Ausarbeitung zur Vorlesung „Didaktik der Analysis“ WS 09/10

Einführung des Integrals: Flächenbestimmung vs. Rekonstruktion

Vorgelegt von: A*********** B******, ******
M*********** B********, ******

Einleitung

In dieser Ausarbeitung geht es um zwei mögliche Einführungsarten des Integrals in der Oberstufe. Dabei soll zunächst auf die fachwissenschaftlichen Grundlagen eingegangen werden. Anschließend erfolgt eine Einordnung in den Lehrplan. Danach wird es um die Einführung der Integralrechnung im Unterricht gehen, wobei zunächst zwei verschiedene Möglichkeiten der Einführung vorgestellt werden: die Einführung durch Flächenbestimmung und die Einführung durch Rekonstruktion. Zudem werden Aufgaben zur Vertiefung und Sicherung sowie weiterführende Aufgaben und Probleme vorgestellt. Es soll hierbei jeweils die Didaktik im Vordergrund stehen. Zum Schluss wird eine kurze Zusammenfassung gegeben.

Fachwissenschaftliche Grundlagen

Die fachwissenschaftlichen Grundlagen werden an dieser Stelle kurz gehalten. Unter dem Riemann-Integral versteht man den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und einer Funktion f. Dieser Flächeninhalt kann über Rechteckflächen approximiert werden. Dazu werden Ober- und Untersummen über der Funktion gebildet. Wird die Zerlegung der Rechtecke unendlich fein, können sich Infimum der Obersumme und Supremum der Untersumme entsprechen:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

Ist dies der Fall, wird die Funktion f Riemann-integrierbar genannt. Der gemeinsame Wert heißt dann das Riemannsche Integral. Bei weitergehendem Interesse wird auf die gängige Literatur verwiesen, z.B. Forster, 2008, Analysis 1.

Einordnung in den Lehrplan von Gymnasien und Gesamtschulen

Die Integralrechnung wird laut Lehrplan für die Sekundarstufe II in der 12. oder 13. Klasse eingeführt. Hierbei ist es der Lehrperson überlassen, in welcher Reihenfolge die Themen der Oberstufe bearbeitet werden. Der Integralbegriff wird mit der Idee des Algorithmus verknüpft, um so die Idee des Messens zu behandeln. Laut Lehrplan handelt es sich beim Integralbegriff z. B. darum, wie sich die Wasserzulaufgeschwindigkeit auf das Wasservolumen einer Talsperre auswirkt. Wichtig ist, dass das Integral nicht auf den Flächeninhalte eingeschränkt werden soll. Zudem kann auch Software, wie Tabellenkalkulationen, zur Entwicklung und Weiterführung eingesetzt werden. Im Grundkurs ist vor allem die Anschauung wichtig, welche durch Rechner unterstützt werden kann. Die Schüler sollten Produktsummen, Stammfunktionen, bestimmte Integrale, Integralfunktionen, den Hauptsatz, Flächenberechnungen und Verfahren zur numerischen Integration kennen lernen. Im Leistungskurs dürfen komplexere Anwendungsprobleme behandelt werden. Zudem sollte der Zusammenhang zwischen Grenzwert, Steigung, Integral und uneigentlichen Integral geklärt werden. Neben den Themen des Grundkurses sollte im Leistungskurs auch auf die Beziehung zwischen Ableitungs- und Integrationsregeln, uneigentliche Integrale und den Zusammenhang zwischen Integrierbarkeit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit eingegangen werden.

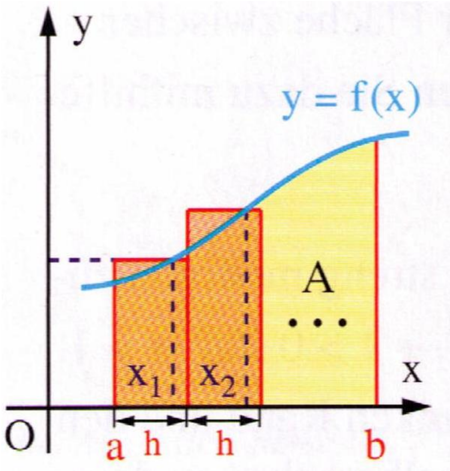


Abbildung 1: Näherung der Fläche unter dem Funktionsgraphen durch Rechtecke.
Quelle: Klett, Lambacher Schweizer Analysis Leistungskurs, 2002, Seite 67

Einführung in den Unterricht

Zur Einführung des Integrals im Unterricht gibt es verschiedene Methoden - zwei davon sollen an dieser Stelle diskutiert werden: Die Flächenberechnung und die Rekonstruktion. Vorab ist zu bemerken, dass man an keiner Stelle einen Ansatz findet, das Integral ausschließlich über Flächenberechnung *oder* Rekonstruktion einzuführen. Die beiden Ansätze sind sehr stark „miteinander verwandt“. Sie ergänzen sich auch gegenseitig, was dazu geführt hat, dass beide im Lehrplan explizit gefordert werden. Deswegen sind sie im Folgenden nicht ganz voneinander zu trennen.

1. Flächenbestimmung

Ziel dieses Ansatzes ist, in Verallgemeinerung der Flächenberechnung aus der Mittelstufe auch Flächen berechenbar zu machen, die durch krummlinige Funktionsgraphen begrenzt werden, anstatt sich nur auf lineare Funktionen zu beschränken.
Wenn man diesen Weg im Unterricht geht, dann hat man verschiedene Teilschritte abzuarbeiten: Am Anfang steht die Idee, die Flächen zunächst näherungsweise zu berechnen. Dies kann durch verschiedene schon bekannte Flächen aus der Mittelstufe geschehen. Trapeze und Dreiecke können die Schüler selbstständig dazu benutzen, zunächst graphisch eine Näherung anzugeben. Für das weitere Vorgehen beschränkt man sich dann auf die Verwendung von Rechtecken, vgl. Abb. 1. Dabei diskutiert man mit den Schülern, dass es für die Näherung einen Unterschied macht, welchen Funktionswert man aus einem Teilintervall auswählt. Auf diese Weise kommt man zu den Begriffen „Obersumme“ und „Untersumme“, bzw. verallgemeinert zur „Produktsumme“. Anschaulich dürfte den Schülern klar sein, dass die Näherung umso genauer wird, je schmaler man die Rechtecke wählt. Der Begriff des Grenzüberganges ist aus der Differentialrechnung bekannt, sodass es für die Schüler einleuchtend sein dürfte, dass beim Übergang zu unendlich vielen Rechtecken die Fläche auf diese Weise exakt angegeben wird. An dieser Stelle kann das Integralzeichen als stilisiertes S (für Summe) als Abkürzung für diesen per Grenzübergang berechneten Flächeninhalt eingeführt werden. Problematisch ist bei diesem Ansatz die Orientiertheit des so ermittelteten Flächeninhaltes. Diese ergibt sich aus dem Produktsummenansatz durch die Verwendung von Funktionswerten der berandenden Funktion, vgl. Abb. 2.

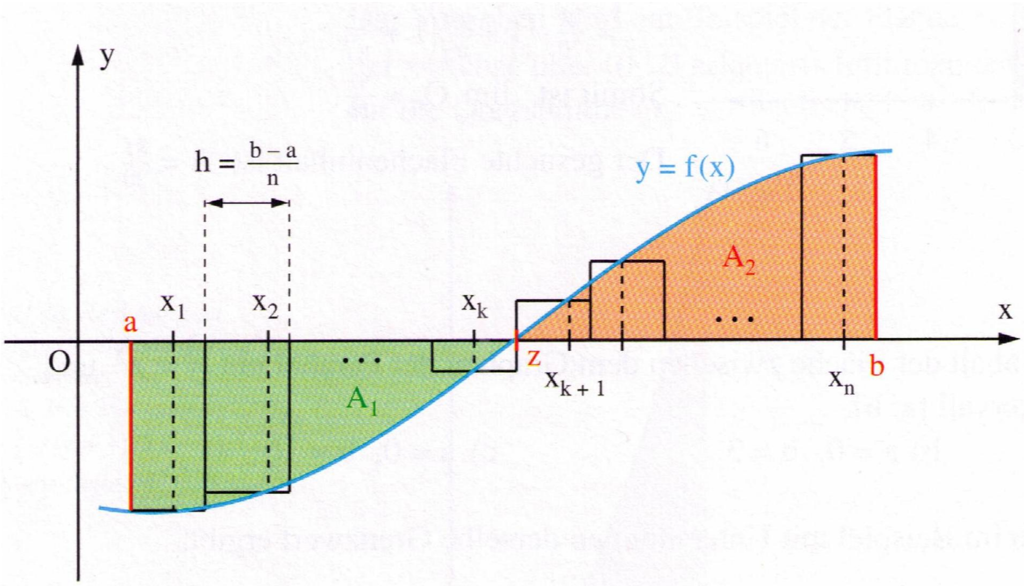
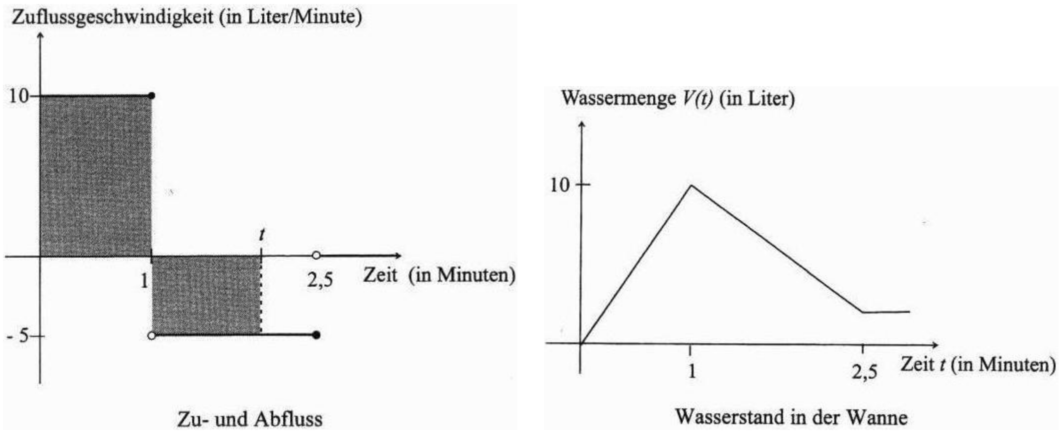


Abbildung 2: Entstehung orientierter Flächen durch die Produktsummen
Quelle: Klett, Lambacher Schweizer Analysis Leistungskurs, 2002, Seite 72

Der ursprüngliche Ansatz hatte jedoch zum Ziel, die (positive) Fläche zwischen Abszisse und Funktionsgrophen zu bestimmen. Deswegen muss die Tatsache der Orientiertheit der durch die im Folgenden ermittelten Formeln berechneten Werte bei reinen Flächenbestimmungen mit berücksichtigt werden. Dies macht Nullstellenberechnungen nötig.
Um den Übergang zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu schaffen und damit die Berechnung von Integralen im üblichen Sinne zu ermöglichen, bietet es sich an, an dieser Stelle zunächst getrennt vom eigentlichen Thema den Begriff der Stammfunktion einzuführen: Eine Stammfunktion ist eine Funktion, die eine vorgegebene Ableitung hat. Man kann aufgrund der Vorerfahrungen der Schüler problemlos eine Liste, welche jeweils die Ableitung und (eine) Stammfunktion gegenüberstellt, aufstellen. Von diesem Punkt aus kann man den Hauptsatz in zwei Schritten erhalten: Zunächst stellt man fest, dass die Integralfunktion $J_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Danach zeigt man den Schülern, dass – wenn man eine beliebige Stammfunktion kennt – die Berechnung des Integrals leicht möglich ist. Im Weiteren wird es dann nur noch darum gehen, die Ermittlung von Stammfunktionen zu betrachten.
Problematisch ist an diesem Ansatz, dass der Hauptsatz - im Gegensatz zum Zugang über die Rekonstruktion - „vom Himmel fällt“. Die Schüler können diesen Schritt nicht selbst vollziehen, sondern müssen ihn vom Lehrer mehr oder weniger präsentiert bekommen und staunend zusehen. Außerdem lässt sich der Flächenbegriff nicht gut auf „rekonstruktive Aufgabenstellungen“ übertragen. In Zusammenhängen, die das Verständnis der Integration als Rekonstruktion erfordern, ist es für die Schüler überhaupt nicht einsichtlich, warum die Integralrechnung weiterhilft. Was hat denn beispielsweise eine Fläche mit dem Füllstand in einer Badewanne zu tun?

2. Rekonstruktion

Um die Integralrechnung als Rekonstruktion einzuführen, bietet es sich an, mit einem Beispiel zu beginnen. Hierbei ist direkt positiv anzumerken, dass die Schüler das gestellte Problem selbstständig bearbeiten können. Als erste Aufgabe kann der Zu- und Abfluss von Wasser in eine Badewanne gewählt werden. Dabei wird die Zu- und Abflussgeschwindigkeit angegeben, mit Hilfe derer die Wassermenge rekonstruiert werden kann. Dies können die Schüler selbstständig berechnen, indem sie die Fläche unter dem Graphen mit bereits bekannten Flächeninhalten berechnen, bzw. später annähern. Hier ist die Zuflussgeschwindigkeit abgebildet. Nun wird die



(a) Quelle: Danckwerts, Vogel, (2006) S. 97 (b) Quelle: Danckwerts, Vogel, (2006) S. 98

Abbildung 3

Wassermenge berechnet, indem das Produkt aus der Zuflussgeschwindigkeit und der Zeit gebildet wird. Dies lässt sich darstellen als:

$$V(t) = \begin{cases} 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5(t-1) & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 2,5 & \text{für } t > 2,5 \end{cases}$$

$V(t)$ ist dann die Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit. Auch hier ist es möglich, dass die Schüler die Ausgangsfunktion selber finden, da ihnen bekannt sein sollte, wie man Funktionen aufstellt. Die so errechneten Produkte können positive oder negative Vorzeichen haben, wodurch den Schüler direkt der orientierte Flächeninhalt vermittelt wird. Die Zuflussgeschwindigkeit $V(t)'$ ist nun die Ableitung von $V(t)$, also die momentane Änderungsrate der Wassermenge. Da das Wort integrieren dem lateinischen Wortstamm *integrare* entspringt, was wiederherstellen bedeutet, kann den Schülern auch „wörtlich“ integrieren als rekonstruieren vermittelt werden. Dazu sollte der Schüler lernen, aus der Änderungsrate die Stammfunktion wiederherzustellen. Dies führt den Schüler dann Schritt für Schritt zur gesuchten Funktion. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten: Zunächst kann dem Schüler die Rekonstruktion über Grafiken nahe gelegt werden. Dabei sollte die Steigung Verwendung finden. Ein anderer Zugang zur Rekonstruktion der Stammfunktion geht über die numerische oder analytische Rekonstruktion. Dabei wird die Stammfunktion über die Veränderung der Änderungsrate ermittelt. Der Schüler kann dabei näherungsweise Berechnungen (evtl. auch iterativ) durchführen. Dies geht dann durch Aufsummieren in die Summation über. Wählt man eine unendlich feine Zerlegung, ergibt sich ein genauer Wert für die Stammfunktion. Somit kommt man über die Flächenberechnung von der Summe zum Integralzeichen.

Natürlich sind auch Variationen des Beispiels möglich. Die Zuflussgeschwindigkeit muss nicht stückweise konstant verlaufen. Bei nicht stückweise konstanten Funktionen kann man wie im Fall konstanter Zuflussgeschwindigkeiten verfahren. Das liegt daran, dass die Zuflussgeschwindigkeit in genügend kleinen Zeitintervallen als nahezu konstant angesehen werden kann. In jedem dieser Intervalle kann dann wie bei konstanter Zuflussgeschwindigkeit verfahren werden. Dies sollte jedoch auch den Schülern erklärt werden.
Es sind auch andere Zugänge wie z. B. die Aufzeichnung eines Fahrtenschreibers oder die Rekonstruktion des zurückgelegten Weges, die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Epidemie und die Rekonstruktion der Anzahl der Kranken etc. möglich. In diesen Beispielen ist der Übergang der Funktion f' zur Rekonstruierten f gleich. Jedoch muss die berandende Funktion nicht Ableitung einer Anderen sein. Somit sollte man sich von dieser Voraussetzung lösen. Den Schülern sollte deutlich gemacht werden, dass zu einer Berandung f, auf einem Intervall $[a, b] \to \mathbb{R}$ die Integralfunktion J_a gehört. Diese gibt auf dem Intervall zu jedem x den orientierten Flächeninhalt zwischen x-Achse (im Bereich von a bis x) und Funktion f an. Die Funktionswerte der Integralfunktion heißen Integrale.
Fraglich ist nun, ob die Integralfunktion weiterhin die Rekonstruierte ist, auch wenn die Berandung nicht schon als Ableitung gegeben ist. Damit kommt man dann zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Die Aussage des Hauptsatzes ist, dass die „Ableitung der Integralfunktion zur berandenden Funktion zurückführt,...“[1]. Die Ableitung der Integralfunktion ist also die Berandung. Somit ist die Integralfunktion eine Stammfunktion der Berandung. Auch der Hauptsatz ist auf das Badewannenbeispiel zurückführbar. Durch die Gegenüberstellung des Funktionsterms der Zuflussgeschwindigkeit und des rekonstruierten Wasservolumens lässt sich feststellen, dass die Ableitung der Integralfunktion die Berandung ist. Letztlich sollte den Schülern vermittelt werden, dass man die Integralfunktion finden kann, indem man die Differenz

$$J_a(x) = F(x) - F(a), \qquad x \in [a, b]$$

irgendeiner Stammfunktion berechnet. Wichtig ist, dass den Schülern klargemacht wird, dass nicht immer eine Stammfunktion gefunden werden kann, damit sie diese Methode nicht überschätzen.
Auch im aktuellen Lambacher Schweizer wird die Integralrechnung über die Rekonstruktion eingeführt. Siehe hierzu Brand, Reinelt, 2008, S. 154ff. Allerdings wird auch auf die Einführung der Integralrechnung durch Flächenbestimmung eingegangen. Daraufhin werden Integrale und die Integralfunktion eingeführt. Anschließend wird auf die Stammfunktion eingegangen um dann den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung vorzustellen. Die einzelnen Schritte werden jeweils mit Aufgaben und Beispielen untermauert. Siehe hierzu Brand, Reinelt, 2008, S. 162 - 172.

Fazit

Um die Flächenbestimmung zu motivieren gebraucht man Beispiele. Diese lassen sich aber nur über die Rekonstruktion begründen. Haben wir diese Beispiele aber nicht, dann wird es den Schülern nicht sofort einleuchten, warum die Integralrechnung „toll“ ist, denn was interessiert uns die Fläche unter einer Funktion? Natürlich gibt es viele Bereiche, wo man solche Begründungen nicht hat, aber wenn man sie hat, so sollte man sie auch nutzen. Wir bringen also Vielfalt in unsere Beispiele, indem wir die Funktion als Änderungsrate betrachten und auf

[1] Dankwerts, Vogel, 2006, S, 104

die Größe der Gesamtänderung schließen wollen. Ein Mathebuch schreibt dazu: „Kennt man die momentane Änderungsrate, so kann man die Gesamtänderung der Größe (Wirkung) als Flächeninhalt unter einer Kurve deuten. Deshalb sucht man nach Methoden zur Bestimmung solcher Flächeninhalte.“[2] Schon am Anfang wird also der Ansatz der Flächenberechnung mit der Rekonstruktion in Verbindung gebracht. Es ist sehr schwierig, Beispiele zu finden, die einerseits lebensnah und interessant sind und andererseits nichts mit Rekonstruktion zu tun haben. Es bleibt wohl dabei, dass die Flächenberechnung mit einer Begründung motiviert werden muss, die der Rekonstruktion zuzuordnen ist. Ansonsten berechnet man eben die Flächen, weil man sie berechnen möchte. Hier wird schon klar: Rekonstruktion und Flächenberechnung sind nicht voneinander zu trennen. Es sind nicht nur beide Ansätze im Lehrplan explizit gefordert, sondern beide greifen ineinander und ergänzen sich sehr schön. Will man nur rekonstruieren, dann fehlt einfach die Anschauung, dass es sich dabei auch um die Fläche handelt, die der Graph der Funktion mit der Abszisse einschließt. Berechnet man nur die Flächen, dann ist nicht klar, warum man die Höhe eines Hubschraubers aus Absteigen und Absinken desselben berechnen kann, indem man „eine Fläche“ bestimmt.

Ein großes Defizit der Flächenberechnung ist das „vom-Himmel-fallen“ des Hauptsatzes. Der Zusammenhang zu dem, was vorher gemacht wurde, lässt sich nicht so recht herstellen. Die Schüler können nur andächtig staunend zusehen, was der Lehrer an die Tafel schreibt und sich sagen: „Schön - jetzt sollen wir also rechnen.“ Das ist bei der Rekonstruktion anders, denn die Schüler erkennen Zusammenhänge wieder, die sie aus der Differentialrechnung kennen. Da ergibt der Hauptsatz, der ja Differenzial- und Integralrechnung miteinander verknüpft, direkt Sinn. Diesen Sinn muss man sich bei der Flächenberechnung erst erarbeiten.

Der Ansatz der Rekonstruktion ist in noch einem weiteren Punkt einfacher zu handhaben: Flächen unter der Abszisse gehen ja bekanntlich negativ in das Integral mit ein. Bei der Flächenberechnung muss man das ausgleichen, indem man Nullstellen berechnet und einzeln die Beträge addiert. Dies ist bei der Rekonstruktion nicht für jede Aufgabenstellung erforderlich. Der Zugang zu den orientierten Flächeninhalten wird durch die Rekonstruktion deutlich erleichtert.

Des Weiteren wird bei der Rekonstruktion die additive Konstante mit Leben gefüllt. Betrachtet man noch einmal das Badewannenbeispiel, so wird schnell klar, dass sie den Füllstand der Badewanne zu Anfang der Messung angibt. Bei der Flächenberechnung ist die additive Konstante bestenfalls bedeutungslos, wenn sie nicht sogar stört.

Nun könnte man zusammenfassend doch sagen, dass die Rekonstruktion die bessere Variante ist. Das halten wir allerdings für einen Fehler. Beide Ansätze stehen nebeneinander und brauchen sich - und das nicht nur, weil beide im Lehrplan „angefordert werden“. Es ist überdies interessant, dass man in der Literatur praktisch nie den einen Ansatz getrennt vom Anderen findet. Es ist wichtig, dass beide Ansätze im Unterricht ihren Platz finden und ihre jeweiligen Vorzüge voll genutzt werden.

[2]Klett, Lambacher Schweizer Analysis Leistungskurs, 2002, Seite 64, Zeile 38ff

Anhang 1: Protokoll der Abschlussdiskussion

Im Folgenden geben wir die Diskussion wieder, die im Anschluss an den Vortrag geführt wurde.

Dozent: Man muss die additive Konstante inhaltlich füllen. Wenn man die Frage stellt, wie viel Wasser zu einem Zeitpunkt in der Badewanne ist, wird jeder Schüler fragen: „War die Wanne am Anfang voll oder leer?“

Person 1: Ich möchte nur kurz anmerken: In meiner Schulzeit, als die Integralrechnung eingeführt wurde, habe ich nie gelernt, was da hinter steckt. Die Bedeutung von diesem Integralzeichen habe ich erst in der Uni kennengelernt, dass $\int$ für Summe steht. Vielleicht sollte man das den Schülern klar machen.

A***********: Also sollte man die Integralrechnung besser über die Flächen einführen?

Person 1: Nein, dazu wollte ich gar nichts sagen.

Person 2: Ich glaube, ich habe das Integral in der Schulzeit über Flächen kennengelernt, aber hinterher ist die Rekonstruktion noch gemacht worden. Ich fand Geometrie immer toll und deshalb habe ich das positiv in Erinnerung. Deshalb war das hinterher nicht schlimm, von den vielen Stammfunktionen zu einer Funktion zu kommen. Ich kann mir vorstellen, dass es für Schüler einfacher ist, das erst einmal vor Augen zu haben, um zu sehen, was das ausmacht, dass es wirklich die Summe ist. Man sollte es über das eine einführen und das andere nicht weglassen.

A***********: Ich habe eine Nachhilfeschülerin und die sollte die Rekonstruktion bei einem Hubschrauberflug machen. Ich finde die Rekonstruktion eigentlich besser, aber meine Nachhilfeschülerin meinte dann: „A***********, das ist ja alles ganz schön, aber ich verstehe nicht, was das mit der Fläche zu tun hat, wenn ich die Flughöhe des Hubschraubers berechnen soll. Warum bedeutet die Fläche die Höhe?“

Dozent: Ich frage mich gerade: Ist eine Skizze des möglichen Unterrichtsganges der Rekonstruktion überhaupt klar geworden? Bei der Badewanne fragt man sich, was der Füllstand ist. Was ist der nächste methodische Schritt? Wie würden Sie das unterrichten? Badewanne – wie viel Wasser ist drin?

A***********: Die Schüler haben die Ableitung als Änderungsrate kennengelernt.

Dozent: Durch die Änderungsrate findet man die Funktion wieder? [Der Dozent steht auf und zeichnet eine Grafik an die Tafel: Funktion und ihre Rekonstruierte. Übereinstimmung von Maximum und Nullstelle werden markiert.] Der Schüler soll feststellen, dass die Füllmenge ein Maximum hat, und die Änderungsfunktion hat an der gleichen Stelle eine Nullstelle. Das kommt mir doch bekannt vor, nur andersherum! Man möchte dazu kommen, dass $F' = f$ ist. Der Füllstand hat ein Maximum, wo das andere eine Nullstelle hat. Beispielsweise bedeutet auch der Funktionswert von F die Fläche.

A***********: Der Schüler soll auf die Idee kommen, dass das Integral so ähnlich wie die Ableitung ist.

Person 3: Ich würde sagen: Für mich ist es klar, dass man es über Fläche einführen muss. Nur ist es wichtig, dass man zur Rekonstruktion kommt. Das müssen Schüler wissen. Aber wenn man damit anfängt, ist die Verwirrung perfekt. Wenn man damit anfängt, mit diesen Punkten, wo Maximum und Nullstelle übereinanderliegen, da kommen Schüler nicht hinter. Ich würde über die Flächen anfangen und dann einsteigen mit der Rekonstruktion. Wenn das eine richtig sitzt, das also von der anderen Seite beleuchten.

Person 4: Ich finde das über die Flächen deutlich ansprechender, weil man sich vorher Funktionen angeschaut hat, Maxima und Nullstellen, dann kann man auch die Fläche ansehen. Flächen wurden in der Mittelstufe schon berechnet. Nun kann man auch unter Funktionen Flächen berechnen. Dass man aus der Skizze der Funktion weitere Informationen erkennen kann.

A***********: Es steht da [im Lehrplan] gerade, dass man sich nicht nur auf die Fläche beschränken soll. Ich habe den Eindruck, dass es bei den schlechteren Schülern Verwirrung stiftet.

Person 5: Ich habe noch kein Buch gesehen, wo man nur über die Rekonstruktion geht, das ist nur der Einstieg. Man bekommt ein Beispiel und dadurch kommt man auf einige Probleme und dann geht es zur Flächenberechnung über. Das finde ich eine gute Brücke, dass man es genauer über die Flächenberechnung klar macht, was da hinter steckt. Als Einstieg finde ich die Rekonstruktion gut und zur Präzisierung kann man über die Fläche gehen und später vielleicht zur analytischen Definition kommen, wenn das möglich ist in der Schule.

Dozent: Diese Methode ist der perfekte Einstieg. Man kann nicht sagen, dass man es über die Fläche in die Schülerköpfe gebimst hat und schiebt dann die Rekonstruktion nach. Wenn man den vollen Integralbegriff hat, dann kann man hier [bei den Rekonstruktionsbeispielen und der Übereinstimmung von Nullstelle und Maximum] nichts mehr lernen. Ich glaube, die Schwierigkeiten, die Sie vermuten, sind anders gelagert. Die [Schüler] sind vorher ein Jahr lang darauf getrimmt worden, Differenzialrechnung zu machen, Nullstellen zu berechnen. Daher ist der Wiedererkennungswert in der Grafik sehr hoch. Man berechnet hier nur was anderes. Und man erkennt, dass es eine Ableitungsbeziehung gibt. Das schlägt sofort die Brücke zum Hauptsatz. Wenn man von der Fläche kommt, ist der Hauptsatz reine Magie. Gleichzeitig ist die Flächenberechnung super technisch: Die Schweinearbeit haben Sie ja unterschlagen, die haben Sie in ihrem Rucksack. Dann muss ich das für eine nicht-triviale Funktion mal machen. Die Geschichte mit Excel war super. Dass man diese Geschichte [die komplizierte Flächenberechnung über Reihen] nur skizziert und nicht mit Summen macht, sondern dann mit Excel macht. Aber es bleibt ein Geschmäckle übrig. Man würde das mit dem Kreis komplett wiederholen.

Person 6: Zur additiven Konstante: Bei mir wurde das über die Flächen eingeführt. Diese additive Konstante, da habe ich mir nur gemerkt, dass die dazukommt, weil sie bei der Ableitung wieder wegfällt. Warum, war mir nicht klar. Das ist ein Nachteil bei der Flächenberechnung. Dadurch [durch die Rekonstruktion] wäre es einem Schüler eingängiger, woher die Konstante kommt.

Dozent: Gibt es noch eine andere Anwendung von Integralrechnung als Fläche und Rekonstruktion?

M****: Ja, die Mittelwertberechnung.

[Es folgt ein Tafelanschrieb: Grafik einer Funktion, Teilintervalle jeweils mit Rechtecken, die den mittleren Funktionswert als Höhe haben. Dozent schreibt schließlich folgendes an: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \overline{f}$]

Dozent: Das heißt, es könnte durchaus sein, dass eine Freundin sagt: Ich weiß, dass ein Integral der Mittelwert ist. Den Begriff kann man auch stark machen. Man hat eine Fläche und wenn man das durch die Breite teilt, bekommt man die mittlere Höhe, um ein flächengleiches Rechteck zu bekommen.

Anhang 2: Produktsummengrenzwerte für $f(x) = x$ bzw. $f(x) = x^2$

Betrachte die Funktion $f(x) = x$. Es wird die Fläche zwischen Graph und x-Achse im Bereich von 0 bis b ermittelt. Teile dazu das Intervall in n Teile.

Untersumme:

$$\begin{aligned}
U_b &= \frac{b}{n} \cdot \frac{b}{n} + \frac{b}{n} \cdot 2\frac{b}{n} + \frac{b}{n} \cdot 3\frac{b}{n} + \cdots + \frac{b}{n} \cdot (n-1)\frac{b}{n} \\
&= \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) \\
&= \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n
\end{aligned}$$

Für die Obersumme ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
O_b &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

Grenzübergang:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2(n^2-n)}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2n^2}{2n^2} - \frac{b^2n}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2}b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2(n^2+n)}{2n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2n^2}{2n^2} + \frac{b^2n}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2}b^2
\end{aligned}$$

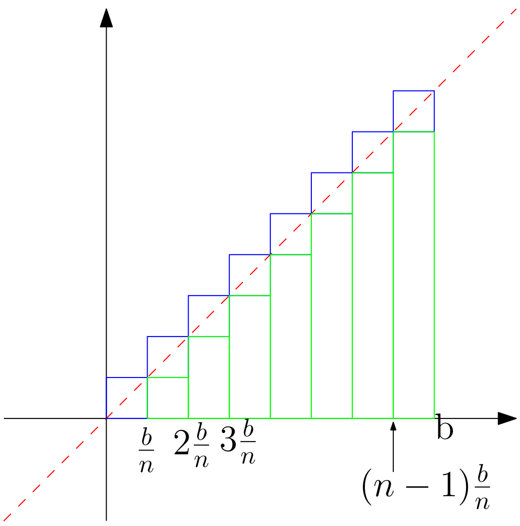


Abbildung 4

Betrachte für den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ ebenfalls die Fläche unter dem Graphen im Intervall [0,b]. Teile das Intervall wiederum in n gleichbreite Teilintervalle.

Untersumme:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(2\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(4\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left((n-1)\frac{b}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \end{aligned}$$

Für die Obersumme ergibt sich analog

$$O_n = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

An dieser Stelle braucht man die Summenformel für $\sum i^2$. Diese lässt sich durch eine Teleskopsumme ermitteln:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 &= 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ (n+1)^3 + 1 &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\ 3\sum_{i=1}^{n} i^2 &= (n+1)^3 + 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \\ 6\sum_{i=1}^{n} i^2 &= 2(n+1)^3 + 2 - 3n(n+1) - 2n \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ O_n &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Grenzwerte:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{2}b^3\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{3}b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^3\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{3}b^3 \end{aligned}$$

Anhang 3: Beispiel für aus der Mittelstufe bekannte Integrale

Das zu Anfang der Präsentation gebrachte Beispiel zur Berechnung der Kreisfläche in der Mittelstufe, was in der Oberstufe einen Wiedererkennungswert haben kann, sollte hier auch nicht fehlen. Durch diese Berechnung werden Schüler schon in der Mittelstufe an die Benutzung einer Tabellenkalkulation herangeführt und es fallen bereits die Begriffe „Obersumme“ und „Untersumme“. Es wird schon der Eindruck vermittelt, dass die Obersumme einfach eine Abschätzung nach oben bedeutet – die Untersumme entsprechend eine Abschätzung nach unten. Die Fläche kann nicht kleiner als die Unter- und nicht größer als die Obersumme sein.
Bei der Flächenberechnung wird das Integral auch erstmal durch Rechtecke angenähert - in der Mittelstufe verhält es sich ebenso mit der Kreisfläche. Außerdem bietet es die Möglichkeit, die Schüler selbst nachdenken zu lassen, denn auf die Formeln, die nötig sind, um die Rechteckshöhen zu berechnen, muss man auch erst mal kommen. Es wäre schlecht, wenn sie „vom Himmel fallen“ würden und nur dazu da wären, den PC damit zu „füttern“. Nötig für die Entwicklung der Formeln ist letztlich nur der Satz des Pythagoras, den alle Schüler schon aus der achten oder neunten Klasse kennen.

Benötigte Formeln und ihre Entwicklung

Um den Computer arbeiten zu lassen, muss man zuerst wissen, was man ihm „sagen“ muss, damit er das Richtige ausrechnet. In unserem Fall möchten wir Anschätzungen nach unten (Untersumme) und nach oben (Obersumme) haben.
Zur Vereinfachung nehmen wir als Erstes einen Viertelkreis statt eines ganzen und multiplizieren unser Ergebnis später mit vier. Wir teilen die x-Achse in n Abschnitte der Breite h ein. Nun müssen wir zu jedem Rechteck, das wir in oder über den Viertelkreis legen die Höhe berechnen.
Die Höhe bekommen wir mit dem Satz des Pythagoras: Wir haben für jede zu berechnende Höhe ein Dreieck, dessen Hypotenuse 1 ist, weil wir mit dem Einheitskreis rechnen. Die bekannte Kathete liegt an der Unterseite (auf der Abszisse) uns ist für jedes Dreieck im i-ten Abschnitt bei der Untersumme $i \cdot h$ lang, bei der Obersumme $(i-1) \cdot h$ lang. So bekommt man also folgende Formel: Rechtecksfläche = Länge · Höhe = $h \cdot \sqrt{1-(i \cdot h)^2}$ bei der Untersumme bzw. Rechtecksfläche = $h \cdot \sqrt{1-((i-1) \cdot h)^2}$. Man muss sich klar machen, dass die bekannte Kathete des „Hilfsdreiecks“ meistens länger ist, als die Grundseite des Rechtecks, dessen Fläche wir hinterher berechnen wollen. Das könnte sonst zu Verwirrung führen.

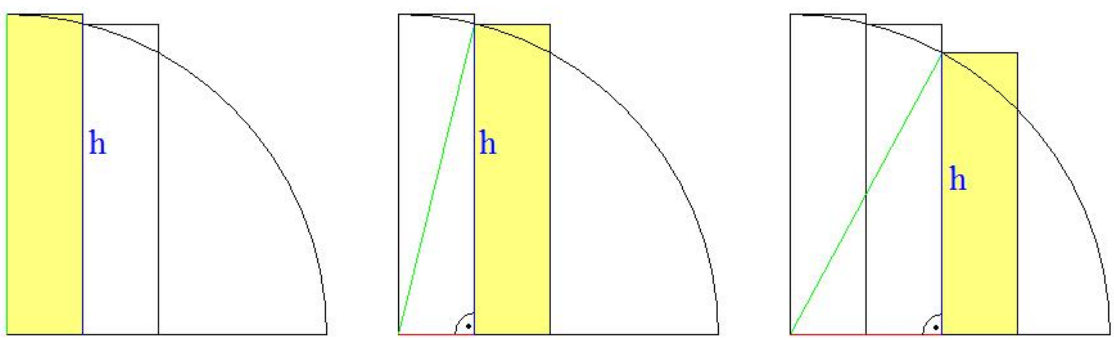


Abbildung 5: Beispiel: Obersumme für i=1, i=2 und i=3. Die Hypotenuse des Hilfsdreiecks ist jeweils grün, die Grundseite ist rot. Gelb ist die Fläche, für die die Höhe bestimmt wird. Auffällig ist der erste Höhenwert, der 1 ist.

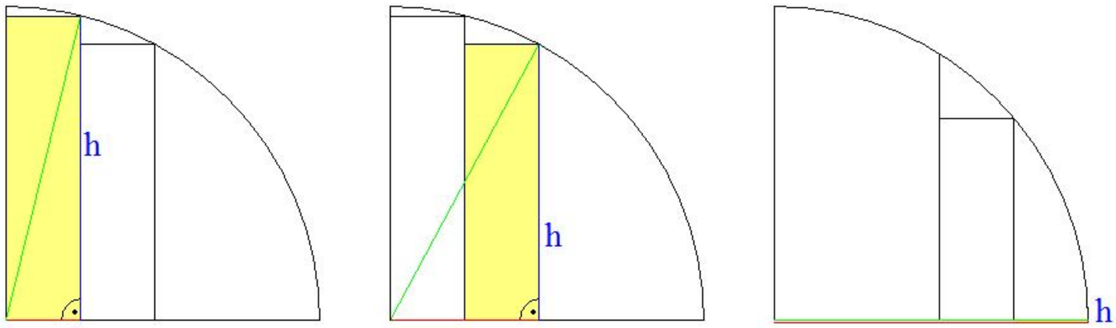


Abbildung 6: Beispiel: Untersumme für i=1, i=2 und i=n. Die Hypotenuse des Hilfsdreiecks ist jeweils grün, die Grundseite ist rot. Gelb ist die Fläche, für die die Höhe bestimmt wird. Auffällig ist der letzte Höhenwert, der 0 ist.

Die Arbeit mit der Tabellenkalkulation

Um die Formeln in Excel einzugeben braucht man ein paar Formeln:

- Jede Gleichung beginnt mit einem `=`
- Die Zeichen für die Grundrechenarten sind `+, -, *, /`.
- Will man, dass sich ein Wert beim Runterziehen oder zur Seite ziehen nicht verändert, so schreibt man vor den Buchstaben oder die Zahl (je nach dem, was sich nicht ändern soll) ein Dollarzeichen `$`. Beispiele: `$B$2` - beides soll sich nicht ändern; `B$2` - die 2 soll sich nicht ändern; `$B2` - B soll sich nicht ändern.
- Zur Wurzelziehen schreibt man `WURZEL()`. In den Klammern steht der Radikand.
- zum Potenzieren nutzt man `^`
- Will man die Einträge einer Spalte (Zeile) Aufsummieren, so schreibt man `=SUMME(Anfangsfeld:Endfeld)`. Will man einzelne Zellen zum Aufsummieren aufzählen, so trennt man sie mit `;`.

Beispiele

Im Folgenden zeigen wir fünf Beispiele mit unterschiedlich grober Einteilung auf der x-Achse. Bei jedem Beispiel sieht man eine andere Formel im Eingabefeld. Es werden folgende Formeln verwendet:

- `=1/n` Formel für h, wobei n explizit eingegeben wird. Natürlich kann man das auch „zu Fuß“ ausrechnen.
- `=$B$2*WURZEL(1-(($A5*$B$2)`^{2}`))` Formel für die Untersumme, wobei B2=h ist und A5=i
- `=$B$2*WURZEL(1-($B$2*($A5-1))`^{2}`)` Formel für die Obersumme, wobei B2=h ist und A5=i
- `=SUMME(B5:B1004)` Formel zum Aufsummieren, wobei B5 der oberste Summand und B1004 der unterste Summand ist
- `=(B1007+C1007)/2` Berechnet das Arithmetische Mittel zwischen B1007 und C1007
- `=E1007*4` Aus dem Arithmetischen Mittel wird die Näherung für π durch Multiplikation mit 4 berechnet.

Die Formeln sind dem Beispiel mit n=1000 entnommen.

Man kann an den Beispielen sehr schön sehen, wie die ermittelten Werte für π immer genauer werden, je feiner die Einteilung der x-Achse wird. Natürlich sind der Genauigkeit Grenzen gesetzt, weil der Computer mit Maschinenzahlen arbeitet. Dies dürfte jedoch kein großes Problem darstellen. Irgendwann muss ja auch Schluss sein mit dem Experiment.

Schülern in der Mittelstufe kann man, wenn man eine relativ gute Näherung mit ihnen herausgefunden hat, fragen, ob jemand von ihnen schon diese Zahl kennt. Man muss ihnen ja nicht vorher verraten, dass der Kreisflächeninhalt π ist. Vielleicht erkennt ja jemand die Zahl, weil er sie schon einmal gesehen hat.

B5 | =$B$2*WURZEL(1-(($A5*$B$2)^2))

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	h=	1					
3							
4	n	Untersumme	Obersumme				
5	1	0	1				
6					Mitte:		Kreisfläche
7	Summe	0	1		0,5		2
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

Abbildung 7: Beispiel 1: h=1, n=1.

C5 | =$B$2*WURZEL(1-($B$2*($A5-1))^2)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	h=	0,5					
3							
4	n	Untersumme	Obersumme				
5	1	0,4330127	0,5				
6	2	0	0,4330127				
7					Mitte:		Kreisfläche
8	Summe	0,4330127	0,9330127		0,6830127		2,73205081
9							
10							
11							

Abbildung 8: Beispiel 2: $h = \frac{1}{2}$, n=2

B16 =SUMME(B5:B14)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	h=	0,1					
3							
4	n	Untersumme	Obersumme				
5	1	0,09949874	0,1				
6	2	0,09797959	0,09949874				
7	3	0,09539392	0,09797959				
8	4	0,09165151	0,09539392				
9	5	0,08660254	0,09165151				
10	6	0,08	0,08660254				
11	7	0,07141428	0,08				
12	8	0,06	0,07141428				
13	9	0,04358899	0,06				
14	10	0	0,04358899		Mitte:		Kreisfläche
15							
16	Summe	0,72612958	0,82612958		0,77612958		3,10451833
17							

Abbildung 9: Beispiel 3: $h = \frac{1}{10}$, n=10

E106 =(B106+C106)/2

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	h=	0,01					
3							
4	n	Untersumme	Obersumme				
5	1	0,0099995	0,01				
6	2	0,009998	0,0099995				
7	3	0,009995499	0,009998				
8	4	0,009991997	0,009995499				
9	5	0,009987492	0,009991997				
99	95	0,003122499	0,003411744				
100	96	0,0028	0,003122499				
101	97	0,002431049	0,0028				
102	98	0,001989975	0,002431049				
103	99	0,001410674	0,001989975				
104	100	0	0,001410674		Mitte		Kreisfläche
105							
106	Summe	0,780104258	0,790104258		0,785104258		3,140417032
107							

Abbildung 10: Beispiel 4: $h = \frac{1}{100}$, n=100

G1007 =E1007*4

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	h=	0,001					
3							
4	n	Untersumme	Obersumme				
5	1	0,001	0,001				
6	2	0,001	0,001				
7	3	0,001	0,001				
8	4	0,00099999	0,001				
9	5	0,00099999	0,00099999				
10	6	0,00099998	0,00099999				
11	7	0,00099998	0,00099998				
999	995	9,9875E-05	0,00010938				
1000	996	8,9353E-05	9,9875E-05				
1001	997	7,7402E-05	8,9353E-05				
1002	998	6,3214E-05	7,7402E-05				
1003	999	4,471E-05	6,3214E-05				
1004	1000	0	4,471E-05				
1005							
1006					Mitte:		Kreisfläche
1007	Summe	0,78488887	0,78588887		0,78538887		3,14155547
1008							

Abbildung 11: Beispiel 5: $h = \frac{1}{1000}$, n=1000