$ bzw. $p = \frac{h}{\lambda}$. Diese Beziehung haben wir in der Quantenmechanik bereits kennengelernt. Es handelt sich um die sog. de Broglie-Relation für den Zusammenhang zwischen Impuls und Wellenlänge bei Materieteilchen. Louis de Broglies Leistung bestand also darin, diese für Photonen aus der SRT folgende Gleichung auch für z. Bsp. Elektronen zu postulieren.

Aufgaben

1. Pionen haben eine (Ruhe-)Halbwertszeit von $\tau_0 = 1{,}8 \cdot 10^{-8} s$. In Versuchen der Teilchenphysik können sie auf eine Geschwindigkeit von 99% der Lichtgeschwindigkeit gebracht werden.
   a) Berechnen sie, um welchen Faktor sich im Laborsystem die Lebensdauer erhöht.
   b) Berechnen sie die Strecke, die das Teilchen in dieser Zeit zurück gelegt hat.
2. Ein Meterstab fliegt mit 0,6c an uns vorbei. Wie lang erscheint er uns?
3. Zwei baugleiche Uhren bewegen sich aneinander mit konstanter Geschwindigkeit vorbei. Im Ruhesystem der einen Uhr erscheint die andere nur halb so schnell zu laufen. Berechnen sie die Relativgeschwindigkeit!
4. Eine Wasserstofflinie des Spiralnebels Hydra wird auf der Erde mit der Wellenlänge $\lambda = 475nm$ gemessen, während man im Labor für die selbe Linie $\lambda = 394nm$ misst. Berechnen sie die Fluchtgeschwindigkeit des Spiralnebels.

5. Berechnen sie zunächst „klassisch“ bei welcher Beschleunigungsspannung ein Elektron die Lichtgeschwindigkeit erreichen würde. Geben sie anschließend an, wie groß die Geschwindigkeit bei dieser Beschleunigungsspannung gemäß der SRT ist. (***Tipp***: die Beziehung $eU = E_{kin}$ bleibt korrekt – nur die Definition der kinetischen Energie hat sich geändert...).
6. Ein Kilogramm Gold (spezifische Wärmekapazität $C = 130\frac{J}{kg \cdot K}$) wird um 10ºC erwärmt. Um welchen Betrag erhöht sich seine Masse?