Richtlinien und Lehrpläne
für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule
in Nordrhein-Westfalen

Mathematik

ISBN 3–89314–618–0

Heft 4720

Herausgegeben vom
Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung
des Landes Nordrhein-Westfalen
Völklinger Straße 49, 40221 Düsseldorf

Druck und Verlag: Ritterbach Verlag
Rudolf-Diesel-Straße 5–7, 50226 Frechen
Telefon (0 22 34) 18 66-0, Fax (0 22 34) 18 66 90
www.ritterbach.de

1. Auflage 1999

Vorwort

Die bisher vorliegenden Richtlinien und Lehrpläne für die gymnasiale Oberstufe sind im Jahre 1981 erlassen worden. Sie haben die Arbeit in der gymnasialen Oberstufe geprägt, sie haben die fachlichen Standards für neue Fächer erstmalig formuliert und so die Grundlage für die Vergleichbarkeit der Abituranforderungen gesichert.

Die Überarbeitung und Weiterentwicklung muss bewährte Grundorientierungen der gymnasialen Oberstufe sichern und zugleich Antworten auf die Fragen geben, die sich in der Diskussion der Kultusministerkonferenz seit 1994 im Dialog mit der Hochschulrektorenkonferenz und in der Diskussion der Schulen und der pädagogisch interessierten Öffentlichkeit herausgebildet haben und aus deren Beantwortung sich die Leitlinien der Weiterentwicklung ergeben.

Hierbei sind folgende Gesichtspunkte wesentlich:

- Eine vertiefte allgemeine Bildung, wissenschaftspropädeutische Grundbildung und soziale Kompetenzen, die in der gymnasialen Oberstufe erworben bzw. weiterentwickelt werden, sind Voraussetzungen für die Zuerkennung der allgemeinen Hochschulreife; sie befähigen in besonderer Weise zur Aufnahme eines Hochschulstudiums oder zum Erlernen eines Berufes.
- Besondere Bedeutung kommt dabei grundlegenden Kompetenzen zu, die notwendige Voraussetzung für Studium und Beruf sind. Diese Kompetenzen – sprachliche Ausdrucksfähigkeit, fremdsprachliche Kommunikationsfähigkeit, Umgang mit mathematischen Systemen, Verfahren und Modellen – werden nicht nur in den Fächern Deutsch, Mathematik, Fremdsprache erworben.
- Lernprozesse, die nicht nur auf kurzfristige Lernergebnisse zielen, sondern die dauerhafte Lernkompetenzen aufbauen, müssen gestärkt werden. Es sollten deutlicher Lehr- und Lernsituationen vorgesehen werden, die selbstständiges Lernen und Lernen in der Gruppe begünstigen und die die Selbststeuerung des Lernens verbessern.
- Zum Wesen des Lernens in der gymnasialen Oberstufe gehört das Denken und Arbeiten in übergreifenden Zusammenhängen und komplexen Strukturen. Unverzichtbar dafür ist neben dem fachbezogenen ein fachübergreifend und fächerverbindend angelegter Unterricht.

Lernen in diesem Sinne setzt eine deutliche Obligatorik und den klaren Ausweis von Anforderungen, aber auch Gestaltungsspielräumen für die Schulen voraus. Die Richtlinien und Lehrpläne sollen die Arbeit in der gymnasialen Oberstufe steuern und entwickeln. Sie sichern durch die Festlegung von Verbindlichkeiten einen Bestand an gemeinsamen Lernerfahrungen und eröffnen Freiräume für Schulen, Lehrkräfte und Lerngruppen.

Die Richtlinien und Lehrpläne bilden eine Grundlage für die Entwicklung und Sicherung der Qualität schulischer Arbeit. Sie verdeutlichen, welche Ansprüche von Eltern, Schülerinnen und Schülern an die Schule gestellt werden können und welche Anforderungen die Schule an Schülerinnen und Schüler stellen kann. Sie sind Bezugspunkt für die Schulprogrammarbeit und die regelmäßige Überprüfung der eigenen Arbeit.

Allen, die an der Entwicklung der Richtlinien und Lehrpläne mitgearbeitet haben, danke ich für ihre engagierten Beiträge.

(Gabriele Behler)

Ministerin für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Auszug aus dem Amtsblatt
des Ministeriums für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung
des Landes Nordrhein-Westfalen
Teil 1 Nr. 4/99

Sekundarstufe II – Gymnasiale Oberstufe des Gymnasiums und der Gesamtschule; Richtlinien und Lehrpläne

RdErl. d. Ministeriums
für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung
v. 17. 3. 1999 – 732.36–20/0–277/99

Für die gymnasiale Oberstufe des Gymnasiums und der Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen werden hiermit Richtlinien und Lehrpläne für die einzelnen Fächer gemäß § 1 SchVG (BASS 1 – 2) festgesetzt.

Sie treten am 1. August 1999, beginnend mit der Jahrgangsstufe 11, in Kraft. Die in den Lehrplänen vorgesehenen schulinternen Abstimmungen zur Umsetzung der Lehrpläne können im Laufe des Schuljahres 1999/2000 erfolgen.

Die Veröffentlichung erfolgt in der Schriftenreihe „Schule in NRW“.

Die vom Verlag übersandten Hefte sind in die Schulbibliothek einzustellen und dort u. a. für die Mitwirkungsberechtigten zur Einsichtnahme bzw. zur Ausleihe verfügbar zu halten.

Die bisherigen Richtlinien und Materialien zur Leistungsbewertung treten zum 1. August 2001 außer Kraft. Die Runderlasse

vom 16. 6.1981, vom 27.10.1982 und
vom 27. 6.1989 (BASS 15 – 31 Nr. 01, 1 bis 29),
vom 15. 7.1981 (BASS 15 – 31 Nr. 30),
vom 30. 6.1991 (BASS 15 – 31 Nr. 31),
vom 9.11.1993 (BASS 15 – 31 Nr. 32) und
vom 21.12.1983 (BASS 15 – 31 Nr. 02 bis 30.1)

werden zum 1. August 2001 aufgehoben.

Gesamtinhalt

Richtlinien

„(1) Ehrfurcht vor Gott, Achtung vor der Würde des Menschen und Bereitschaft zum sozialen Handeln zu wecken, ist vornehmstes Ziel der Erziehung.

(2) Die Jugend soll erzogen werden im Geiste der Menschlichkeit, der Demokratie und der Freiheit, zur Duldsamkeit und zur Achtung vor der Überzeugung des anderen, zur Verantwortung für die Erhaltung der natürlichen Lebensgrundlagen, in Liebe zu Volk und Heimat, zur Völkergemeinschaft und Friedensgesinnung."

(Artikel 7 der Verfassung für das Land Nordrhein-Westfalen)

1 Aufgaben und Ziele der gymnasialen Oberstufe

1.1 Grundlagen

Die gymnasiale Oberstufe setzt die Erziehungs- und Unterrichtsarbeit der Sekundarstufe I fort. Wie in den Bildungsgängen der Sekundarstufe I vollziehen sich Erziehung und Unterricht auch in der gymnasialen Oberstufe im Rahmen der Grundsätze, die in Artikel 7 der Verfassung für das Land Nordrhein-Westfalen und in § 1 des Schulordnungsgesetzes festgelegt sind.

Die gymnasiale Oberstufe beginnt mit der Jahrgangsstufe 11 und nimmt auch Schülerinnen und Schüler aus anderen Schulformen auf, die die Berechtigung zum Besuch der gymnasialen Oberstufe besitzen. Sie vermittelt im Laufe der Jahrgangsstufen 11 bis 13 die Studierfähigkeit und führt zur allgemeinen Hochschulreife. Die allgemeine Hochschulreife ermöglicht die Aufnahme eines Studiums und eröffnet gleichermaßen den Weg in eine berufliche Ausbildung.

1.2 Auftrag

Die gymnasiale Oberstufe fördert den Bildungsprozess der Schülerinnen und Schüler in seiner personalen, sozialen und fachlichen Dimension. Bildung wird dabei als Lern- und Entwicklungsprozess verstanden, der sich auf das Individuum bezieht und in dem kognitives und emotionales, fachliches und fachübergreifendes Lernen, individuelle und soziale Erfahrungen, Theorie und Praxis miteinander verknüpft und ethische Kategorien vermittelt und angeeignet werden.

Erziehung und Unterricht in der gymnasialen Oberstufe sollen

- **zu einer wissenschaftspropädeutischen Ausbildung führen und**
- **Hilfen geben zur persönlichen Entfaltung in sozialer Verantwortlichkeit.**

Die genannten Aufgaben sind aufeinander bezogen. Die Schülerinnen und Schüler sollen zunehmend befähigt werden, für ihr Lernen selbst verantwortlich zu sein, in der Bewältigung anspruchsvoller Lernaufgaben ihre Kompetenzen zu erweitern, mit eigenen Fähigkeiten produktiv umzugehen, um so dauerhafte Lernkompetenzen aufzubauen. Ein solches Bildungsverständnis zielt nicht nur auf Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit, sondern auch auf die Entwicklung von Kooperationsbereitschaft und Teamfähigkeit.

Voraussetzung für das Gelingen dieses Bildungsprozesses ist die Festigung „einer **vertieften allgemeinen Bildung** mit einem gemeinsamen Grundbestand von Kenntnissen und Fähigkeiten, die nicht erst in der gymnasialen Oberstufe erworben werden sollen“[1)]. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch die Auseinandersetzung mit einem Gefüge von Aufgabenfeldern, fachlichen und überfachlichen Themen, Gegenständen, Arbeitsweisen und Lernformen studierfähig werden.

---

1) KMK-Beschluss vom 25.2.1994 „Sicherung der Qualität der allgemeinen Hochschulreife als schulische Abschlussqualifikation und Gewährleistung der Studierfähigkeit“.

1.3 Erziehung und Unterricht in der gymnasialen Oberstufe

1.3.1 Wissenschaftspropädeutik

Wissenschaftspropädeutisches Lernen ist ein besonders akzentuiertes wissenschaftsorientiertes Lernen, das durch Systematisierung, Methodenbewusstsein, Problematisierung und Distanz gekennzeichnet ist und das die kognitiven und affektiven Verhaltensweisen umfasst, die Merkmale wissenschaftlichen Arbeitens sind. Wissenschaftspropädeutisches Lernen setzt Wissen voraus.

Ansätze wissenschaftspropädeutischen Arbeitens finden sich bereits in der Sekundarstufe I. Das Lernen in der gymnasialen Oberstufe baut darauf auf.

Wissenschaftspropädeutisches Lernen umfasst systematisches und methodisches Arbeiten sowohl in den einzelnen Fächern als auch in fachübergreifenden und fächerverbindenden Vorhaben.

Im Einzelnen lassen sich folgende Elemente wissenschaftspropädeutischen Lernens unterscheiden:

Grundlagenwissen

Wissenschaftspropädeutisches Lernen setzt ein jederzeit verfügbares, gut vernetztes fachliches Grundlagenwissen voraus, das eine Orientierung im Hinblick auf die relevanten Inhalte, Fragestellungen, Kategorien und Methoden der jeweiligen Fachbereiche ermöglicht und fachübergreifende Fragestellungen einschließt. Wissenschaftspropädeutisches Lernen baut daher auf einer vertieften Allgemeinbildung auf, die sich auf ein breites Spektrum von Fachbereichen und Fächern bezieht, und trägt umgekehrt zu ihr bei (vgl. Kapitel 2.3 und 2.4).

Selbstständiges Lernen und Arbeiten

Wissenschaftspropädeutisches Lernen ist methodisches Lernen. Es zielt darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler grundlegende wissenschaftliche Erkenntnis- und Verfahrensweisen systematisch erarbeiten.

Der Unterricht muss daher so gestaltet werden, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, eine Aufgabenstellung selbstständig zu strukturieren, die erforderlichen Arbeitsmethoden problemangemessen und zeitökonomisch auszuführen, Hypothesen zu bilden und zu prüfen und die Arbeitsergebnisse angemessen darzustellen.

Reflexions- und Urteilsfähigkeit

Wissenschaftspropädeutisches Arbeiten erfordert problem- und prozessbezogenes Denken und Denken in Zusammenhängen. Die Schülerinnen und Schüler sollen sachgemäß argumentieren lernen, Meinungen von Tatsachen, Wesentliches von Unwesentlichem unterscheiden, Prinzipien und Regeln verstehen, anwenden und übertragen können. Sie sollen die Grenzen und Geschichtlichkeit wissenschaftlicher Aussagen erkennen und den Zusammenhang und das Zusammenwirken von Wissenschaften kennen lernen. Schließlich geht es um das Verständnis für grundlegende wissenschaftstheoretische und philosophische Fragestellungen, Deutungen der Wirklichkeit, um ethische Grundüberlegungen und um die Reflexion des eigenen Denkens und Handelns.

Grundlegende Einstellungen und Verhaltensweisen für wissenschaftliches Arbeiten

Es gilt, Verhaltensweisen zu entwickeln und zu pflegen, mit denen wissenschaftliches Arbeiten als ein spezifischer Zugriff auf Wirklichkeit erlebt und begriffen werden kann. Wissenschaft soll auch als soziale Praxis erfahrbar werden, die auf spezifische Weise eine Verständigung über unterschiedliche Positionen und Sichtweisen hinweg ermöglicht. Dazu ist Kommunikations- und Kooperationsbereitschaft erforderlich. Voraussetzung für wissenschaftspropädeutisches Arbeiten sind Verhaltensweisen wie Konzentrationsfähigkeit, Geduld und Ausdauer, das Aushalten von Frustrationen, die Offenheit für andere Sichtweisen und Zuverlässigkeit.

1.3.2 Persönliche Entfaltung und soziale Verantwortlichkeit

Persönliche Entfaltung und soziale Verantwortlichkeit bestimmen den Erziehungsauftrag der gymnasialen Oberstufe. Erziehung findet in erster Linie im Unterricht statt; das Schulleben insgesamt muss aber ebenso Ansatzpunkte bieten, um den Erziehungsprozess zu fördern und die Schülerinnen und Schüler in die Arbeit und die Entscheidungsprozesse der Schule einzubeziehen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen ihre individuellen Fähigkeiten weiter entfalten und nutzen.

Schülerinnen und Schüler sollen sich ihrer Möglichkeiten und Grenzen bewusst werden. Dieser Prozess wird dadurch unterstützt, dass durch ein Spektrum unterschiedlicher Angebote und Wahlmöglichkeiten, Anforderungen und Aufgabenstellungen sowie durch Methoden, die die Selbstständigkeit fördern, Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit gegeben wird, ihre Fähigkeiten zu entdecken, zu erproben und ihre Urteils- und Handlungsfähigkeit zu entwickeln. Hierbei soll auch den Grundsätzen einer reflexiven Koedukation Rechnung getragen werden, die die unterschiedlichen Erfahrungen, Verhaltensweisen und Einstellungen von Jungen und Mädchen berücksichtigen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich mit Werten, Wertsystemen und Orientierungsmustern auseinander setzen können, um tragfähige Antworten auf die Fragen nach dem Sinn des eigenen Lebens zu finden.

Die in Grundgesetz und Landesverfassung festgeschriebene Verpflichtung zur Achtung der Würde eines jeden Menschen, die darin zum Ausdruck kommenden allgemeinen Grund- und Menschenrechte sowie die Prinzipien des demokratisch und sozial verfassten Rechtsstaates bilden die Grundlage des Erziehungsauftrages der Schule. Die Schule muss den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit geben, sich mit den Grundwerten des Gemeinwesens auseinander zu setzen und auf dieser Grundlage ihre Wertpositionen zu entwickeln.

Die Auseinandersetzung mit existentiellen Fragen, mit der eigenen Religion und mit anderen Religionen und religiösen Erfahrungen und Orientierungen, ihrer jeweiligen Wirkungsgeschichte und der von ihnen mitgeprägten gesellschaftlichen Wirklichkeit, sollen auch dazu beitragen, Antworten auf die Fragen nach dem Sinn der eigenen Existenz zu finden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen ihre sozialen Kompetenzen entwickeln und in der aktiven Mitwirkung am Leben in einem demokratisch verfassten Gemeinwesen unterstützt werden.

Die Schülerinnen und Schüler müssen ihre Bereitschaft und Fähigkeit weiterentwickeln können, sich mit anderen zu verständigen und mit ihnen zu kooperieren. Dies ist sowohl für das Leben in der Schule als auch in einer demokratischen Gesellschaft und in der Staaten- und Völkergemeinschaft von Bedeutung. Es geht um eine kritische und konstruktive Auseinandersetzung mit gesellschaftlich und politisch begründeten, religiösen und kulturell gebundenen, ökonomisch geprägten und ökologisch orientierten Einstellungen und Verhaltensweisen sowie um die Entwicklung von Toleranz, Solidarität und interkultureller Akzeptanz.

Dabei ist auch ein Verhalten zu fördern, das auf Gleichberechtigung und Chancengleichheit von Frau und Mann und auf die Veränderung überkommener geschlechtsspezifischer Rollen zielt.

Der Unterricht thematisiert hierzu Geschichte und Struktur unserer Gesellschaft, ihre grundlegenden Werte und Normen, ihre sozialen, ökonomischen und ökologischen Probleme. Er vermittelt Einblicke in politische Entscheidungsprozesse und leitet dazu an, Entscheidungs- und Einflussmöglichkeiten wahrzunehmen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen auf ein Leben in einem zusammenwachsenden Europa und in einer international verflochtenen Welt vorbereitet werden.

Die Welt, in der die Schülerinnen und Schüler leben werden, ist in hohem Maße durch politische, wirtschaftliche und soziale Verflechtungen bestimmt. Ein Leben in dieser Welt erfordert Kenntnisse und Einblicke in die historischen, politischen, sozialen und ökonomischen Zusammenhänge. Es benötigt Verständnis für die eigene Kultur und für andere Kulturen, für interkulturelle Zusammenhänge, setzt Fremdsprachenkompetenz, Medienkompetenz, Erfahrungen im Ausland und die Bereitschaft, in einer internationalen Friedensordnung zu leben, voraus.

Die Schülerinnen und Schüler sollen bei ihrer Studien- und Berufswahl unterstützt werden.

Die gymnasiale Oberstufe soll Qualifikationen fördern, die sowohl für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife als auch für die Studien- und Berufswahl von Bedeutung sind, wie beispielsweise die folgenden Fähigkeiten: Ein breites Verständnis für sozial-kulturelle, ökonomische, ökologische, politische, naturwissenschaftliche und technische Zusammenhänge; die Fähigkeit, die modernen Informations- und Kommunikationstechnologien nutzen zu können; ein Denken in übergreifenden, komplexen Strukturen; die Fähigkeit, Wissen in unterschiedlichen Kontexten anzuwenden; die Fähigkeit zur Selbststeuerung des Lernens und der Informationsbeschaffung; Kommunikations- und Teamfähigkeit, Entscheidungsfähigkeit.

In der gymnasialen Oberstufe muss darüber hinaus eine Auseinandersetzung mit der gesellschaftlichen Bedeutung der Arbeit, eine Orientierung über Berufsfelder und mögliche neue Berufe, die systematische Information über Strukturen und Entwicklungsgesetzmäßigkeiten des Arbeitsmarktes ermöglicht werden. Dies kann durch Angebote von Betriebspraktika sowie Betriebserkundungen und -besichtigungen, durch studienkundliche Veranstaltungen und die Einrichtung von Fachpraxiskursen geschehen. Dabei arbeiten die Schulen mit den Hochschulen, den Arbeitsämtern und freien Trägern aus Wirtschaft und Gesellschaft zusammen.

2 Rahmenbedingungen

Voraussetzung für die Verwirklichung des oben dargestellten Auftrags ist zunächst die Organisationsstruktur der gymnasialen Oberstufe. Deren Merkmale sind:

- die prinzipielle Gleichwertigkeit der Fächer,
- die Gliederung des Kurssystems in Grund- und Leistungskurse,
- die Zuordnung der Fächer (außer Religionslehre und Sport) zu Aufgabenfeldern,
- die Festlegung von Pflicht-, Wahlpflicht- und Wahlfächern.

2.1 Gleichwertigkeit der Fächer

Gleichwertigkeit der Fächer bedeutet nicht, dass die Fächer gleichartig sind. Die prinzipielle Gleichwertigkeit der Fächer ist darin begründet, dass jedes Fach Gleiches oder Ähnliches sowohl zum wissenschaftspropädeutischen Lernen als auch zur persönlichen Entfaltung in sozialer Verantwortlichkeit beitragen kann.

2.2 Kursarten

In der Jahrgangsstufe 11 ist der Unterricht in Grundkursen organisiert, in den Jahrgangsstufen 12 und 13 wird das System der Grund- und Leistungskurse entfaltet.

Die Grundkurse repräsentieren das Lernniveau der gymnasialen Oberstufe unter dem Aspekt einer grundlegenden wissenschaftspropädeutischen Ausbildung.

Die Leistungskurse repräsentieren das Lernniveau der gymnasialen Oberstufe unter dem Aspekt einer exemplarisch vertieften wissenschaftspropädeutischen Ausbildung. Eine differenzierte Unterscheidung zwischen Grund- und Leistungskursen findet sich in den Lehrplänen.

Nicht die Stoffhäufung ist das Ziel der Leistungskurse, vielmehr muss auf der Grundlage gesicherter Kenntnisse das methodische Lernen im Vordergrund stehen.

2.3 Aufgabenfelder

Aufgabenfelder bündeln und steuern das Unterrichtsangebot der gymnasialen Oberstufe.

Die Unterscheidung der folgenden drei Aufgabenfelder ist das Ergebnis bildungstheoretischer, didaktischer und pragmatischer Überlegungen. Die Aufgabenfelder werden bezeichnet als

- das sprachlich-literarisch-künstlerische Aufgabenfeld
- das gesellschaftswissenschaftliche Aufgabenfeld
- das mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Aufgabenfeld.

Die eher theoretischen Begründungen orientieren sich an den Bemühungen, bildungstheoretisch relevante Sach- und Problembereiche und wissenschaftstheoretische Schwerpunktsetzungen zu unterscheiden sowie bildungsgeschichtliche Traditionen aufzugreifen und modifiziert fortzuführen.

Die Aufgabenfelder sind durch folgende Gegenstandsbestimmungen gekennzeichnet:

- Gegenstand der Fächer im **sprachlich-literarisch-künstlerischen Aufgabenfeld (I)** sind sprachliche, musikalische und bildnerische Gestaltungen (als Darstellung, Deutung, Kritik, Entwurf etc.), in denen Wirklichkeit als konstruierte und vermittelte Wirklichkeit erscheint, sowie die Verfahrens- und Erkenntnisweisen, die der Auseinandersetzung mit diesen Gestaltungen dienen.
- Hier geht es darum, Mittel und Möglichkeiten der Kommunikation zu thematisieren und zu problematisieren in einer Welt, die wesentlich durch Vermittlungssysteme und Medien geprägt und gesteuert wird. In den im Aufgabenfeld I zusammengefassten Fächern spielen eigenständige Produktion und Gestaltung im Sinne kultureller Teilhabe eine wichtige Rolle.
- Den Fächern im **gesellschaftswissenschaftlichen Aufgabenfeld (II)** kommt in besonderer Weise die Aufgabe der politischen Bildung zu, die in Artikel 11 der Landesverfassung von Nordrhein-Westfalen festgelegt ist. Diese Fächer befassen sich mit Fragen nach den Möglichkeiten und Grenzen menschlichen Denkens und Handelns insbesondere im Blick auf ihre jeweiligen individuellen, gesellschaftlichen, zeit- und raumbezogenen Voraussetzungen, Bedingungen und Auswirkungen sowie mit den Verfahrens- und Erkenntnisweisen, die der Klärung dieser Fragen dienen.
- Gegenstand der Fächer im **mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeld (III)** sind die empirisch erfassbare, die in formalen Strukturen beschreibbare und die durch Technik gestaltbare Wirklichkeit sowie die Verfahrens- und Erkenntnisweisen, die ihrer Erschließung und Gestaltung dienen.
- Außerhalb dieser Aufgabenfelder stehen die Fächer **Sport** und **Religionslehre.**

  Das Fach **Sport** trägt, ausgehend von der körperlich-sinnlichen Dimension des Menschen, zu einer ganzheitlichen Bildung und Erziehung bei. Auf der Basis unmittelbar erlebter sportlicher Handlungssituationen soll der Sportunterricht zur aktiven Teilhabe an der Bewegungs-, Spiel- und Sportkultur und zur kritischen Auseinandersetzung mit ihr befähigen.

In **Religionslehre** geht es um Lernerfahrungen, die auf der Basis des christlichen Glaubens oder anderer tradierter bzw. heute wirksamer Religionen und Weltanschauungen Erkenntnis-, Urteils- und Handlungsmöglichkeiten eröffnen und Einsichten in Sinn- und Wertfragen des Lebens in Dialog und Auseinandersetzung mit anderen Religionen und Weltanschauungen fördern.

Die Aufgabenfelder können die Abstimmungen und Kooperation in der Schule erleichtern, wenn es darum geht,

- wie Fachlehrpläne zu gestalten sind, damit sie als exemplarisch für das jeweilige Aufgabenfeld begriffen werden können
- wie die Lehrpläne der Fächer innerhalb eines Aufgabenfeldes für thematische Entwicklungen offen gehalten werden können
- wie im Aufgabenfeld und über das Aufgabenfeld hinaus fachübergreifend und fächerverbindend konzipierter Unterricht entwickelt und erprobt werden kann.

Die drei Aufgabenfelder sind ein Steuerungsinstrument, weil mit Hilfe einer Zusammenfassung verschiedener Unterrichtsfächer zu Fächergruppen Wahlfachregelungen getroffen werden können, die einer zu einseitigen Fächerwahl entgegenwirken. Jedes der drei Aufgabenfelder muss von den Schülerinnen und Schülern durchgehend bis zur Abiturprüfung belegt werden. Keines ist austauschbar.

2.4 Fachspezifische Bindungen

Neben den Festlegungen der Wahlmöglichkeiten in den Aufgabenfeldern gibt es fachspezifische Belegverpflichtungen, die jeweils einen bestimmten Lernzusammenhang konstituieren:

- Deutsch, eine Fremdsprache, ein künstlerisches Fach, ein gesellschaftswissenschaftliches Fach, in jedem Fall zwei Kurse in Geschichte und in Sozialwissenschaften, Mathematik, eine Naturwissenschaft
- sowie Religionslehre und Sport.

Schülerinnen und Schüler, die vom Religionsunterricht befreit sind, müssen Philosophie belegen.

3 Prinzipien des Lernens und Lehrens in der gymnasialen Oberstufe

3.1 Fachspezifisches Lernen

Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe ist in erster Linie durch den Fachbezug geprägt. Indem in der fachgebundenen Ausbildung Fachwissen, fachliche Theorien und Methoden vermittelt werden, ermöglichen die Schulfächer eine strukturierte Sicht auf komplexe Phänomene der Wirklichkeit. Sie eröffnen so einen je spezifischen Zugang zur Welt. Fachliches Lernen soll geordnetes, systematisches

Lernen fördern. In wissenschaftspropädeutischer Hinsicht verknüpft sich im fachlichen Lernen gegenständliches Wissen mit ausgewählten Theorien und Methoden der Referenzdisziplinen sowie mit Grundaussagen der Wissenschaftstheorie und Methodologie.

3.2 Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen

So wichtig es ist, durch systematische fachliche Arbeit fachliche Kompetenzen zu fördern, so bedeutsam ist es, die Fachperspektive zu überschreiten. Durch fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen wird eine mehrperspektivische Betrachtung der Wirklichkeit gefördert, und es werden damit auch übergreifende Einsichten, Fähigkeiten, Arbeitsmethoden und Lernstrategien entwickelt, die unterschiedliche fachliche Perspektiven für gemeinsame Klärungen und Problemlösungsstrategien verbinden und so zur Kenntnis der komplexen und interdependenten Probleme der Gegenwart beitragen. Deshalb gehört das Überschreiten der Fächergrenzen, das Einüben in die Verständigung über Differenzen und über Differenzen hinweg neben dem Fachunterricht zu den tragenden Prinzipien der gymnasialen Oberstufe.

Wissenschaftspropädeutisches Lernen erfordert beides: das fachliche Arbeiten, seine Reflexion und das Denken und Handeln in fachübergreifenden Zusammenhängen.

3.3 Gestaltungsprinzipien des Unterrichts

Lernen ist ein individueller, aktiver und konstruktiver Aufbau von Wissen, der maßgeblich durch das verfügbare Vorwissen und den entsprechenden Verständnishorizont beeinflusst wird. Lernen heißt auch: Fähigkeiten und Fertigkeiten, Neigungen und Interessen, Einstellungen und Werthaltungen zu entwickeln. Umfang, Organisation, langfristige Verfügbarkeit machen die Qualität des Wissensbestandes aus. Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler tragen für den Aufbau eines solchen Wissens eine gemeinsame Verantwortung. Eine aufgabenorientierte Strukturierung des Unterrichts durch die Lehrkräfte ist genau so wichtig wie das Schaffen offener Lern- und Arbeitssituationen. Dabei ist zu bedenken, dass übermäßige Engführung eines Frontalunterrichts den sachbezogenen Handlungsspielraum der Schülerinnen und Schüler ebenso einengt, wie völlig offener Unterricht mit einer Fiktion vom "autonomen Lernen" überfordert.

Der Unterricht soll folgenden Prinzipien folgen:

- Er soll **fachliche Grundlagen vermitteln**, die Lerninhalte in sinnvolle Kontexte einbinden, ihre Verfügbarkeit und eine anspruchsvolle Lernprogression sichern.
- Der Unterricht soll **schülerorientiert** sein. Die Lernenden müssen ihre eigenen Fragestellungen und Probleme ernst genommen finden. Sie müssen die Möglichkeit haben, an ihren individuellen Erfahrungs- und Lernstand anzuschließen und ihre eigenen Lernwege zu entwickeln. Dies gilt besonders für die unterschiedlichen Ausgangsdispositionen von Jungen und Mädchen. Die individuellen Dispositionen und Leistungsmöglichkeiten sollen so genutzt werden, dass

die Lernprozesse für die Einzelnen und die Gruppe möglichst erfolgreich verlaufen können.

- Lernprozesse sollen sich am **Leitbild aktiven und selbstständigen Arbeitens** orientieren. Wenn Lernende sich aktiv mit den Lerngegenständen auseinander setzen, werden ihr Wissenserwerb und ihre Methodenkompetenz gefestigt und erweitert. Das heißt für den Unterricht, Aufgaben zu stellen, die die Schülerinnen und Schüler vor die Notwendigkeit stellen, auf erworbenes Vorwissen und Können Bezug zu nehmen. Sie müssen Inhalte und Methoden wiederholen, im neuen Zusammenhang anwenden und ihre Lernprozesse reflektieren können, um fachliche und überfachliche Lernstrategien langfristig aufzubauen. In der methodologischen Reflexion werden Lernen und Erkenntniserwerb selbst zum Lerngegenstand.
- Lernprozesse sollen Gelegenheit für **kooperative Arbeitsformen** geben. Je mehr die Notwendigkeit besteht, eigene Lernerfahrungen und -ergebnisse mit den Problemlösungen anderer zu vergleichen, zu erörtern, sie dabei zu überprüfen und zu verbessern, desto nachhaltiger ist das Lernen.
- Teamfähigkeit herauszubilden heißt für den Unterricht, arbeitsteilige und kooperative Arbeitsformen zu initiieren und dabei zu einer Verständigung über die Zusammenarbeit und die Methoden zu kommen, Arbeitsergebnisse abgestimmt zu präsentieren und gemeinsam zu verantworten.
- Lernprozesse sollen durch **komplexe Aufgabenstellungen** geleitet werden. Solche Aufgaben bedingen multiperspektivische und mehrdimensionale Sichtweisen, sie tragen zur Methodenreflexion bei und erfordern die Erstellung von Produkten, die individuelle oder gemeinsame Lernergebnisse repräsentieren und einer Selbst- und Fremdbewertung unterzogen werden. Referate, Facharbeiten, Ausstellungen, Aufführungen etc. können herausragende Ergebnisse solcher Aufgabenstellungen sein.
- Der Unterricht soll auf **Anwendung und Transfer** der zu erwerbenden Fähigkeiten und Kenntnisse zielen. Transfer ist zu erwarten, wenn die Lerngegenstände mit vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten und authentischen Handlungssituationen verbunden sowie unabhängig von bekannten Kontexten beherrscht werden. Das heißt für den Unterricht, solche Probleme und Fragestellungen zum Gegenstand zu machen, die Zugriffe aus unterschiedlichen fachlichen Perspektiven erfordern. Die jeweiligen Sichtweisen können relativiert und in Bezug auf ihren spezifischen Beitrag zur Problemlösung beurteilt werden. So werden Möglichkeiten und Grenzen der Übertragbarkeit von Erkenntnissen und Verfahren deutlich. Anwendung und Transfer werden auch in Projekten und in Vorhaben zur Gestaltung und Öffnung von Schule und in Zusammenarbeit mit außerschulischen Partnern gefördert.
- Der Unterricht darf nicht ausschließlich linear erfolgen, sondern muss die **Vernetzung** eines Problems innerhalb des Faches, aber auch über das Fach hinaus sichtbar machen. Es wird darauf ankommen, Formen der Organisation von Lernsituationen, die sich an fachlicher Systematik orientieren, durch solche Arrangements zu ergänzen, die dialogisches und problembezogenes Lernen ermöglichen. Insbesondere sollen die Schülerinnen und Schüler in diesem

Zusammenhang mit Themen und Arbeitsmethoden des fachübergreifenden und fächerverbindenden Arbeitens vertraut gemacht werden.

4 Aufbau und Gliederung der gymnasialen Oberstufe

Der Bildungsgang in der gymnasialen Oberstufe gliedert sich in die Einführungsphase (Jahrgangsstufe 11) und die Qualifikationsphase (Jahrgangsstufen 12 und 13). Er schließt mit der Abiturprüfung ab, die am Ende des 2. Halbjahres der Jahrgangsstufe 13 stattfindet.

Um die allgemeine Hochschulreife und die Studierfähigkeit zu gewährleisten, ist es wichtig, das fachliche Lernen, das fachübergreifende und fächerverbindende Arbeiten, die Beherrschung wissenschaftspropädeutischer Arbeitsformen und eine Studien- und Berufswahlvorbereitung für jeden individuellen Bildungsgang sicherzustellen[2)].

Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe folgt von der Jahrgangsstufe 11 bis zur Jahrgangsstufe 13 einem aufbauenden Sequenzprinzip, das den Lernzuwachs sichert.

Die Einführungsphase (Jahrgangsstufe 11)

Die Jahrgangsstufe 11 ist als eine Einheit konzipiert, die aus aufeinander aufbauenden Grundkursen besteht. Die Leistungskurse beginnen mit der Jahrgangsstufe 12. Der Unterricht folgt dem Prinzip der fachlichen Progression, die die Jahrgangsstufen 11 bis 13 umfasst.

Das zentrale Ziel der Einführungsphase ist es, die Schülerinnen und Schüler systematisch mit inhaltlichen und methodischen Grundlagen der von ihnen belegten Fächer vertraut zu machen, sie auf die Wahl der Leistungskurse zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 vorzubereiten und zu den ausgeprägteren Formen wissenschaftspropädeutischen Arbeitens hinzuführen. Für Schülerinnen und Schüler aus anderen Schulformen bieten die Schulen fachliche Angleichungsmaßnahmen an.

Schulen, die Fächerkoppelungen anstreben, legen diese vor Beginn der Jahrgangsstufe 11 fest, damit die Schülerinnen und Schüler die sich daraus ergebenden Möglichkeiten und Bindungen in die Planung ihres individuellen Bildungsganges einbeziehen können.

Die Qualifikationsphase (Jahrgangsstufen 12 und 13)

Mit Beginn der Qualifikationsphase wird das Kurssystem in Grund- und Leistungskurse entfaltet. Die in der Qualifikationsphase erbrachten Leistungen gehen in die Gesamtqualifikation ein, die die in den Jahrgangsstufen 12 und 13 erbrachten Leistungen zusammenfasst.

[2)] vgl. hierzu die Schrift "Studien- und Berufswahlvorbereitung am Gymnasium", hg. vom Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest und vom Landesarbeitsamt Nordrhein-Westfalen, Bönen 1995. Hierin sind auch Konzepte zur Studien- und Berufswahlvorbereitung in der gymnasialen Oberstufe enthalten.

Es ist das Ziel der Qualifikationsphase, fachliches, methodisches und fachübergreifendes Lernen so zu ermöglichen und abzusichern, dass Studierfähigkeit erbracht wird.

Zur Intensivierung des selbstständigen Arbeitens soll jede Schülerin und jeder Schüler in der Jahrgangsstufe 12 anstelle einer Klausur eine Facharbeit schreiben.

Fachübergreifende Einsichten können innerhalb der einzelnen Fächer vermittelt werden. Darüber hinaus werden an der Schule Veranstaltungen angeboten, in denen geplant fachübergreifend und fächerverbindend, z. B. an Projekttagen in Projektphasen oder einer Projektveranstaltung gearbeitet wird.

Alle Schülerinnen und Schüler sollen in der gymnasialen Oberstufe an einer umfassenderen Projektveranstaltung teilnehmen, die im Fachunterricht vorbereitet worden ist. Eine solche Veranstaltung wird in der Regel jahrgangsbezogen angeboten.

Die Schülerinnen und Schüler können im Rahmen der für die Abiturprüfung vorgesehenen Gesamtpunktzahl wahlweise mit maximal 60 Punkten eine besondere Lernleistung in der Abiturprüfung sich anrechnen lassen, die im Rahmen oder Umfang eines mindestens zwei Halbjahre umfassenden Kurses erbracht wird. Hierbei kann es sich zum Beispiel um die Arbeit aus einem Wettbewerb handeln, aber auch um eine umfassende Jahresarbeit (z. B. in einer weiteren Fremdsprache, in Informatik, Technik oder einer weiteren Naturwissenschaft) oder um eine Arbeit über ein umfassendes Projekt.

5 Schulprogramm

Schulprogrammarbeit und das Schulprogramm dienen der Schulentwicklung und damit der Entwicklung und Sicherung der Qualität schulischer Arbeit.

Ein Schulprogramm ist das grundlegende Konzept, das über die pädagogischen Zielvorstellungen und die Entwicklungsplanung einer Schule Auskunft gibt.

- Es konkretisiert die verbindlichen Vorgaben der Ausbildungsordnungen, Richtlinien und Lehrpläne im Hinblick auf die spezifischen Bedingungen der einzelnen Schule.
- Es bestimmt die Ziele und Handlungskonzepte für die Weiterentwicklung der schulischen Arbeit.
- Es legt die Formen und Verfahren der Überprüfung der schulischen Arbeit insbesondere hinsichtlich ihrer Ergebnisse fest.

Typische Elemente eines Schulprogramms sind:

(1) Beschreibung der schulischen Arbeit als Ergebnis einer Bestandsaufnahme, Skizze der bisherigen Entwicklungsarbeit

(2) Leitbild einer Schule, pädagogische Grundorientierung, Erziehungskonsens

(3) schulinterne Konzepte und Beschlüsse für schulische Arbeitsfelder

- Schulinterne Lehrpläne
  Hier geht es um Aussagen zur Abstimmung von schuleigenen Lehrplänen, von obligatorischen Inhalten und Unterrichtsmethoden, die bei der Unterrichtsplanung Berücksichtigung finden sollen.

- Konzepte für fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen
  Hierunter sind die fachübergreifenden Projekte, Veranstaltungen, Querschnittsaufgaben zu verstehen, die von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen ihres Bildungsganges erfüllt werden können oder erfüllt werden sollen. Gemeint sind aber auch Fächerkoppelungen.

- Konzepte zum Bereich „Lernen des Lernens“
  Hier sind Aussagen zur Vermittlung von Lern- und Arbeitstechniken zu machen, die für die Aufnahme eines Studiums oder einer beruflichen Ausbildung außerhalb der Hochschule erforderlich sind und die im Rahmen des Schulprogramms besonders vertieft werden.

  Entsprechende schülerorientierte Unterrichtsformen wie wissenschaftspropädeutische Arbeits- und Darstellungsformen sind sicherzustellen, damit die Schülerinnen und Schüler die geforderten Methoden, Einstellungen, Verhaltensweisen und Arbeitshaltungen erwerben können.

- Vereinbarungen zur Leistungsbewertung
  Hierbei geht es um die systematische Einführung der in den Lehrplänen vorgesehenen Formen der Leistungsbewertung, um gemeinsame Bewertungskriterien und Korrekturverfahren. Es geht ebenso um Vereinbarungen zu Parallelarbeiten und die Verwendung von Aufgabenbeispielen.

- Konzepte für die Erziehungs- und Beratungsarbeit in der gymnasialen Oberstufe
  Hier sind zum Beispiel die Gestaltung des Übergangs in die gymnasiale Oberstufe und die Studien- und Berufswahlvorbereitung zu nennen.

- Konzepte für das Schulleben
  Dazu gehören zum Beispiel Schwerpunktsetzungen im Bereich der Umwelterziehung, der interkulturellen Arbeit, Akzente zur Öffnung der Schule, zusätzliche Angebote im Chor, Orchester, Theater, außerunterrichtlicher Schulsport, Studienfahrten und ihre Verflechtung mit dem Unterricht, Schulgottesdienste und religiöse Freizeiten.

- Aussagen zu besonderen Ausprägungen des Bildungsgangs
  Hierzu zählen zum Beispiel die Sprachenfolgen, bilinguale Angebote, naturwissenschaftliche, technische, sportliche, künstlerische oder gesellschaftliche Schwerpunkte der Profile, die Einbeziehung von Wettbewerben, das Angebot besonderer Lernleistungen in die Abiturprüfung einzubringen o. ä..

(4) Schulinterne Arbeitsstrukturen und -verfahren
(Geschäftsverteilungsplan, Konferenzarbeit)

(5) Mittelfristige Ziele für die schulische Arbeit

(6) Arbeitsplan für das jeweilige Schuljahr

(7) Fortbildungsplanung

(8) Planung zur Evaluation

Hier geht es um Aussagen zu Verfahren der Entwicklung und Evaluation des Schulprogramms, die sicherstellen, dass die Schule sich selbst auch Rechenschaft über die Ergebnisse ihrer Unterrichts- und Erziehungsarbeit gibt.

Bestandteile der Evaluation sind Aussagen und Verfahren zur Sicherung der Standards und zur Vergleichbarkeit der Anforderungen in den Schulen.

Schulprogramme spiegeln die Besonderheit einer Schule und zugleich auch ihre Entwicklungsprozesse wider. Sie können und werden daher unterschiedlich aussehen. Unverzichtbar sind jedoch die Programmpunkte, die sich auf den Unterricht und die Erziehungsarbeit der Schule beziehen.

Lehrplan Mathematik

Inhalt

1 Aufgaben und Ziele des Faches

Der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe trägt zu einer vertieften Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler bei. Im Rahmen einer wissenschaftspropädeutischen Ausbildung vermittelt er grundlegende Kompetenzen, die notwendige Voraussetzungen für ein Hochschulstudium und eine anspruchsvolle Berufsausbildung sind. Er leitet zum kritischen Denken und zum Arbeiten in übergreifenden Zusammenhängen an. Mathematik muss als Mittel zur Aufklärung komplexer Sachverhalte erfahren werden können. Als allgemein bildendes Fach steht auch das Fach Mathematik unter dem Anspruch, Hilfen und Anstöße zur persönlichen Entfaltung in sozialer Verantwortlichkeit zu geben.

Die technische und wissenschaftliche Zivilisation moderner Gesellschaften beruht in hohem Maße auf Mathematik und ihren Anwendungen. Der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe hat die Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern die kulturelle und zivilisatorische Bedeutung der Mathematik aufzuzeigen: Er hat ihnen das Besondere des mathematischen Denkens, der mathematischen Abstraktion und der verwendeten Symbolisierungsmittel deutlich zu machen, und er hat vielfältige Erfahrungen beim Lösen inner- und außermathematischer Probleme zu ermöglichen, anhand derer die Mächtigkeit, Universalität und Nützlichkeit der Mathematik einsichtig wird. Es sind zentrale Ideen herauszuarbeiten, die den Zusammenhang zwischen mathematischer und außermathematischer Kultur sichtbar machen. Der Mathematikunterricht muss exemplarisch verdeutlichen, weshalb Mathematik ein so wesentliches Instrument zur rationalen Erkenntnis und Gestaltung von Welt ist, aber auch, wo die Grenzen der Mathematisierbarkeit liegen.

Der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe muss den Lernenden – wie schon in der Sekundarstufe I – vielfältige Anlässe bieten, Brücken zu schlagen zwischen fachlichen Konzepten und lebensweltlichen Vorstellungen, zwischen mathematischem Denken und Alltagsdenken, zwischen praktischem Tun und theoretischer Reflexion. Das gilt in besonderem Maße für die Grundkurse. In beiden Kursformen müssen die Lernenden das, was im Mathematikunterricht an sie herangetragen wird, verstehen und als sinnvoll und persönlich bedeutsam erfahren können.

Zum wissenschaftspropädeutischen Arbeiten im Fach Mathematik gehört, dass die Schülerinnen und Schüler zunehmend selbstständig und eigenverantwortlich arbeiten, eigenständig Informationsquellen erschließen, systematisch und heuristisch an Probleme herangehen, Arbeitsschritte sorgfältig dokumentieren, Ergebnisse selbstkritisch überprüfen und mit anderen diskutieren.

Als fachliche Inhalte für die vertiefte Auseinandersetzung mit Mathematik in der gymnasialen Oberstufe eignen sich insbesondere solche aus den Inhaltsbereichen Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik. Neben dem behandelten Stoff ist für das Erreichen der beschriebenen Ziele der unterrichtliche Umgang mit Mathematik in vieler Hinsicht allerdings ebenso entscheidend. Mathematikunterricht ist zugleich ein gegenstandsbezogenes und ein interaktives Geschehen. Fachliches und soziales Lernen müssen aufeinander bezogen sein. Es ist eine

Unterrichtskultur zu entwickeln, in der Raum ist für die subjektiven Sichtweisen der Schülerinnen und Schüler, für wechselseitige Verständigung über die anstehenden mathematischen Themen, für kooperatives Problemlösen, für die produktive Auseinandersetzung mit Fehlern, für Umwege und alternative Deutungen, für spielerischen und kreativen Umgang mit Mathematik.

Zusammenfassend ist vom Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe zu fordern, dass

- er auf Anforderungen im Studium und Berufsleben durch die Vermittlung mathematischer Kompetenzen vorbereitet, insbesondere also für eine verstehende Aneignung grundlegender Modelle, Begriffe, Lehrsätze, Algorithmen und Anwendungsmöglichkeiten in den Inhaltsbereichen Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik sorgt
- er exemplarische Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Zivilisation gibt
- er Verbindungen stiftet zwischen mathematischer und außermathematischer Kultur, indem er zentrale Ideen herausarbeitet wie Zahl, Messen, räumliches Strukturieren, funktionaler Zusammenhang, Wahrscheinlichkeit, Algorithmus und mathematisches Modellieren
- für die Schülerinnen und Schüler deutlich wird, wie Mathematik entsteht und zur Beschreibung und Lösung komplexer Probleme genutzt werden kann
- die Schülerinnen und Schüler im aktiven Umgang mit Mathematik erfahren, dass und wie sich Mathematik als Mittel kritischen Vernunftgebrauchs einsetzen lässt
- er Schülerinnen und Schüler sowohl zu selbstständigem Lernen wie auch zu kooperativem Lernen in Gruppen anleitet
- er heuristisches und experimentelles Arbeiten – z. B. durch Einbeziehung des Computers – ermöglicht
- fachliches und soziales Lernen aufeinander bezogen werden und die einzelne Schülerin und der einzelne Schüler als Person ernst genommen werden.

1.1 Zentrale Ideen als Kern der didaktischen Konzeption

Den zentralen Ideen, die unter den Zielen des Mathematikunterrichts bereits angesprochen wurden, kommt eine doppelte Funktion für die didaktische Konzeption zu:

- Die zentralen Ideen stellen gleichsam „rote Fäden“ dar, die die mathematischen Gegenstände der gymnasialen Oberstufe und der vorangehenden Schuljahre miteinander verbinden. In dieser Funktion können sie verhindern helfen, dass die zu lernende Mathematik für die Schülerinnen und Schüler in eine Fülle isolierter Begriffe, Spezialkenntnisse und Techniken auseinander fällt. An ihnen lässt sich verdeutlichen, wie die Schulmathematik in sich vernetzt ist.
- Darüber hinaus lässt sich anhand der zentralen Ideen zeigen, wie mathematische und außermathematische Kultur miteinander verknüpft sind. Die aufgeführten zentralen Ideen stehen für Erfindungen des menschlichen Geistes, die auf eine allgemeine Weise das Strukturieren, Ordnen und Gestalten verschie-

denartiger Probleme erlauben, die sich in entwickelten Gesellschaften notwendigerweise stellen. So kann die unterrichtliche Orientierung an diesen Ideen die Einsicht fördern, dass Mathematik als eine Antwort auf die Herausforderungen der natürlichen und gesellschaftlichen Umwelt verstanden werden kann.

Die Orientierung an zentralen Ideen bedeutet nicht, diese ständig und ausdrücklich zu Unterrichtsgegenständen zu machen. Vielmehr dienen sie als Leitlinien, über Sinn und Bedeutung, kulturellen Stellenwert und innermathematischen Zusammenhang der jeweils anstehenden mathematischen Themen zu reflektieren.

Die für den Mathematikunterricht bedeutsamen zentralen Ideen werden nachfolgend näher erläutert.

Idee der Zahl

Unsere Alltagskultur ist auf vielfältige Art und Weise von der Idee der Zahl durchdrungen und bestimmt. Die Tatsache, dass Zahlen in sehr unterschiedlichen Anwendungszusammenhängen verwendet und in verschiedenen Symbolsystemen repräsentiert werden, eröffnet eine Fülle interessanter Fragestellungen. Der Oberstufenunterricht kann vor allem davon profitieren, dass es vielgliedrige Ketten gibt, die vom naiven Umgang mit der Zahl, wie er im Alltag vorherrscht, zu axiomatischen Begründungen der natürlichen oder reellen Zahlen, zur Betrachtung von Grenzwerten und Grenzwertsätzen und zu Sätzen der Zahlentheorie führen.

Eine Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, zur Reflexion über diese weit reichende Bestimmtheit durch Zahlen anzuregen. Im Unterricht der gymnasialen Oberstufe kann die Idee der Zahl unter mehreren Aspekten behandelt werden. So kann von Problemen ausgegangen werden, die es notwendig machen Abzählverfahren zu entwickeln. Die Reduktion des Problems auf kleine Anzahlen, das Ausprobieren, das Herausarbeiten von Regelmäßigkeiten, das Aufstellen von Berechnungsformeln und der Nachweis ihrer Allgemeingültigkeit führen zum Erwerb grundlegender Kompetenzen beim Abzählen großer Mengen.

Wenn näherungsweise Nullstellen bestimmt werden, kann ein Nachdenken über die Notwendigkeit zur Erweiterung der Zahlenräume erfolgen. Der Umgang mit sehr großen und sehr kleinen Zahlen, die Unendlichkeit, die Grenzprozesse des Differenzenquotienten und das uneigentliche Integral, aber auch die Auseinandersetzung mit Iterationen bieten Möglichkeiten, den Schülerinnen und Schülern die Reichweite der Idee der Zahl zu verdeutlichen.

Idee des Messens

Das Bedürfnis, Eigenschaften von Dingen, von Zuständen und Entwicklungen mit unseren eingeschränkten Sinnen zu erfassen, quantitativ zu beschreiben und damit zu messen, entsteht aus den verschiedensten Gründen; so sollen z. B. Eigenschaften in räumlich oder zeitlich auseinander liegenden Situationen miteinander verglichen werden oder müssen umfangreiche Datenmengen durch Maßzahlen charakterisiert werden, um sie einer Analyse und Bewertung zugänglich zu machen.

Im weiteren Sinne treffen wir Probleme des Messens aber auch immer dann an, wenn beliebige Sachverhalte zur Bearbeitung mit elektronischen Hilfsmitteln aufbereitet werden sollen (z. B. beim Digitalisieren).

Verständiges Messen zeigt auch die Grenzen des Messens auf: Nicht immer können alle Eigenschaften sinnvoll quantifiziert werden. Jeder Messvorgang fängt nur einen Teilaspekt der Realität ein und kann daher auch nur zu einer Teilaussage über Realität führen. Reales Messen ist mit prinzipiellen Fehlern behaftet, die auch die Folgerungen ungenau machen und zu Überlegungen führen, in welchen Fehlergrenzen diese richtig sind.

Im Mathematikunterricht hat das Messen eine lange Tradition. Über das Messen werden Aspekte unserer Umwelt erfasst: Längen, Flächeninhalte, Volumina. In jüngster Zeit haben Messprobleme bei fraktalen Gebilden („Wie lang ist die Küste Großbritanniens?“) zur Erweiterung des Dimensionsbegriffs geführt. Im Stochastikunterricht werden mittels Kenngrößen Eigenschaften von Datenmengen beschrieben.

Zur Tradition des Mathematikunterrichts gehört auch die exemplarische Entfaltung des Begriffs Flächeninhalt (Länge, Volumen) über viele Schuljahre hinweg: Ausgehend von Vergleichen von Rechtecksflächen mit Einheitsflächen, über Dreiecks- und Vielecksflächen bis hin zu krummlinig begrenzten Flächen, für die erst ein Messverfahren entwickelt werden muss, das umgekehrt den Flächeninhalt von krummlinig begrenzten Flächen definiert.

Innermathematisch werden die Grenzen des Flächeninhaltsbegriffs durch die Untersuchung nicht integrierbarer Funktionen und uneigentlicher Integrale (bei realem Problemhintergrund) ausgelotet.

Idee des räumlichen Strukturierens

Der Übergang vom sinnlich erfahrbaren Raum, in dem die Schülerinnen und Schüler leben, zum dreidimensionalen „euklidischen Raum“ ist nicht selbstverständlich. Wie Untersuchungen bei Naturvölkern zeigen, stellt dieser Übergang eine bedeutende Kulturleistung dar.

Beim räumlichen Strukturieren geht es um das Untersuchen, theoretische Beschreiben und Idealisieren von Objekten wie Punkt, Gerade, Winkel, Ebene, Kreis, Vieleck, Kugel, Polyeder sowie Beziehungen zwischen ihnen. Formen in der Natur, Gestaltungsprinzipien in Kunst und Architektur, Verfahren des technischen Zeichnens und der Computergraphik begleiten uns im täglichen Leben, oft unbemerkt und unbewusst.

Die Entwicklung der Raumanschauung beginnt mit der Wahrnehmung und der dreidimensionalen Deutung der Umwelt, mit zeichnerischen, gestalterischen und konstruierenden Aktivitäten und führt zur Entwicklung von abstrakten Begriffen und Untersuchung von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten. Dabei gibt es ein Wechselspiel von algebraischen und geometrischen Aspekten.

Räumliche Anschauung ist sowohl eine Quelle der Inspiration als auch ein Korrektiv abstrakten mathematischen Denkens; Raumanschauung und die Fähigkeit zum räumlichen Strukturieren können sich nur im Anschauungsraum entfalten. Das Strukturieren in der Ebene ist zwar Teil des Strukturierens im Raum, aber man darf sich nicht auf ebene Probleme beschränken.

Für die Schülerinnen und Schüler ist der euklidische Raum in der Regel der geeignete Rahmen für das räumliche Strukturieren, der bei Bedarf aber auch überschritten werden kann.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

Durch Funktionen werden Zusammenhänge erfasst, beschrieben und quantifiziert sowie Veränderungen handhabbar gemacht. Die Idee des funktionalen Zusammenhangs ist für die Mathematik von großer Tragweite und für das Verständnis der kulturellen Rolle der Mathematik unentbehrlich. Naturgesetze sind ohne die Formulierung funktionaler Zusammenhänge nicht denkbar. Ohne ein Begreifen der Idee des funktionalen Zusammenhangs lässt sich keine tiefere Einsicht in den wissenschaftlichen Fortschritt gewinnen. Aber nicht nur die Naturwissenschaften, sondern auch viele sozial- und humanwissenschaftliche Disziplinen machen zunehmend von der Möglichkeit Gebrauch, empirische Zusammenhänge durch Funktionen quantitativ zu beschreiben.

Weite Teile der Oberstufenmathematik befassen sich mit Funktionen: Mit Mitteln der Differentialrechnung werden Änderungen analysiert und die charakteristischen Merkmale von Funktionen ermittelt. In der Integralrechnung werden die Wirkungen fortgesetzter Änderungen untersucht. Auch in der Geometrie wird der Funktionsbegriff wirksam. Abbildungen sind Funktionen. Bewegungen, durch Matrizen vermittelt, können als Funktionen aufgefasst und gedeutet werden. Verteilungs- und Dichtefunktionen spielen in der Stochastik eine bedeutende Rolle. Die Untersuchung des Funktionsbegriffs selbst kann an geeigneten Stellen für die Theorieentwicklung von Bedeutung sein.

Die Idee des funktionalen Zusammenhangs eröffnet den Schülerinnen und Schülern ein mächtiges Werkzeug, das ihnen helfen kann, mathematische Beziehungen in ihrer Alltagswelt aufzuspüren und diese dadurch besser zu durchschauen.

Idee der Wahrscheinlichkeit

Unser Wissen über die Welt ist begrenzt, denn nicht alle Beeinflussungsfaktoren sind bekannt oder die Zahl der Beobachtungen und deren Genauigkeit reicht nicht aus. In dem Bemühen, auch im Fall von Unsicherheit bei Vorhersagen eine vernünftige Leitlinie für unser Handeln zu gewinnen, die Unsicherheit handhabbar zu machen, greifen wir zu Wahrscheinlichkeitsüberlegungen. Dabei kann die Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse durch die Betrachtung der Vergangenheit oder durch gedankliche Vorwegnahme aller möglichen Ausfälle abgeschätzt werden. Die auf solcherlei Überlegungen beruhende Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglicht Prognosen für zukünftiges Handeln und entfaltet ihre besondere Wirksamkeit in der Beurteilenden Statistik.

Statistische Aussagen spielen in der heutigen Welt eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe werden viele Entscheidungen im Bereich von Politik und Wirtschaft getroffen. Meinungen werden, besonders in den Medien, durch Umfragen gestützt.

Im Mathematikunterricht geht es einerseits darum, statistisches Datenmaterial zu analysieren und zu bewerten. Kritische Untersuchungen in realistischen Kontexten sind erforderlich, um statistische Aussagen zu begründen, Fehlschlüsse zu vermeiden und Missbrauch zu entlarven. Den Schülerinnen und Schülern muss andererseits deutlich werden, dass die Resultate der Beurteilenden Statistik notwendig mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind, die zahlenmäßig abgeschätzt werden kann.

Idee des Algorithmus

Von der Grundschule bis in die gymnasiale Oberstufe hinein spielt das Arbeiten mit Algorithmen eine entscheidende Rolle. Ein mathematischer Algorithmus ist nichts anderes als eine standardisierte Problemlösung für eine Klasse strukturell verwandter Probleme, die man durch gedankliche Anstrengung und mit hinreichend viel Sachverstand auch jedes für sich, d. h. ohne diesen Algorithmus lösen könnte. Insofern spiegelt sich im Algorithmus das Prinzip der industriellen Fertigung.

Es ist grundsätzlich zu unterscheiden zwischen der Ausführung vorgegebener Algorithmen und der kreativen Tätigkeit des Entwerfens von Algorithmen zu einem gegebenen Problem. Verständnis in die Idee des Algorithmus wird sich dann einstellen, wenn die Schülerinnen und Schüler in beiden Bereichen Erfahrungen sammeln und über sie reflektieren.

Im Unterricht lässt sich ausgehen von Überlegungen, mit welchen Algorithmen wir schon vertraut sind – innerhalb wie außerhalb der Mathematik. Die Gemeinsamkeiten der Algorithmen lassen sich herausarbeiten. Als Vorstufe zu formalisierten Algorithmen in mathematischen Darstellungen lassen sich alltägliche Handlungsabläufe in halbformalisierte Beschreibungen übersetzen.

Im nächsten Schritt werden überschaubare mathematische Probleme anhand eines Ablaufschemas zunächst schrittweise, dann auch automatisiert gelöst. Dazu eignen sich: Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, Polynomdivision, Newton-Verfahren, numerisches Integrieren usw. Dabei lassen sich wichtige Teile der Sekundarstufen I – Mathematik aus einem anderen Blickwinkel betrachten und auf höherem Niveau durchdringen.

Idee des mathematischen Modellierens

Die Idee des mathematischen Modellierens stellt einen Bezugsrahmen dar, in dem Mathematik zu Sachzusammenhängen und Phänomenen unserer Welt in Beziehung gesetzt wird. Immer dann, wenn Mathematik zur Beschreibung von Situationen oder zur Lösung von realen Problemen eingesetzt wird, wird ein mathematisches Modell benutzt bzw. für den konkreten Zusammenhang erst konstruiert.

Die durch Anwendung eines mathematischen Modells gewonnenen Aussagen sind interpretationsbedürftig, die in Bezug auf die Sachsituation formulierten Aussagen abhängig von dem verwendeten Modell.

Um einen Zugang zur Idee des mathematischen Modellierens zu gewinnen, ist es notwendig, dass man mathematische Modelle kennen lernt, entwickelt und verwendet. Dabei findet Modellbildung gleichermaßen bei elementaren und komplexen Situationen statt: bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Laplace-Würfel ebenso wie bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen durch Exponentialfunktionen.

Durch den Umgang mit mathematischen Modellen wird ein Beitrag zum Verständnis der Rolle der Mathematik bei der Analyse und Lösung von Sachproblemen geleistet. Schülerinnen und Schüler erfahren so etwas über die generelle Vorgehensweise in den so genannten „exakten Wissenschaften“: die (gegebenenfalls vereinfachte) Beschreibung von Sachverhalten, die Entwicklung von mathematischen Modellen zur Beschreibung empirischer Daten, die Anwendung von Modellen zur Vorhersage dann wieder empirisch zu überprüfender Daten.

Vor allem werden in diesem Zusammenhang auch die Grenzen der entwickelten oder (nur) angewandten Modelle reflektiert. Bei komplexeren Problemen, insbesondere in fachübergreifenden Kontexten, wird bewusst, wie die Auswahl und unterschiedliche Berücksichtigung von Bedingungen zu verschiedenartigen Modellen führen kann, in denen jeweils andere oder zusätzliche Aspekte des Sachverhalts zum Tragen kommen. Daher sollte sich die Erarbeitung von Modellen im Unterricht nicht von vornherein an vorgegebenen Lösungen orientieren.

Die Tragweite mathematischer Modelle erfahren die Schülerinnen und Schüler sowohl durch die Unterschiedlichkeit der Anwendungsbereiche mathematischer Objekte (z. B. werden Matrizen zur Beschreibung von Bewegungen im Raum, als „Übergangsmatrizen“ zur Beschreibung wirtschaftlicher Abläufe oder zur Beschreibung stochastischer Prozesse verwendet) als auch durch die Variation der Beschreibungsmittel (geometrische, algebraische) für den gleichen Sachverhalt.

1.2 Zusammenarbeit mit anderen Fächern

In Jahrhunderten haben sich die Wissenschaften zunehmend ausdifferenziert und in ihrer Folge haben sich die Schulfächer eigenständig entwickelt. Im wissenschaftspropädeutischen Unterricht der gymnasialen Oberstufe, der nach Fächern strukturiert ist, werden daher jeweils fachspezifische Aspekte zur Erfassung der komplexen Welt, in der wir leben, vermittelt. Wenn dieser Ansatz nicht zu verfälschenden, einseitigen Einsichten führen soll, muss es gelingen, verschiedene fachspezifische Ansätze zu einem Gesamtbild zusammen zu führen. Das erfordert fachübergreifendes und fächerverbindendes Arbeiten. Die Schule muss darauf hinzielen, dass sich bei Schülerinnen und Schülern hinreichend differenzierte und vielschichtige Vorstellungen entwickeln.

Für die Zusammenarbeit mit anderen Fächern eignet sich die Mathematik wegen ihrer Universalität in besonderem Maße. Immer wenn es darum geht, Gegenstandsbereiche quantitativ zu erfassen, bietet sich die Mathematik an. Oft gelingt es, Sachverhalte durch mathematische Modellierung zu beschreiben und über sie gesetzmäßige Eigenschaften zu entwickeln. Dies gilt besonders für die Physik, die Informatik und die Sozialwissenschaften. Hierin liegt ein gewichtiger Beitrag des Mathematikunterrichts zur Studierfähigkeit.

Fachübergreifende Fragestellungen werden traditionell auch innerhalb des Mathematikunterrichts aufgegriffen. Das externe Fachwissen tragen dabei Schülerinnen und Schüler (etwa in Form von Referaten) oder Lehrerinnen und Lehrer in den Unterricht hinein.

Bei der Entwicklung eines Schulprogramms müssen in der gymnasialen Oberstufe darüber hinaus weitere Möglichkeiten für fachübergreifendes und fächerverbindendes Arbeiten bedacht werden. Unter anderem bieten sich folgende Organisationsformen an (siehe auch Kapitel 3.2.3):

- „Auftragsarbeiten“ anderer Fächer an den Mathematikkurs (etwa bei Mathematisierungsproblemen)
- zeitlich begrenzte thematische Zusammenarbeit von zwei oder mehr Kursen nach Absprache ohne Auflösung der Kursverbände
- Projekte unter Auflösung der Kursverbände und des Stundenplans
- Kopplung von Fächern gemäß § 6 APO-GOSt.

2 Bereiche, Themen, Gegenstände

Über die fachlich definierten Themen und Gegenstände hinaus werden in einem wissenschaftspropädeutisch geprägten Mathematikunterricht, der einer vertieften Allgemeinbildung verpflichtet ist, zahlreiche Fähigkeiten, Einsichten und Einstellungen vermittelt, die nicht allein in der Fachsprache beschrieben werden können. Was im Fach Mathematik im Verlauf der gymnasialen Oberstufe zu lernen ist, lässt sich drei Bereichen zuordnen. Insbesondere die Bereiche 2 und 3, die Bezüge zwischen den Bereichen und die Obligatorik (vgl. Kapitel 2.3) können nicht angemessen in Tabellen dargestellt werden. Es wird deshalb eine zusammenhängende Darstellung gewählt.

2.1 Bereiche: Herleitung und didaktische Funktion

Der Unterricht soll so gestaltet werden, dass Aspekte aus allen drei Bereichen bei der Behandlung eines jeden Themas Berücksichtigung finden.

Bereich 1: Fachliche Inhalte

Die Aneignung von Begriffen, Lehrsätzen, Beweisen und Algorithmen lässt sich in einen fachsystematischen Zusammenhang stellen. Mathematik wird dabei als ein formales (deduktives) System betrachtet, wie es sich im Laufe einer langen historischen Genese herausgebildet hat und in dem sich mathematische Erkenntnis gleichsam kristallisiert.

Die Begriffe, Lehrsätze und Algorithmen, die im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe neu eingeführt werden, entstammen vor allem den Inhaltsbereichen Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik.

Bereich 2: Lernen in Kontexten

Mathematik ist nicht nur ein formales System: Abstrakte mathematische Begriffe und Erkenntnisse lassen sich zum Ordnen, Strukturieren, Darstellen und Modellieren realer Zusammenhänge nutzen und gewinnen in ihnen eine konkrete Bedeutung. Genetisch betrachtet entsteht Mathematik aus der systematischen Handhabung derartiger Aktivitäten.

Mathematik erschließt sich dem Verständnis von Lernenden in befriedigender Weise nur, wenn sie in möglichst vielfältigen Kontexten erfahren werden kann. Die in Kapitel 1.1 näher erläuterten zentralen Ideen schlagen eine Brücke zwischen der formalen Mathematik und ihren Anwendungsmöglichkeiten.

Insbesondere in den Grundkursen sollte die Auseinandersetzung mit Mathematik in realen Kontexten intensiviert werden. Dadurch können sie gegenüber den Leistungskursen ein ganz eigenes Profil gewinnen.

Bereich 3: Methoden und Formen selbstständigen Arbeitens

Auf der Seite der Schülerinnen und Schüler sind in der Auseinandersetzung mit der anstehenden Mathematik und den im Unterricht bzw. über Lehrbücher angebotenen Problemen eine Reihe von Kompetenzen zu erwerben, die sich zum Teil direkt auf das Verstehen und den Umgang mit Mathematik beziehen, teilweise darüber hinausgehende Schlüsselqualifikationen betreffen. Die Lernenden erschließen eigenständig Informationsquellen, gehen heuristisch und systematisch an Probleme heran, dokumentieren ihre Arbeitsschritte, überprüfen selbstkritisch Ergebnisse, diskutieren und präsentieren sie. Schülerinnen und Schüler üben sich in ein zunehmend selbstständiges und eigenverantwortliches Arbeiten wie auch in kooperative Vorgehensweisen ein, sie erschließen projektartige und fächerverbindende Aktivitäten, auch in Verbindung mit intelligenter Computernutzung, die zusätzliche Chancen bieten, Methoden selbstständigen Arbeitens zu entwickeln.

2.2 Themen und Gegenstände

Jahrgangsstufe 11

Für die Jahrgangsstufe 11 sind Koordinatengeometrie, Beschreibende Statistik und Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen vorgesehen. Sie knüpfen an die Standards für den mittleren Schulabschluss an (vgl. Kapitel 3.4) und führen in die Gebiete ein, die in der Qualifikationsphase unterrichtet werden. Nachfolgend sind die Unterrichtsthemen und -gegenstände stichwortartig aufgeführt und anschließend erläutert. Die aufgelisteten Inhalte sind verbindlich. Die Zusammenstellung ist äußerst kurz gehalten, um den Schulen einen möglichst weiten Raum für die Gestaltung des Unterrichts zu eröffnen. Daher ergibt sich bei Beschränkung auf diese Inhalte keine vollständige Lernsequenz. Ausweitungen, Akzentuierungen und Vertiefungen sind erforderlich.

Koordinatengeometrie
- Gerade, Parabel, Kreis
- Kreistangente, Parabeltangente
- Lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung von Geraden und Parabeln.

Die Koordinatengeometrie knüpft an Inhalte des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I an. Sie bereitet auf Kernprobleme der Differentialrechnung vor und stellt Hilfsmittel für die Analysis zur Verfügung. Die zentralen Ideen des Messens, des funktionalen Zusammenhangs und des mathematischen Modellierens können deutlich werden.

Bei Geraden und Parabeln sollten Anwendungen (z. B. Scheinwerfer, Parabolantennen) Berücksichtigung finden. Scheitelpunktsbestimmungen können Optimierungsprobleme lösen helfen. Schnittprobleme zwischen Geraden und Parabeln bzw. Kreisen eröffnen unterschiedliche Zugänge zum Tangentenbegriff ohne Differentialrechnung. Ferner werden die Schülerinnen und Schüler mit Lerninhalten bekannt gemacht, die in der vektoriellen analytischen Geometrie aufgegriffen und umfassender behandelt werden. Auch die systematische Behandlung linearer Gleichungssysteme in den Jahrgangsstufen 12 bis 13 kann vorbereitet werden. Schließlich ermöglicht die Koordinatengeometrie eine immanente Wiederholung wichtiger Themen aus der Sekundarstufe I (z. B. Koordinatensystem, Geradengleichung, Lösung quadratischer Gleichungen, Rechnen mit Quadratwurzeln, Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras und der Strahlensätze sowie der trigonometrischen Funktionen). Insofern eignet sie sich zur Angleichung des Wissensstandes unterschiedlicher Schülergruppen in besonderem Maße.

Zur Modellierung eignen sich Problembereiche aus dem Verkehr (z. B. Bremswege, Ampelschaltungen). Die Approximation von Kettenlinien, etwa bei Seilbahnen oder Freilandleitungen, durch ganzrationale Funktionen unterschiedlichen Grades führt auf interessante Resultate. An der Thematik von Brückenkonstruktionen lassen sich alle verbindlichen Inhalte der Koordinatengeometrie entwickeln.

Beschreibende Statistik

- Erfassen, Darstellen und Aufbereiten statistischer Daten
- Statistische Kenngrößen (Mittelwerte, Streuungsmaße)
- Interpretieren und Bewerten von Kenngrößen
- Ausgleichsgerade, Regression, Korrelation.

In vielen Bereichen des täglichen Lebens und in fast allen Wissenschaften spielen Statistiken eine wichtige Rolle. Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, dass Schülerinnen und Schüler lernen, mit großen und unübersichtlichen Datenmengen vernünftig umzugehen, sie durch Kenngrößen zu charakterisieren und diese zu interpretieren. Beim Umgang mit Daten, Diagrammen und Graphen soll die Kritikfähigkeit der Lernenden entwickelt werden. Auch erleichtern Kenntnisse in der Beschreibenden Statistik den Zugang zu stochastischen Problemstellungen in den nachfolgenden Jahrgangsstufen.

Die Beschreibende Statistik eignet sich in besonderer Weise für die Durchführung kleinerer Projekte aus dem Umfeld der Schule. Im Experiment können Antworten auf wirklichkeitsnahe Fragen gegeben werden. Der Einsatz des Computers erleichtert und beschleunigt die Verarbeitung von Daten.

Verknüpfungen mit den anderen Themen der Jahrgangsstufe sind bei der Behandlung von Ausgleichsgeraden möglich.

Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

- Mittlere Änderungsrate, durchschnittliche Steigung, Sekante, Differenzenquotient
- Momentane Änderungsrate, lokale Steigung, Tangente, Grenzprozess des Differenzenquotienten
- Ableitung und Ableitungsfunktion, Tangentengleichung
- Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen bzgl. Nullstellen, Symmetrie, Steigungsverhalten/Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten/Wendepunkte.

In der Differentialrechnung tritt bei der Erarbeitung von Gesetzmäßigkeiten die zentrale Idee des funktionalen Zusammenhangs in den Vordergrund. Im Umgang mit Funktionen werden darüber hinaus Verfahren entwickelt und angewandt, die, z. B. in Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung, die Idee des Algorithmus widerspiegeln. Näherungsprozesse lassen sich auf die Idee der Zahl hin reflektieren.

Historisch gesehen hat sich die Analysis über weite Strecken gemeinsam mit der Physik entwickelt. Die tägliche, subjektive Erfahrung von Geschwindigkeit und Beschleunigung machen die entsprechenden Begriffe zu einer idealen Grundlage für eine beziehungshaltige Entwicklung des Ableitungsbegriffs. Für die Orientierung der Schülerinnen und Schüler kann es – je nach Voraussetzungen der Lerngruppe – sehr lohnend sein, sie exemplarisch mit einigen Überlegungen der Begründer der Analysis (Newton, Leibniz) vertraut zu machen: Welche Probleme haben eigentlich zur „Erfindung“ der Analysis geführt?

Die in der Analysis untersuchten Funktionen werden in zahlreichen Fächern zur Beschreibung von Abhängigkeiten benutzt. Grundgedanke der Differentialrechnung ist das Untersuchen und Berechnen von Änderungen (durchschnittliche, momentane Änderungsrate) und von Steigungen (Sekanten- und Tangentensteigung). Der darauf aufbauende Ableitungsbegriff bildet die mathematische Basis für zahlreiche Begriffsbildungen in anderen Fächern.

Ein anschaulich geprägter und nicht-formaler Grenzwertbegriff reicht an dieser Stelle völlig aus, ein an Maßstäben der Hochschule ausgerichteter Zugang über Epsilontik oder eine Theorie der Folgen ist den Zielen der Jahrgangsstufe 11 nicht angemessen. Im Leistungskurs sollte der Grenzwertbegriff später vertieft werden, z. B. bei der Behandlung der Integralrechnung.

Hilfsmittel, wie etwa Tabellenkalkulation und Funktionenplotter versetzen Schülerinnen und Schüler in die Lage, mit einfachen Vorstellungen weit reichende Erfahrungen zu sammeln, auf denen die Begriffsbildungen der Differentialrechnung aufbauen können. Z. B. veranschaulicht die in jedem Funktionsplotter angebotene Zoomfunktion als „Funktionenmikroskop“ die (lokale) Linearisierbarkeit differenzierbarer Funktionen. Umgekehrt führt die so entwickelte Vorstellung dazu, über den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und „lokaler Linearität“ nachzudenken. Im Wechsel von Veranschaulichung und begrifflicher Präzisierung lässt sich bei exemplarischen, fachsystematischen Exkursen den Schülerinnen und Schülern der unterschiedliche Charakter von Grund- und Leistungskursen verdeutlichen.

Die Analysis wird in dem vorliegenden Lehrplan auf alle Jahrgangsstufen der gymnasialen Oberstufe aufgeteilt. Die Behandlung im Grundkurs der Jahrgangsstufe 11 stellt die gemeinsame Grundlage für die Weiterführung in Grund- und Leistungskursen der Qualifikationsphase dar. Daher ist an der Schule darauf zu achten, dass in dieser Jahrgangsstufe in allen Parallelkursen ein tragfähiger, einheitlicher Teilabschluss erzielt wird, auf dem die Kurse in den folgenden Jahrgangsstufen aufbauen können (vgl. Kapitel 6).

Jahrgangsstufen 12 und 13

Beschrieben sind nachfolgend die drei in den von der KMK beschlossenen „Einheitlichen Prüfungsanforderungen“ (EPA) ausgeführten Gebiete Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik. Die Gegenstände sind nach fachsystematischen Gesichtspunkten geordnet. Hieraus sind jedoch keine Schlüsse auf die Art der unterrichtlichen Behandlung zu ziehen. In der Anordnung der Inhalte sind die Lehrkräfte frei. Möglicherweise wählen sie gelegentlich auch gänzlich andere Zugänge, etwa nach Gesichtspunkten, die sie aus dem Bereich 2 des Faches (Lernen im Kontext) beziehen. Ergänzungen sind möglich und wünschenswert, ebenso Verbindungen zwischen den einzelnen Gebieten sowie Ausweitungen auf andere Themen oder Gebiete. Zeitliche Vorgaben werden nicht gemacht. Festlegungen zur Obligatorik sind in Kapitel 2.3 zu finden.

Analysis

In der Analysis werden die aus dem vorausgehenden Unterricht vertrauten zentralen Ideen (abgesehen von den Ideen der Wahrscheinlichkeit und des räumlichen Strukturierens) wieder aufgenommen, weiter entfaltet, vertieft und miteinander verknüpft.

Unmittelbar deutlich wird das bei der Idee des funktionalen Zusammenhangs, wenn systematisch Begriffe und Verfahren zur Beschreibung von Funktionen und Funktionenklassen entwickelt werden. In Fortsetzung des Analysisunterrichts der Jahrgangsstufe 11 wird exemplarisch gezeigt, wie ganzrationale Funktionen zur Modellierung genutzt werden können. Funktionen weiterer Funktionenklassen (trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen) werden unter dem Aspekt ausgewählt, welche Bedeutung sie in Modellbildungsprozessen haben.

Die Idee der Zahl bekommt über die intensive Beschäftigung mit dem Unendlichen und mit Grenzprozessen eine neue Dimension. Die Idee des Messens wird bei der Behandlung des Integralbegriffs mit der Idee des Algorithmus verknüpft.

Im Zeitalter graphikfähiger Rechner haben die Untersuchungen zum Steigungsverhalten von Funktionen und die Behandlung von Kriterien für relative Extrema und für Wendepunkte an Bedeutung nicht verloren, soweit sie darauf abzielen, den Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion und den Ableitungsfunktionen zu entwickeln. Tatsächlich unterstützen solche Rechner den anschaulichen Zugang und das Verständnis dieser Zusammenhänge in hervorragender Weise. Untersuchungen von Funktionen als Routineverfahren mit dem Ziel, schnell einen qualitativen Überblick über den Verlauf eines Graphen zu bekommen, sind dagegen weitgehend fragwürdig geworden.

In der Integralrechnung geht es z. B um die Fragestellung, welche Wirkung die Wasserzulaufgeschwindigkeit auf das Wasservolumen einer Talsperre hat oder welche Energieänderung bewirkt wird, wenn man einen Satelliten von der Erdoberfläche in seine Umlaufbahn bewegt. In diesem Sinne steht in der Integralrechnung die Untersuchung von Wirkungen im Vordergrund. Dieser Vorstellung wird eine

Beschränkung der Integralrechnung auf die Berechnung von Flächeninhalten nicht gerecht, auch wenn der Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse ein in vielen Anwendungssituationen tragfähiges anschauliches Modell liefert. Es sollte deutlich werden, dass der Integralbegriff Grundlage vieler Begriffsbildungen in anderen Fächern ist.

Software, wie z. B eine Tabellenkalkulation, hat sich im Unterricht zur Vorbereitung des Integralbegriffs und zur Entwicklung einer breiten Basis von Beispielen bewährt, die die Idee des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nahe legen.

Während der Analysisunterricht bisher die Herleitung und Anwendung von Differentiations- und Integrationsregeln als einen wesentlichen Schwerpunkt behandelte, bekommt das routinemäßige Berechnen von Ableitungen und Integralen mit der zunehmenden Verbreitung von Computeralgebra-Systemen einen deutlich geringeren Stellenwert. Wie stark man künftig das Trainieren von Ableitungs- und Integrationsregeln reduzieren kann, ist derzeit noch nicht abzusehen. Auf jeden Fall muss sich der Unterrichtsschwerpunkt vom Kalkül zu sinnvollen Anwendungen und zu Modellierungen in Sachzusammenhängen verschieben. Strukturelle Einblicke, welche Ableitungsregeln erforderlich sind, wie sich Integrations- und Ableitungsregeln aufeinander beziehen, wie gegebenenfalls Integrale numerisch berechnet werden können etc. erscheinen für das verständige Umgehen mit Mathematik wichtiger als etwa die punktuelle Erkenntnis, welcher spezielle „Trick“ den Nachweis der Quotientenregel ermöglicht hat.

Arbeitsteilige Unterrichtsformen werden in der Analysis durch die Anwendungsorientierung nahe gelegt. Arbeitsgruppen können sich gemeinsam ein Expertenwissen erarbeiten oder in anderen Fächern erworbenes Wissen so aufarbeiten, dass es an die gesamte Lerngruppe weitergegeben werden kann.

Die vorhandenen umfangreichen Aufgabensammlungen in der Analysis bieten den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, mit einem fast unerschöpflichen Übungsmaterial selbstverantwortlich üben zu lernen. Die von ihnen dabei erfahrenen Lernprobleme können in den unterschiedlichsten Unterrichtsformen aufgearbeitet werden.

Grundkurs Analysis

Die Analysis im Grundkurs bekommt Bedeutung in beziehungshaltigen Problemsituationen, die einer mathematischen Modellbildung zugänglich sind. In den vielschichtigen Bezügen und Anwendungen von Mathematik kann die Fachsystematik auch für die Grundkursschülerin bzw. den Grundkursschüler eine einsichtige, ordnende Funktion bekommen.

In Grundkursen muss damit gerechnet werden, dass komplexes Zahlenmaterial und komplizierte Terme das Verstehen neuer Sachverhalte behindern. Werden neue Begriffe und Verfahren aus Anwendungssituationen gewonnen, so erscheint es durchaus sinnvoll, im Sinne einer didaktischen Reduktion die Anwendungssituationen durch Vereinfachung des Zahlenmaterials zunächst zu idealisieren. Bei realitätsnahen Anwendungen mit authentischem Zahlenmaterial bietet sich der Einsatz des Computers an.

Während der Ableitungsbegriff im Rahmen der ganzrationalen Funktionen in der Jahrgangsstufe 11 durch elementare Betrachtungen hinreichend tragfähig entwickelt werden kann, müssen die dabei gewonnenen Vorstellungen bei der Untersuchung neuer Funktionenklassen erweitert werden. Rechnergestützte, numerische Annäherungen und der Einsatz von Funktionsplottern geben dazu eine anschauliche, solide Argumentationsbasis. Prinzipien des wiederholenden, kumulativen Lernens (vgl. Kapitel 3.2) sollten beachtet werden.

Der Begriff des Grenzwertes wird von den Schülerinnen und Schülern bei der Einführung des Integrals anschaulich erfahren. Rechner ermöglichen es bereits zu diesem Zeitpunkt, Integrale numerisch zu berechnen. Zu Begriffsbildungen in außermathematischen Bereichen bilden sowohl der Aspekt des Änderungseffekts als auch der Aspekt der Produktsummen eine wichtige Grundlage.

Wie umfangreich Begriffe durchgearbeitet werden müssen, um bei Schülerinnen und Schüler eine solide Vorstellung von den zu Grunde liegenden fachlichen Gegenständen und Algorithmen zu entwickeln, ist stark von der Leistungsfähigkeit der Lerngruppe abhängig. Auf alle Fälle muss darauf geachtet werden, dass auch Schülerinnen und Schüler mit formalen Schwächen die Gelegenheit bekommen, sich angemessen an der gedanklichen Entwicklung des Unterrichts zu beteiligen. Voraussetzung dazu ist, neben der formalen Fachsprache im Unterricht auch eine angemessene Umgangssprache zu pflegen.

Insbesondere im Grundkurs ist es oft nicht sinnvoll, Sachverhalte zu beweisen, die den Schülerinnen und Schülern offensichtlich sind. Innermathematische Vernetzungen (z. B. der Wachstumsvergleich von Exponentialfunktionen und ganzrationalen Funktionen), angemessene Modellierungen (z. B. Beschreibung spezieller Wachstumsmodelle), Plausibilitätsbetrachtungen (z. B. Vergleich einer Wertetabelle für Sekantensteigungen der Sinusfunktion mit einer Wertetabelle der Kosinusfunktion) sind einer ausschließlich formalen Behandlung vorzuziehen.

Fortführung der Differentialrechnung

- Bestimmung ganzrationaler Funktionen in Sachzusammenhängen
- Untersuchung weiterer Funktionenklassen, benötigte Ableitungsregeln
- Extremwertprobleme.

Integralrechnung

- Produktsummen, Untersuchung von Wirkungen (siehe Seite 17 f.)
- Stammfunktion, bestimmtes Integral, Eigenschaften bestimmter Integrale
- Integralfunktion, Hauptsatz (mit anschaulichem Stetigkeitsbegriff)
- Flächenberechnung durch Integration
- ein Verfahren zur numerischen Integration.

Leistungskurs Analysis

Der Analysisunterricht im Leistungskurs kann in der Regel auf einem deutlich sichereren Umgang mit mathematischen Symbolen und Formalismen aufbauen. Anwendungsprobleme dürfen im Leistungskurs komplexer werden. Gleichzeitig bekommt die Fachsystematik eine größere Bedeutung. Historische Betrachtungen können den Zugang zu fachlichen Begriffen erleichtern und die geistige Leistung, die hinter diesen Begriffsbildungen steht, deutlich machen. Insbesondere lässt sich in diesem Kontext auch die Abhängigkeit der Mathematik von außermathematischen Problemstellungen und Hilfsmitteln erkennen.

Das Bedürfnis, sich über fachliche Ziele und Sachverhalte zu verständigen, führt zur allmählichen Entwicklung einer präzisen Fachsprache. Allerdings wird auch im Leistungskurs eine verfrühte Exaktheit bei der Formulierung fachlicher Begriffe zu einer unfruchtbaren Distanz von den anschaulichen Grundlagen führen.

Die Überprüfung des eigenen Lösungsweges und der eigenen Lösung wird zunehmend schwieriger. Schülerinnen und Schüler müssen kritisch abschätzen lernen (z. B. durch Plausibilitätsbetrachtungen), ob die eigene Lösung eine stimmige Antwort auf das Problem sein kann. Eine kritische Distanz zur eigenen Lösung bekommt mit dem Einsatz von leistungsfähigen Tools eine noch größere Bedeutung.

Der Computer ermöglicht den Einsatz numerischer Verfahren, bei denen häufig auf komplexe Begriffsbildungen verzichtet werden kann und die auf einfachen anschaulichen Vorstellungen basieren. Numerische Verfahren sollten deshalb auch nicht nur am Ende des Lehrganges behandelt werden.

Grenzwerte begegnen den Schülerinnen und Schülern u. a. bei einer Präzisierung des Steigungsbegriffs, beim Integralbegriff und bei uneigentlichen Integralen. An mindestens einer Stelle sollte der Grenzwertbegriff so vertieft werden, dass die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, Grenzwerte auch im Sinne eines formalen Beweises zu untersuchen. Diese Vertiefung muss nicht am Beginn des Leistungskurses Analysis erfolgen. Im Sinne eines spiralig aufgebauten Unterrichts kann der Grenzwertbegriff auch bei der Untersuchung eines Spezialthemas (Iteration, chaotisches Verhalten etc.) präzisiert werden.

Fortführung der Differentialrechnung

- Bestimmung ganzrationaler Funktionen in Sachzusammenhängen
- Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion)
- Untersuchung von Exponentialfunktionen und weiteren Funktionenklassen
- Untersuchung von Funktionenscharen
- Extremwertprobleme.

Integralrechnung

- Produktsummen, Untersuchung von Wirkungen (siehe Seite 17 f.)
- Stammfunktion, Integrierbarkeit, bestimmtes Integral, Eigenschaften bestimmter Integrale
- Integralfunktion, Hauptsatz
- Zusammenhang Integrierbarkeit – Stetigkeit – Differenzierbarkeit
- Beziehungen zwischen Ableitungs- und Integrationsregeln
- Flächenberechnung durch Integration
- ein Verfahren zur numerischen Integration
- Uneigentliche Integrale.

Lineare Algebra/Geometrie

In der Linearen Algebra stehen die zentralen Ideen des räumlichen Strukturierens, des Modellierens und des funktionalen Zusammenhangs im Vordergrund.

Das räumliche Strukturieren erhält eine neue Qualität dadurch, dass die Beschränkung auf die Koordinatengeometrie aufgehoben wird und Vektoren als eigenständige mathematische Objekte zur effizienten Behandlung räumlicher Probleme benutzt werden. Bei beziehungshaltigen Aufgaben zum Schnitt von Ebenen und Geraden kann in anschaulicher Weise räumlich strukturiert werden und sich die Idee des Algorithmus entfalten.

Die Idee des Modellierens kann bei den verschiedenen Anwendungen der Matrizenrechnung in Sachzusammenhängen vertieft werden. Bei der Benutzung von Matrizen zur Realisierung geometrischer Abbildungen tritt der funktionale Zusammenhang in den Vordergrund.

Eine Verbindung der zentralen Ideen erfolgt z. B. bei der Darstellung platonischer Körper in der Computergraphik, wo räumliche Strukturen erkannt, modelliert und abgebildet werden, Messungen vorgenommen und umfangreiche Berechnungen durchgeführt werden müssen.

Im Kurs „Lineare Algebra/Geometrie“ bekommt die Verbindung von Geometrie und Algebra eine neue Qualität. Descartes Idee, geometrische Probleme systematisch mit algebraischen Methoden zu analysieren und zu behandeln, wurde grundlegend für die Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft. Die Bedeutung dieser Methode sollte nicht einfach als historisches Faktum mitgeteilt werden, sondern muss im Unterricht erfahren werden.

Schülerinnen und Schüler erfassen die Bedeutung der Linearen Algebra/Geometrie durch ihre vielfältigen Anwendungen. Für das Lernen in Kontexten bieten sich zahlreiche Themen an, z. B. platonische/archimedische Körper und Kristallformen, geschichtliche und philosophische Bedeutung der platonischen Körper, Perspektive in Kunst und Architektur, unmögliche Figuren (Escher-Grafiken), iterierte Funktionensysteme zur Erzeugung von Fraktalen, Stereogramme.

Heutzutage ist es alltäglich, dass Körper im Computer modelliert und bewegt werden (z. B. Bildschirmschoner). Dabei werden Abbildungen wie Spiegelung, Drehung, Skalierung/zentrische Streckung im Anschauungsraum durch Matrizen repräsentiert. Es entsteht das Problem, dreidimensionale Gebilde in eine Ebene zu projizieren. Die entsprechenden Projektionsverfahren der darstellenden Geometrie können nicht vollständig thematisiert, aber kursspezifisch exemplarisch behandelt werden. Hier bietet sich eine Zusammenarbeit mit Kunst- und Informatik-Kursen, falls vorhanden auch mit Technik-Kursen an (siehe auch Kapitel 3.2.3). Alternativ können auch stochastische Matrizen und Übergangsprobleme bei Aufgaben aus der Wirtschaftsmathematik behandelt werden. Die Schülerinnen und Schüler benutzen (Übergangs-)Matrizen als Werkzeug zur Modellbildung in geeigneten außermathematischen Problemstellungen.

Es ist ein bedeutsamer Aspekt, dass aus geometrischen Fragestellungen erwachsene mathematische Objekte wie Vektoren und Matrizen sich erfolgreich auf nichtgeometrische Probleme anwenden lassen und umgekehrt. Diese Eigendynamik mathematischer Begriffsbildung ist eine typische Eigenschaft der Wissenschaft Mathematik und sollte von den Schülerinnen und Schülern entsprechend erfahren werden.

Matrizen sind als Werkzeug der Linearen Algebra in vielen mathematischen und außermathematischen Anwendungen von großer Bedeutung. Sie können im Unterricht schon frühzeitig als Objekte eingeführt werden, die eine einfache und systematische Behandlung linearer Gleichungssysteme erleichtern, und dann später als Abbildungsvorschriften für Vektoren erkannt und behandelt werden.

Die vektorielle analytische Geometrie sollte so unterrichtet werden, dass sie mit der Linearen Algebra verzahnt wird. Lösungsmengen unterbestimmter linearer Gleichungssysteme werden als Geraden und Ebenen im Anschauungsraum gedeutet und Schnittprobleme in Anwendungsbeispielen werden mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen und Matrizen gelöst. Im Umgang mit Matrizen werden dabei stets algorithmische Aspekte mitbehandelt.

Die Behandlung der vektoriellen analytischen Geometrie muss zeitlich so organisiert werden, dass die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit Matrizen kennen lernen.

Beim anwendungsorientierten Arbeiten mit Matrizen ergeben sich zwangsläufig fachübergreifende und fächerverbindende Themen und Projekte. Methoden und Formen des selbstständigen Arbeitens können hierbei thematisiert und geschult werden. Dies gilt nicht nur für die Planung und Organisation von der Herausarbeitung der Zielstellung über die Erstellung des Arbeitsplanes bis hin zur Dokumentation der Ergebnisse, sondern auch für die kooperativen Vorgehensweisen (siehe Kapitel 2.1).

Die Lineare Algebra/Geometrie bietet vielfältige Möglichkeiten für das Arbeiten mit dem Computer. Er entlastet den Unterricht vom Drill von Verfahren und von langwierigen Rechnungen und ermöglicht, die Modellbildung, das Herstellen von Bezügen und Finden von Zusammenhängen stärker zu betonen. Er eröffnet experimentelle Arbeitsweisen und gibt vielfältige Möglichkeiten zur Visualisierung. Programme zur Vektorrechnung, zur Computergraphik und Computeralgebra bieten unterschiedliche Vorzüge und werden oft nebeneinander eingesetzt. Bisher hat sich noch kein einheitliches Programmierwerkzeug durchgesetzt; es ist zu erwarten, dass in den nächsten Jahren eine rasante Weiterentwicklung stattfinden wird.

Grundkurs Lineare Algebra/Geometrie

Bei der Behandlung der Vektorrechnung ist zu beachten, dass die geometrische Anschauung in besonderem Maße Basis und Quelle der Intuition ist und nicht durch nur schematische Aneignung der Verfahren der Vektorgeometrie in den Hintergrund gedrängt werden darf.

Ein anschauliches Verständnis von linearer Abhängigkeit reicht vollständig aus. Eine vertiefte Behandlung von Basis, Dimension und Vektorraum sowie der Aufbau einer axiomatischen Theorie ist den Zielen des Grundkurses nicht angemessen.

Immer wieder tritt das Problem auf, dreidimensionale Objekte in der Zeichenebene darzustellen. Wenn das Kapitel Matrizen mit der Alternative 1 Abbildungen gewählt wird, soll exemplarisch eine schräge Parallelprojektionen (wie Kavalierprojektion oder Militärprojektion) behandelt werden. Wird stattdessen die zweite Alternative Übergangsmatrizen eingeführt, so beschränkt man sich sinnvollerweise auf eine intuitive Behandlung von Schrägbildern bei der Vektorrechnung.

Lineare Gleichungssysteme und vektorielle Geometrie

- lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise
  systematisches Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen
  Lösung unterbestimmter linearer Gleichungssysteme
- Rechnen mit Vektoren
  Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
  Koordinatenform von Ebenengleichungen
  Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren.

Matrizen (Alternative 1)

- Abbildungsmatrizen, schräge Parallelprojektion
- Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung.

Matrizen (Alternative 2)

- Übergangsmatrizen, Materialverflechtung oder stochastische Matrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen.

Leistungskurs Lineare Algebra/Geometrie

Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension, Erzeugendensysteme sollen stets auf einem anschaulichen Verständnis aufbauend als mathematische Strukturen in propädeutischer Weise eingeführt werden.

Abstandsprobleme eignen sich besonders, unterschiedliche Lösungsverfahren einzusetzen und zu vergleichen. Wenngleich es nicht zu den obligatorischen Themen gehört, kann dabei auch das Vektorprodukt als zweite Vektorverknüpfung eingeführt werden. Dafür sprechen nicht nur die elegante Behandlung von Abstandsberechnungen, sondern auch die physikalische Bedeutung und strukturmathematische Aspekte.

Oft tritt die Notwendigkeit auf, räumliche Objekte in der Zeichenebene darzustellen. Exemplarisch können neben schrägen auch senkrechte Parallelprojektionen behandelt und durch Matrizenoperationen realisiert werden.

Die Behandlung inverser Matrizen geschieht sowohl unter dem Aspekt der Abbildung als auch unter dem des Algorithmus. Die Verknüpfung von Abbildungen durch Matrizenmultiplikation eröffnet Möglichkeiten, strukturmathematische Aspekte zu behandeln, z. B. zu untersuchen, welche Matrizen bei Multiplikation eine Gruppe bilden.

Eigenwerte von Matrizen und ihre geometrische Deutung als Achsenstreckungen liefern eine Verbindung von algebraischen und geometrischen Aspekten. Mit Hilfe der Eigenwerte können in einfachen Fällen Abbildungen (z. B. Spiegelungen, Drehungen, Projektionen) aus ihrer Matrixdarstellung identifiziert werden. Determinanten sind in diesem Zusammenhang Kenngrößen linearer Abbildungen und beschreiben deren Deformationsgrad.

Alternativ können auch Übergangsmatrizen zur Modellierung von Wirtschaftsproblemen oder zur Simulation biologischer Fragestellungen eingesetzt werden. Von besonderer Bedeutung sind stochastische Übergangsmatrizen. Die Untersuchung der Existenz von Grenzverteilungen und stationären Verteilungen kann zur Behandlung von Markov-Ketten weiterführen und damit eine Verbindung zur Stochastik herstellen. Dabei ergibt sich automatisch die Notwendigkeit der fortgesetzten Multiplikation und der Invertierung von Matrizen.

Lineare Gleichungssysteme und vektorielle Geometrie

- lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise
  systematisches Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen
  Lösung unterbestimmter linearer Gleichungssysteme
- Rechnen mit Vektoren
  Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension, Erzeugendensysteme
  Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren

- Normalenformen von Ebenengleichungen
  Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, Schnittwinkel von Geraden und Ebenen
  Abstandsprobleme.

Matrizen (Alternative 1)
- Abbildungsmatrizen, Parallelprojektionen
- Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung, inverse Matrizen und Abbildungen
- Gruppenstruktur bzgl. der Matrizenmultiplikation
- Eigenwertprobleme.

Matrizen (Alternative 2)
- Übergangsmatrizen, stochastische Matrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen
- Gruppenstruktur bzgl. der Matrizenmultiplikation
- Fixvektoren, stationäre Verteilung.

Stochastik

In der Stochastik steht die Idee der Wahrscheinlichkeit im Zentrum des Unterrichts. Bei der Bearbeitung realer Probleme ist der Modellbildungsaspekt von besonderer Wichtigkeit. Ansatzüberlegungen müssen offen gelegt, Resultate diskutiert und bewertet werden. Genauso wenig wie die anderen Gebiete darf Stochastik als Zahlenkalkül betrieben werden. Bei der Kennzeichnung von Datenmengen durch Kennzahlen werden Aspekte der Idee des Messens angesprochen.

Grundlegendes über Wahrscheinlichkeiten, Zufallsschwankungen und den Umgang mit großen Datenmengen haben Schülerinnen und Schüler schon in der Sekundarstufe I und in der Jahrgangsstufe 11 kennen gelernt. An diese Vorkenntnisse gilt es anzuknüpfen. In den Jahrgangsstufen 12 und 13 wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgebaut und grundlegende Fragestellungen der Beurteilenden Statistik rücken ins Zentrum des Interesses. Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass Wahrscheinlichkeitsüberlegungen dazu beitragen können, rationale Prognosen zu erstellen und Entscheidungshilfen zu geben. Sie sollen lernen, statistische Aussagen zu verstehen, kritisch zu würdigen und in ihrer Tragweite abzuschätzen. Da Elemente einer vertieften Allgemeinbildung vermittelt werden, dient dies sowohl der Lebens- als auch der Studienvorbereitung für alle empirischen Wissenschaften.

Die Begriffe des Erwartungswerts und der Standardabweichung wurden in der Beschreibenden Statistik vorbereitet und können übertragen werden. Der Satz von Bayes eröffnet interessante Problemstellungen mit oft überraschenden Ergebnissen. Als einfachste Verteilung ist die Binomialverteilung für Grund- und Leistungskurs obligatorisch.

Das Schätzen von Parametern und das Testen von Hypothesen sind zentrale Aufgaben der Beurteilenden Statistik. Bei der Beschäftigung mit stochastischen Fragestellungen werden Vermutungen in Form von Hypothesen formuliert. Deren Gültigkeit wird innerhalb vorgegebener Grenzen überprüft, die Sicherheit möglicherweise durch ergänzende Untersuchungen erhöht. Es wird im Lehrplan kein Verfahren für das Testen von Hypothesen vorgegeben. Ob man klassische Alternativtests durchführt oder eine Bayes'sche Betrachtungsweise benutzt, sollte der Lehrerin bzw. dem Lehrer überlassen werden. Wenn man Stochastik ausführlich thematisiert, ist eine vergleichende Gegenüberstellung klassischer und Bayes'scher Sichtweise sehr lehrreich.

Die im Unterricht verwendete Sprache sollte sich nicht zu sehr von der Alltagssprache entfernen. Entscheidend ist, dass die Inhalte richtig erfasst werden. Auch die Schreibweisen müssen transparent und gut nachvollziehbar sein. Der Grad der Formalisierung sollte nicht zu stark ausgeprägt sein.

Wie kein anderes Gebiet der Oberstufenmathematik besitzt die Stochastik Anwendungen in vielen Bereichen. Sie bietet sich an, fachübergreifende Gesichtspunkte zu thematisieren. Zur Erhöhung der Transparenz und als Beispiel handlungsorientierten Vorgehens kann es von hohem Wert sein, stochastische Situationen in geeigneter Weise zu simulieren, sei es durch Zufallsgeräte, Zufallszahlen oder mit dem Computer. So kann man unmittelbare experimentelle Erfahrungen sammeln. Das gilt ganz besonders für simulierte Entscheidungssituationen aus dem Bereich der Beurteilenden Statistik, bei denen man Irrtumswahrscheinlichkeiten auch frequentistisch nachvollziehen kann. Bei der Bearbeitung und Visualisierung umfangreichen Datenmaterials ist der Computer nahezu unverzichtbar. Geeignete Software kann Tabellenwerke ersetzen und Simulationen übernehmen.

Schülerinnen und Schülern können in der Stochastik besonders gut selbstständig arbeiten. Durchführen eigener Untersuchungen, Erheben von Daten, Auswerten von Texten aus Büchern oder Zeitungen, Übernehmen von Informationen aus dem Internet, Dokumentieren der Arbeitsschritte, kritisches Überprüfen, Diskutieren und gegebenenfalls Präsentieren der Resultate bieten sich an.

Grundkurs Stochastik

Im Grundkurs ist eine eher „praktische“ Art der Beschäftigung mit stochastischen Fragestellungen angezeigt. Es empfiehlt sich, die Thematik in inhaltlichen Kontexten anzusprechen. Alltagssituationen aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler können aufgegriffen, an konkreten Fragestellungen, Experimenten und kleinen Projekten kann die Theorie beispielhaft entwickelt werden. So tritt nicht nur das Spannungsfeld Modell – Realität deutlich hervor, sondern es besteht auch eine Chance, dass bei den Schülerinnen und Schülern eine positive Einstellung zur Mathematik gefördert wird. Diese kann möglicherweise noch dadurch verbessert werden, dass den Schülerinnen und Schülern Gelegenheiten zu selbstständigem Arbeiten und zur aktiven Mitgestaltung des Unterrichts geboten werden.

Die Binomialverteilung kann bei umfangreichen Grundgesamtheiten als Näherung für die hypergeometrische Verteilung verwendet werden, das „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird durch das „Ziehen mit Zurücklegen“ ersetzt. Auf der anderen Seite wird die Binomialverteilung selbst durch die Normalverteilung angenähert, wenn die Laplace-Bedingung erfüllt ist. Mit Hilfe der Sigma-Regeln erhält man im Grundkurs überschaubare Lösungswege beim Testen von Hypothesen (Alternative 1) oder beim Schätzen von Parametern (Alternative 2).

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung
- Binomialverteilung.

Beurteilende Statistik (Alternative 1)

- Testen von Hypothesen.

Beurteilende Statistik (Alternative 2)

- Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen.

Leistungskurs Stochastik

Zentrale Inhalte des Leistungskurses lassen sich über eine intensive Behandlung der Binomialverteilung gut erschließen. Interessante Aspekte bieten die Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung sowie die Verwendung der Normalverteilung für die Binomialverteilung bei großem Stichprobenumfang. Eventuell kann zusätzlich die Poissonverteilung thematisiert werden.

Verbindlich ist die Verknüpfung der Stochastik mit einem der beiden anderen Gebiete. Der Bezug zur Analysis kann über die Betrachtung stetiger Verteilungen erfolgen, der zur Linearen Algebra mittels stochastischer Matrizen und Markovprozesse. In beiden Fällen sind Approximations- und Grenzwertaspekte von Bedeutung.

Modellierungen erfassen im Leistungskurs auch komplexere Sachverhalte. Sind verschiedene Ansätze möglich, so sollten sie konkret erläutert und miteinander verglichen werden. Von besonderem Wert sind Fehlerbetrachtungen sowie die Bewertung von Ergebnissen unter Berücksichtigung der jeweils gewählten Modellannahmen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Wahrscheinlichkeit
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Satz von Bayes

- Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung
- Binomialverteilung
- Normalverteilung, Formeln von de Moivre-Laplace.

Beurteilende Statistik
- Testen von Hypothesen
- Schätzen von Parametern.

Verknüpfung der Stochastik mit Analysis oder Linearer Algebra
- Verknüpfung der Stochastik mit der Analysis über stetige Zufallsgrößen oder mit der Linearen Algebra über stochastische Matrizen/Markovketten.

2.3 Obligatorik und Freiraum

Für die Jahrgangsstufe 11 sind in Kapitel 2.2 die Gebiete Koordinatengeometrie, Beschreibende Statistik und Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen ausgewiesen. Die dort genannten Inhalte sind verpflichtend. Die Gebiete sollen in geeigneter Weise miteinander verknüpft werden. Es ist darauf zu achten, dass wichtige Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe I in integrierenden Wiederholungen aufgegriffen und so aktuell verfügbar gehalten werden.

Für die Auswahl der Unterrichtsinhalte aus den für die Jahrgangsstufen 12 und 13 vorgesehenen drei Gebieten Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik gelten folgende Grundsätze:
- In allen drei Gebieten Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik sollen die Schülerinnen und Schüler Orientierungswissen erwerben. Dabei sollen insbesondere zentrale Ideen und fachliche Zusammenhänge deutlich werden. (Nähere Einzelheiten werden in den Kapiteln 3.2.1 und 3.4 ausgeführt.)
- Für die Abiturprüfung ist Analysis verpflichtend sowie mindestens eines der Gebiete Lineare Algebra/Geometrie oder Stochastik. Damit ein angemessenes Abiturniveau erreicht wird, sind alle aufgelisteten Inhalte der abiturrelevanten Gebiete so zu behandeln, dass die Schülerinnen und Schüler damit sachgerecht umgehen können. Dabei ist es keineswegs notwendig, jeden Unterrichtsinhalt mit gleicher Intensität und Ausführlichkeit zu behandeln.
- Werden neben Analysis beide Gebiete Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik im Abitur berücksichtigt, so ist aus den Inhalten eine geeignete Auswahl zu treffen.
- Für die Behandlung eines zusätzlichen Gebietes, das im schriftlichen Abitur Prüfungsgegenstand sein soll und im Lehrplan nicht beschrieben ist, ist eine Genehmigung durch die Schulaufsicht erforderlich.

Obligatorisch ist nicht nur die Behandlung der benannten fachsystematischen Inhalte, sondern auch, wie im Sinne einer Vorbereitung auf selbstständiges wissenschaftliches Arbeiten mit den mathematischen Inhalten umgegangen wird. Dazu gehört insbesondere:

- die selbstständige Beschaffung von Informationen; dies betrifft sowohl Informationen fachsystematischer Art aus Lehrbüchern oder anderen mathematischen Texten als auch Informationen über Sachzusammenhänge in „mathematikhaltigen" Kontexten
- die Analyse, Strukturierung und Interpretation von Daten, die im Kontext von Sachzusammenhängen oder in Graphiken, Zeichnungen, Tabellen, Diagrammen usw. vorgegeben sind
- die Dokumentation von Arbeitsprozessen (insbesondere auch in kooperativen Arbeitsformen) und die Präsentation der Ergebnisse, die diskursive Auseinandersetzung über die eigene Arbeit mit den Mitschülerinnen und Mitschülern
- die Arbeit mit mathematischen Modellen in fachübergreifenden Kontexten
- der Einsatz von Informations- und Kommunikationstechnologien als Hilfsmittel zur Erarbeitung und Darstellung von mathematischen Methoden und Lösungswegen.

3 Unterrichtsgestaltung/Lernorganisation

3.1 Grundsätze der Unterrichtsgestaltung

Es ist Aufgabe des Unterrichts, das im Bildungsauftrag genannte Hauptziel der gymnasialen Oberstufe realisieren zu helfen, auf Studium und Beruf vorzubereiten. Die Unterrichtsorganisation soll dazu beitragen, dass die Schülerinnen und Schüler auf der Grundlage einer vertieften allgemeinen Bildung

- eine wissenschaftspropädeutische Ausbildung erwerben
- und Hilfen zur persönlichen Entfaltung in sozialer Verantwortung erhalten

(vgl. Kapitel 1 der Richtlinien „Aufgaben und Ziele der gymnasialen Oberstufe").

Wesentliche Bezugspunkte sind die Dimensionen einer wissenschaftspropädeutischen Ausbildung, die in den Richtlinien mit

- dem Erwerb wissenschaftspropädeutischen Grundlagenwissens
- der Entwicklung von Prinzipien und Formen selbstständigen Arbeitens
- der Entwicklung von wissenschaftlichen Verhaltensweisen
- der Ausbildung von Reflexions- und Urteilsfähigkeit

umschrieben werden.

Der Unterricht ist also so anzulegen, dass diese Ziele erreicht werden können. Die Prinzipien, denen hierbei gefolgt werden soll, sind im Kapitel 3 der Richtlinien „Prinzipien des Lernens und Lehrens in der gymnasialen Oberstufe" beschrieben. Hierbei ist sicherzustellen, dass auf der einen Seite eine gut organisierte fachliche Wissensbasis erreicht wird. Dazu gehören Theorien, Fakten, Methoden- und Prozesswissen. Auf der anderen Seite muss eine Balance zwischen fachlichem Lernen und Lernen in sinnstiftendem Kontext hergestellt werden.

Zusammengefasst soll sich die Unterrichtsorganisation daran ausrichten, dass

- die individuelle Schülerpersönlichkeit mit ihren Vorerfahrungen, Möglichkeiten und Leistungsdispositionen im Blick ist
- Schülerinnen und Schüler aktiv lernen
- Schülerinnen und Schüler kooperativ lernen
- Vorwissen abgesichert, aufgegriffen und Lernfortschritt ermöglicht wird
- die Aufgabenstellungen komplex sind
- die Aufgabenstellungen auch auf Anwendung und Transfer ausgerichtet sind.

Fachliche Systematik, verbunden mit dialogischen, problembezogenen und fachübergreifenden Lernarrangements, sind die inhaltlichen Bezugspunkte für die Lernorganisation (vgl. Kapitel 3 „Prinzipien des Lernens und Lehrens in der gymnasialen Oberstufe").

3.2 Gestaltung der Lernprozesse

Der Unterricht folgt einer Gesamtplanung, die schüler-, gegenstands- und methodenorientiert ist. Eine zu enge Steuerung des Lernprozesses ist ebenso zu vermeiden wie eine unstrukturierte Offenheit.

Schülerorientierung bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, im Unterricht an ihren eigenen Erfahrungs- und Lernstand anzuschließen und dem Leitbild des aktiven und selbstständigen Arbeitens zu folgen.

Gegenstandsorientierung bedeutet, dass die vorgesehenen Unterrichtsinhalte in einem breiten Wissens- und Anwendungsbereich (vgl. Bereiche des Faches) in einer über die drei Jahre der gymnasialen Oberstufe laufenden Sequenz aufgebaut werden, dass Wissenszuwachs entsteht und vernetztes Wissen möglich wird.

Methodenorientierung bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler sich im Medium der Unterrichtsinhalte die geforderten fachlichen und fachübergreifenden Methoden und die notwendigen Arbeitshaltungen und -dispositionen aneignen.

Der Begriff **Unterrichtsmethode** umfasst die Summe der Unterrichtsschritte, Arbeitsformen, Lehr- und Lernformen, mit deren Hilfe der Unterricht strukturiert wird. Die Unterrichtsmethoden und -organisationsformen sollen durch die in Kapitel 3.1 dargestellten Grundsätze geprägt sein.

Auf gängige Unterrichtsmethoden (z. B. Lehrervortrag, Unterrichtsgespräch) wird an dieser Stelle nicht eingegangen. Nachfolgend werden die Verknüpfung von Zielen, Inhalten und Unterrichtsmethoden, d. h. die Lernarrangements beschrieben, die geeignet sind, dem Leitbild des aktiven und selbstständigen Lernens zu dienen und eine Vernetzung des Wissens zu ermöglichen. Die Formen eigenverantwortlichen Lernens und Arbeitens, die die Schülerinnen und Schüler aktiv tätig sein lassen, sind hier von besonderer Bedeutung.

Lernen ist konstruktiv

Lernen ist eine Aktivität der Lernenden selbst und nicht eine passive Übernahme von Informationen. Insofern können die Lehrenden Hilfestellungen geben, aber nachhaltige Lernleistungen kann es nur geben, wenn die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler im Unterricht angeregt wird. Eine Strukturierung des Mathematikunterrichts aus der Zuordnung zu Problemkontexten, die für die Schülerinnen und Schüler einsichtig und herausfordernd sind, bietet sich an. Die in Kapitel 3.2.3. vorgeschlagenen Themenstellungen (Brücken/Sammelspiegel etc.) eröffnen den Raum, in dem Schülerinnen und Schüler aktiv handeln, Erfahrungen reflektieren und zur Abstraktion gelangen. Die Lernenden erhalten Gelegenheit mathematische Zusammenhänge für sich zu „konstruieren“. Es gilt kognitive Strukturen in der Auseinandersetzung mit den ausgewählten Sachverhalten und Zusammenhängen so aufzubauen, dass sie autonomes Lernen und Problemlösen ermöglichen. Dieses geschieht durch Verknüpfung von neuem Wissen mit vorhandenem, durch den Abruf von Wissen und dessen Einbindung in neue Bezüge, durch die Erkenntnis, dass und aus welchem Grund ein eingeschlagener Weg nicht zum Erfolg führt und durch das Lernen aus Fehlern (vgl. Kapitel 3.2.2). Die so erworbenen Strukturen tragen zur Überprüfung und Festigung von bereits Gelerntem bei, aber auch zur Korrektur und Veränderung von Wissen. Der Aufbau mathematischer Begriffsstrukturen in Abgrenzung von und in Ergänzung zum eigenen Vokabular wird unterstützt.

Lernen ist kumulativ

Lernen geschieht durch die Verknüpfung neuer Informationen mit alten. In jeder Lerngruppe gibt es Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichem Vor- und Alltagswissen sowie verschiedenartigen Verarbeitungsweisen und Zugängen. Die Verknüpfung neuer Informationen mit alten wird erleichtert durch das Zulassen einer Vielzahl von Lernwegen. Damit wird es den Lernenden ermöglicht, ihren eigenen Zugang zu finden. Die so entstandene Vielfalt kann produktiv genutzt werden, indem sich die Schülerinnen und Schüler über ihre jeweiligen Zugänge austauschen und andere Sichtweisen verarbeiten und für ihr Weiterlernen nutzen.

Mathematisches Lernen geschieht in Wechselwirkung von Alltagswissen und Fachwissen. Die Orientierung des Mathematikunterrichts an zentralen Ideen hilft den Schülerinnen und Schülern zu erkennen, wie Mathematik und Welt miteinander verbunden sind. Durch die Erfahrung, wie Mathematik zum besseren Verständnis nicht mathematischer Phänomene herangezogen werden kann, ergeben sich andere Zugänge und Motivationen für das Lernen.

Der einzelne mathematische Sachverhalt kann von den Schülerinnen und Schülern in einem erweiterten Kontext gesehen werden, wenn er von folgenden Seiten beleuchtet wird: Anwendungsbezug, Genese, inner- und außermathematische Bedeutung, evtl. grundlegende Prozesse und Bedingungen für den Aufbau einer mathematischen Theorie.

Das schulmathematische Wissen zerfällt häufig in getrennte Erfahrungsbereiche, deren Verbindung nur auf den im Unterricht explizit thematisierten Zusammenhängen beruht. Entstehen nur lineare Wissensordnungen, zerfallen diese, wenn einzelne Verbindungen durch Nichtgebrauch oder Vergessen gelöscht werden. Lernen in realistischen Problemkontexten, die Verbindung der Fachgebiete und fächerverbindendes Arbeiten wirken dem entgegen.

Die in Kapitel 3.4 vorgeschlagene Beispielsequenz zeigt eine Möglichkeit zur Entzerrung der großen Blöcke Analysis, Stochastik, Lineare Algebra/Geometrie auf und ermöglicht eine Verzahnung dieser Gebiete. Darüber hinaus weist sie auf die Einbeziehung von Kontexten hin.

Lernen ist kooperativ

Aller Unterricht ist nicht nur ein gegenstandsbezogenes sondern auch ein interaktives Geschehen. Durch das Sprechen miteinander, das gegenseitige Fragen, Erläutern und Erklären, werden Lücken in der Argumentationskette deutlich, können Verständnisprobleme geklärt werden.

Soziale Interaktion kann zu einem Prozess der kooperativen Konstruktion und Veränderung von Wissen führen, in dem die Lernenden gemeinsames Können entwickeln. Dieses produktiv für die Gestaltung des Lernprozesses zu nutzen, muss Ziel sein. Kooperatives Vorgehen wird gefördert, wenn der Unterricht Aufgaben und Probleme stellt, die die Zusammenarbeit mehrerer Schülerinnen und Schüler erfordern.

Mathematikunterricht als interaktives Geschehen zu nutzen, verlangt ein partnerschaftliches Umgehen der Lehrenden und Lernenden miteinander. Dazu ist eine Unterrichtskultur erforderlich, die gekennzeichnet ist durch gegenseitige Wertschätzung, Akzeptanz und Bereitschaft aufeinander einzugehen.

Lernen ist zielorientiert

Gründliches Verstehen wird durch zielgerichtete kognitive Tätigkeit gefördert. Es wird geleitet von den Vorstellungen über den Prozess und das zu erreichende Produkt. So wird dem Wissensaufbau Bedeutung verliehen. Wird im Mathematikunterricht Wert gelegt auf den Aufbau von Orientierungswissen, können die Schülerinnen und Schüler die Frage „Wofür brauche ich den fachlichen Inhalt?“ für sich beantworten.

Erfolgreiches Lernen bedarf also von den Lernenden selbst akzeptierter Ziele. Dazu ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, was und warum sie etwas lernen sollen, dass sie die Ziele akzeptieren und bereit sind sich anzustrengen.

Lernen ist selbstreguliert

Zwischen der Selbstüberwachung und Selbstregulation des Lernprozesses und dem Lernerfolg besteht eine positive Beziehung. Die zur Selbstüberwachung notwendigen Strategien, die im Abschnitt „Reflexion des Lernens“ erläutert sind, sollen im Unterricht eingeübt werden. Sie werden behalten und angewandt, wenn die Lernenden erfahren haben, wie, wann, wo und warum sie von Vorteil sind. Dadurch werden die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt, Verantwortung für das eigene Lernen zu übernehmen und auch unabhängig von den Lehrenden erfolgreich zu lernen.

Lernen ist situativ

Jedes Lernen in einem sachbezogenen Kontext hat auch eine situative Seite. Verstehensprozesse beruhen in Alltag, Schule und Beruf nicht allein auf strukturellen Faktoren, sondern sind eingebettet in Situationen, die Lernen fördern oder behindern können.

Gelernt wird nicht nur eine Sache, sondern zugleich, wie diese Sache angegangen wird. Erleben die Lernenden beispielsweise Lehrerinnen und Lehrer, wie sie konstruktiv Mathematik treiben, erfahren sie deren Begeisterung für die Mathematik und ihre Geschichte, beeinflusst dies den Lernprozess entscheidend. Nicht zuletzt wird die Einstellung der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik durch die Art und Weise geprägt, wie das Fach in der Schulöffentlichkeit repräsentiert wird.

3.2.1 Kriterien für die Auswahl von Unterrichtsinhalten

Der Unterricht in den Jahrgangsstufen 11 bis 13 wird sequenziell aufgebaut. Die fachlichen, fachübergreifenden und methodischen Ziele des Faches sollen am Ende der Jahrgangsstufe 13 erreicht sein.

Folgende Kriterien können bei der Inhaltsauswahl hilfreich sein:
- Der Aufbau der fachlichen Inhalte darf nicht zu einer Stoffhäufung führen. Es gilt das Prinzip des Exemplarischen, das sich auf wesentliche, repräsentative und bedeutsame Fachinhalte beschränkt, die geeignet sind, übertragbare Kenntnisse und Fertigkeiten zu vermitteln.
- Die Auswahl der Unterrichtsinhalte soll so erfolgen, dass Vorwissen aktiviert werden kann. Lernzuwachs und Progression müssen deutlich werden.
- Die ausgewählten Inhalte sollen in fachlicher und fachübergreifender Hinsicht methodisch selbstständiges Arbeiten ermöglichen und entsprechende Kompetenzen progressiv aufbauen und sichern.

Orientierungswissen

Im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe ist es ein wichtiges Anliegen, über das Faktenwissen hinaus den Schülerinnen und Schülern zentrale Ideen und fachliche Zusammenhänge zu verdeutlichen. Dies erfordert in allen Bereichen eine Form von Orientierungswissen, das sie befähigt, Zusammenhänge und Strukturen zu erkennen sowie einzelne Inhalte einzuordnen.

Zum Aufbau von Orientierungswissen erscheinen methodisch u. a. folgende Wege möglich, die auch miteinander kombiniert werden können:
- vorausschauende Übersicht über ein noch zu behandelndes Thema
- Rückblick auf ein Thema
- Unterrichtsprojekt
- historische Betrachtungen.

Aus der Sicht der Schülerinnen und Schüler stehen beim Erwerb derartigen Wissens weniger ein logisch-formaler Aufbau oder gar die Deduktion eines Theoriegebäudes im Vordergrund als vielmehr erkenntnisleitende Fragen wie zum Beispiel:

- Wie kommt man zu bestimmten Begriffen oder Methoden?
- Welche Möglichkeiten, Anwendungen ergeben sich hieraus?
- In welchem Zusammenhang stehen Begriffe oder Methoden zu bereits bekannten Inhalten?

Die Entwicklung von Grundvorstellungen, die zu Begriffsbildungen führen, Überlegungen zur Anwendbarkeit sowie auch die Modifikation mathematischer Modelle können in diesem Zusammenhang Aufgabe im Unterricht sein.

So könnte im Rahmen von Inhalten der Analysis zunächst ein noch grobmaschiges Netz von Orientierungswissen folgender Art entstehen, das sich an den eben genannten Leitfragen orientiert:

- Das in mehreren konkreten Kontexten auftretende Problem, an eine Kurve eine Tangente zu legen, erscheint anschaulich lösbar.
- Die algebraische Lösung des Problems erfordert die Bewältigung eines Grenzprozesses.
- So entsteht in der Mathematik das Bedürfnis, den Grenzwertbegriff zu klären, zu präzisieren und handhabbar zu machen.
- Dies ist vergleichbar den Prozessen zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ und anderen Irrationalzahlen.
- In der Differentialrechnung werden dazu Begriffe und Kalküle entwickelt.
- Vergleichbare Näherungsprozesse zur Berechnung von Flächen führen zur Integralrechnung mit den ihr eigenen Begriffen und Rechenregeln …

Ein derartiges Netz ist bereits tragfähig ohne die Details der angesprochenen mathematischen Inhalte und Methoden im Einzelnen herzuleiten und kann bei Bedarf enger geknüpft werden.

Vor allem in projektartigen Unterrichtsphasen stellen Erwerb und Nutzung von Orientierungswissen für Schülerinnen und Schüler eine wichtige Grundlage ihrer Arbeit dar. Zu lernen, selbstständig auf Hilfsmittel zurückzugreifen, ist Vorbereitung auf wissenschaftliches Arbeiten. Es geht darum, sich selbstständig Informationen aus mathematischer Literatur zu verschaffen, Formeln und Verfahrensweisen zu suchen und anzuwenden, sich in Software einzuarbeiten und sich so mathematische Methoden zur sachgerechten Anwendung verfügbar zu machen.

Auch Themen, die durch vertiefte Erarbeitung zu Gegenständen der Abiturprüfung werden, sollen in Orientierungswissen eingebettet werden. Wo Themen nicht so vertieft werden, um Gegenstand der Abiturprüfung zu werden, muss auf jeden Fall die Verfügbarkeit durch Orientierungswissen sichergestellt werden. Dieses ist nicht mit oberflächlichem Wissen zu verwechseln, da es um die Entwicklung tragfähiger Vorstellungen geht, die insbesondere in Anwendungssituationen erfahren und gestützt werden.

Orientierungswissen sollte auch Gegenstand von Leistungsüberprüfungen (Klausuren) sein. Fragestellungen hierzu werden in der Regel die Darstellung von Zusammenhängen erfordern.

Orientierungswissen in der Analysis

Die für die Analysis wichtige Idee, dass durch Grenzwertbildung die intuitive Vorstellung vom „unendlich Kleinen" bzw. „unendlich Großen" schrittweise präzisiert und rechnerisch handhabbar gemacht wird, sollte sich wie ein roter Faden durch die Erarbeitung der verschiedenen Teilgebiete der Analysis ziehen.

Funktionen und Möglichkeiten ihrer graphischen Darstellung kennen die Schülerinnen und Schüler bereits aus der Sekundarstufe I. Hier haben sie auch schon anhand vieler Beispiele erfahren, dass und wie sich Funktionen für das Modellieren vieler Situationen, insbesondere für das Beschreiben von empirischen und theoretischen Zusammenhängen zwischen messbaren Größen eignen.

Die zentralen Begriffsbildungen der Analysis (vor allem Änderungsrate, Ableitung, Differentialquotient, Grenzwert, Änderungseffekt, Integral) sollten sich auf intuitive und anschauliche Vorstellungen stützen können, die deshalb auch im Unterricht immer wieder ausdrücklich zu thematisieren sind. Dabei ist darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler auf unterschiedliche Veranschaulichungen zurückgreifen können, die sich gegenseitig stützen – etwa beim Differentialquotienten nicht nur auf die geometrische Vorstellung der „Steigung in einem Punkt", sondern z. B. auch auf die physikalische der „Momentangeschwindigkeit" bei beschleunigter Bewegung.

Orientierungswissen in der Linearen Algebra/Geometrie

Die für die Lineare Algebra wichtige Idee, geometrische Objekte (z. B. Geraden, Kreise, Parabeln) algebraisch darzustellen und geometrische Probleme (z. B. die Bestimmung von Schnittpunkten) mit algebraischen Methoden zu lösen, haben die Schülerinnen und Schüler bereits in der Koordinatengeometrie kennen gelernt.

Lineare Gleichungssysteme nehmen eine Schlüsselstellung zwischen Algebra und Geometrie ein. Es werden zum einen geometrische Aspekte algebraisiert, zum andern ergeben sich bei der Untersuchung der Lösungsmengen sowohl geometrische als auch strukturelle Aspekte.

Die Einführung von Vektoren ermöglicht es, Koordinaten zu bündeln. Jeder Punkt im dreidimensionalen Raum kann so durch einen einzelnen Vektor beschrieben werden. Auf diese Weise lassen sich viele grundlegende Operationen (z. B. die Bestimmung von Abständen, Winkeln, Flächeninhalten und Volumina) viel einfacher und effizienter durchführen und eleganter symbolisch hinschreiben.

Matrizen erscheinen einerseits als rechteckige Zahlenschemata, werden andererseits als Bündelung von Vektoren aufgefasst. Mit ihrer Hilfe lassen sich Bewegungen darstellen. So wird z. B. die Bewegung eines Punktes beschrieben als Multiplikation des betreffenden Ortsvektors mit einer Matrix.

Vektoren und Matrizen sind brauchbare Werkzeuge beim räumlichen Strukturieren und Modellbilden. Sie eröffnen darüber hinaus die Möglichkeit zur Verallgemeinerung und Übertragung auf nichtgeometrische Anwendungen.

Orientierungswissen in der Stochastik

Zwei Grundprobleme sind geradezu charakteristisch für unser Alltagsleben:

- Wir werden laufend mit großen Mengen von Daten konfrontiert, auf die wir uns irgendwie „einen Reim machen“ müssen, und
- wir stehen immer wieder vor der Situation, dass wir in der Ungewissheit, was die Zukunft bringt, nach Entscheidungshilfen suchen.

Für beide Probleme hält die Mathematik Theorien und Verfahren bereit, die uns helfen, mit diesen Unsicherheiten rational umzugehen: Wie man große Mengen von Daten „raffen“ kann und das Entscheidende, was in ihnen enthalten ist, herausfiltern kann, sagt uns die Statistik. Und wie wir die Unsicherheit, mit der ein zukünftiges Ereignis eintritt, messbar machen können, sagt uns die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Bei der Vermittlung stochastischen Orientierungswissens ist anzustreben, diese Grundeinsichten anhand einfacher Beispiele plausibel zu machen. Es geht nicht primär darum, die entsprechenden mathematischen Theorien im Detail nachzuvollziehen, als vielmehr darum, im Prinzip zu verstehen,

- wie statistische Aussagen und Darstellungen die Ausgangsdaten zugleich verkürzen und komprimieren, und
- wie man zu Aussagen über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch die Kombination von empirischem Wissen und theoretischen Erwägungen kommen kann.

Besonders instruktiv sind dabei die Betrachtung und Analyse von irreführenden Darstellungen (unter welchen Umständen „lügen“ Statistiken?) und die Gegenüberstellungen von Wahrscheinlichkeiten mit tatsächlich eintretenden Ereignissen. Schülerinnen und Schüler sollten erfahren, inwiefern sich Wahrscheinlichkeiten als „Grenzwerte“ relativer Häufigkeiten deuten lassen.

Schwerpunktmäßig sollte die Rolle der (Beurteilenden) Statistik bei der empirischen Prüfung von Hypothesen im natur- und sozialwissenschaftlichen Bereich erläutert werden: Hier kann für die Schülerinnen und Schüler exemplarisch deutlich werden, wie die mathematische „Zähmung des Zufalls“ dazu dienen kann, systematische („signifikante“) Zusammenhänge zwischen beobachtbaren Merkmalen von zufälligen zu unterscheiden.

3.2.2 Lern- und Arbeitsorganisation im Fach

Fördern langfristiger Einstellungen

Lernprozesse im Mathematikunterricht sollten so ablaufen, dass den Schülerinnen und Schülern ein sicherer Umgang mit mathematischen Symbolen und Modellen vermittelt wird. „Angestrebt wird die Fähigkeit, Gegenstandsbereiche und Theoriebildungen, die einer Mathematisierung zugänglich sind und in denen Problemlösungen einer Mathematisierung bedürfen, mit Hilfe geeigneter Modelle aus unterschiedlichen mathematischen Gebieten zu erschließen und darzustellen und die Probleme mit entsprechenden Verfahren und logischen Ableitungen zu lösen" (KMK-Beschluss v. 24./25.10.1996).

Schülerinnen und Schüler sollen Verständnis für mathematische Zusammenhänge gewinnen. Bei möglichst vielen soll eine langfristig positive Einstellung zur Mathematik aufgebaut werden. Sie sollen für die Mathematik positiv motiviert werden, sollen die Leistungsfähigkeit und Schönheit der Mathematik erfahren. Der in unserer Gesellschaft leider verbreiteten Ansicht, Mathematik sei nur für Spezialisten bedeutsam, muss entgegengewirkt werden. Es wäre ein schöner Erfolg, wenn sich künftig niemand mehr interessant vorkäme, wenn er vorgibt, Mathematik in der Schule nie verstanden oder von Mathematik keine Ahnung zu haben.

Die Lehrkräfte sollen ihren Schülerinnen und Schülern vermitteln, dass von ihnen die Bereitschaft erwartet wird sich anzustrengen, konzentriert und beharrlich vorzugehen. Lehrerinnen und Lehrer müssen die Probleme der Lernenden ernst nehmen und angemessen darauf eingehen. Nur so kann der Mathematikunterricht dauerhaft ertragreich und wirksam werden.

Methodenvielfalt

Im Mathematikunterricht ist Methodenvielfalt notwendig, Einseitigkeit muss vermieden werden. Optimal erscheint eine flexible Unterrichtsführung, die Schüleraktivitäten nicht zu sehr kanalisiert. Der Unterricht muss für Anregungen der Schülerinnen und Schüler offen sein. Anzustreben ist eine Mischung individueller und kooperativer Arbeit. Von der Lehrkraft angeleitete wie auch vom Lernenden selbstständig gesteuerte Lernprozesse sollen sich ergänzen.

Nachfolgend werden Prinzipien des Unterrichts vorwiegend mit Blick auf die Schülerinnen und Schüler dargestellt. Es wird auf bisher weniger verbreitete Unterrichtsformen eingegangen. Sie werden unter dem Gesichtspunkt der Schülerorientierung und der Förderung selbstständigen Arbeitens dargelegt. Es wird ausdrücklich betont, dass nicht beabsichtigt ist, gängige Verfahren, z. B. Lehrervortrag, Unterrichtsgespräch, Einzelarbeit, Partnerarbeit oder Gruppenarbeit über Bord zu werfen. Wohl aber soll die veränderte Sichtweise der Lernprozesse auch im Mathematikunterricht wirksam werden. Nicht zuletzt können unterrichtliche Erfolge anderer Länder für die Umgestaltung des Mathematikunterrichts in unserer gymnasialen Oberstufe beispielhaft sein.

Vielfalt von Lernwegen

Wenn den Schülerinnen und Schülern ermöglicht werden soll, ihr Wissen individuell aufzubauen, muss der Unterricht am jeweiligen Vorwissen anknüpfen und berücksichtigen, dass jeder anders lernt. Mathematikunterricht, der dieser Forderung gerecht werden will, erfordert besondere Planung und Vorgehensweise.

Zunächst kommt es darauf an, geeignete Probleme und Aufgaben zu entwickeln, die einerseits unterschiedliche Zugangsmöglichkeiten auch bei unterschiedlichem Vorwissen und Leistungsstand ermöglichen und nicht durch kleinschrittige Vorgaben bereits einen einzigen Lösungsweg festlegen. Dabei müssen diese Problemstellungen genügend Anreize und Anforderungen enthalten, um bei der Bewältigung der Aufgabe neue mathematische Inhalte zu erschließen.

Zum anderen muss eine Vorbereitung und Einübung der Arbeitsweise erfolgen; es kann nicht immer davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler bereits sicher über die Fähigkeit verfügen, ihre Arbeitsschritte problembezogen zu planen und zu organisieren.

Schülerinnen und Schüler sollten erfahren, dass ihre individuell oder in Gruppen erarbeiteten Lösungsschritte ernst genommen werden, auch wenn sie sich im Einzelfall als Umweg herausstellen, nicht zum Ziel führen oder gar Fehler enthalten. Dazu ist es wichtig, dass die unterschiedlichen Ansätze vorgestellt und erörtert werden. Die verantwortliche Vertretung des eigenen Ansatzes, die Auseinandersetzung mit der Kritik und der Vergleich mit anderen Vorschlägen tragen wesentlich zum Erwerb und zur Festigung neuen Wissens bei.

Umgang mit Fehlern

Der Umgang mit Fehlern spielt im Mathematikunterricht eine besondere Rolle. Zwar kann die fehlerfreie Lösung einer Aufgabe Zeichen für den erfolgreichen Abschluss eines Lernprozesses sein, beim Lernen selber jedoch sollte man die konstruktive Bedeutung von Fehlern beachten. Die ängstliche Vermeidung von Fehlern kann die Bewältigung einer Problemstellung eher behindern als fördern.

Gerade die Tatsache, einen Fehler erkannt zu haben, kann tiefere Einsicht in die Zusammenhänge vermitteln, Quelle neuer Erkenntnisse sein und zum Ausgangspunkt für weiteres Lernen werden.

Damit dies ermöglicht wird, muss im Unterricht offen und produktiv mit Fehlern umgegangen werden. Insbesondere die Lehrerinnen und Lehrer können hier Vorbild sein. Auftretende Probleme sollten nicht übergangen werden, vielmehr sollten auch Schülerinnen und Schüler erleben, wie Unterrichtende mit der Situation auftretender Fehler oder Schwierigkeiten umgehen.

Damit jedoch Schülerinnen und Schüler lernen produktiv mit Fehlern umzugehen, ist es nötig, dass sie bei der Erarbeitung neuen Wissens keine Angst vor der negativen Bewertung von Fehlern haben müssen. Leistungsüberprüfungen sollten für die Schülerinnen und Schüler deutlich als solche erkennbar sein und von Situationen unterschieden werden, in denen es auf den kreativen Umgang mit einer Problemsituation ankommt und in denen auftretende Fehler ein in der Regel unvermeidlicher Teil des Lernprozesses sind.

Sprache/Exaktheit im Mathematikunterricht

Sprache hat im Mathematikunterricht eine wesentliche Bedeutung bei der Verständigung über Zusammenhänge und Begriffe sowie bei deren Präzisierung. Auch wenn sich aus der Umgangssprache allmählich der Gebrauch einer Fachsprache entwickeln soll, ist die Förderung der Fähigkeit, mathematische Sachverhalte umgangssprachlich darstellen zu können, weiterhin von Bedeutung. Dies gilt insbesondere in den Grundkursen und bei der Arbeit in fachübergreifenden Kontexten. Dies gilt es in Unterrichtsgesprächen einzuüben.

Damit im Unterricht die gemeinsame Erörterung mathematischer Sachverhalte gelingt, müssen sich Lehrende und Lernende miteinander verständigen. Dazu gehören Vereinbarungen, wie man an Aufgaben herangeht, ob und wie man sein Vorgehen kontrolliert, was als Lösung akzeptiert wird oder was als Begründung gelten kann. Bei den Äußerungen der Schülerinnen und Schüler im Unterrichtsgespräch kommt es nicht so sehr auf sprachliche Gewandtheit an, wichtiger ist die Fähigkeit, Vorstellungen möglichst klar darzulegen, logische Verknüpfungen und Argumentationsketten zu formulieren, Beziehungen zwischen Sachverhalten herzustellen und nachvollziehbar wiederzugeben. Dabei sollen Fachtermini richtig und angemessen präzise verwendet werden. Beiträge können auch in Formelsprache, als Berechnungen oder Herleitungen, als Skizzen, Konstruktionen o. Ä. erfolgen. Es ist nicht Voraussetzung, dass der Unterricht in Gesprächsform mit der gesamten Kursgruppe geführt wird. Es sollen auch Schüleräußerungen in einer Arbeitsgruppe oder im Gespräch mit der Lehrerin bzw. dem Lehrer in einer Einzelarbeitsphase eingeschlossen sein. Nicht zuletzt stellen spontane Schülerfragen und -einwände oft wertvolle Beiträge dar, die zur Verdeutlichung, Präzisierung oder Weiterführung von Überlegungen produktiv genutzt werden können.

Beiträge von Schülerinnen und Schülern sind für eine lebendige Unterrichtsgestaltung sehr bedeutsam. Von ihrer Qualität hängt auf die Dauer der Erfolg konstruktiven und kumulativen Lernens sowie überhaupt die Wirksamkeit des Mathematikunterrichts wesentlich ab. In Unterrichtsphasen, in denen das Lernen erste Priorität hat, treten Bewertungsgesichtspunkte zurück. Die Grundsätze zum Umgang mit Fehlern sind besonders zu beachten.

Umgang mit mathematischen Texten

Der im Lehrplan entwickelte Lernbegriff setzt voraus, dass sich Kommunikation und Kooperation innerhalb der Lerngruppe lebendig entfalten können. Gleichzeitig wird die Bedeutung des eigenständigen Lernens betont. In jedem Fall sind die Alltagssprache und die sich entwickelnde Fachsprache Voraussetzungen für ein solches Lernen.

Damit werden die Beschäftigung mit mathematischen Texten und die Produktion mathematischer Texte in Form von Erläuterungen bis hin zum mathematischen Aufsatz zum Unterrichtsgegenstand. Die Schülerinnen und Schüler werden so in die Lage versetzt, auch außerhalb des Unterrichts selbstständig mathematische Probleme angehen zu können, kontrastierend zum Unterricht andere Darstellungsweisen kennen zu lernen und damit ihre fachlichen Kenntnisse zu vertiefen. Dem Wissensmonopol der Schule kann so begegnet werden.

Mathematische Texte begegnen den Schülerinnen und Schülern vorwiegend im Lehrbuch. In Form von Zahlen, von Graphiken und von Statistiken stoßen sie auch in der Presse auf Mathematik, deren Verwendung häufig hier allerdings nicht sehr offensichtlich ist. Zeitungsmathematik sollte daher im Mathematikunterricht problematisiert werden. Nur wenige Schülerinnen und Schüler werden von mathematischen Schülerzeitschriften oder von mathematischer Freizeitliteratur erreicht.

Im Unterrichtsalltag zeigt sich, dass das Lehrbuch aus den unterschiedlichsten Gründen weder von den Schülerinnen und Schülern noch von den Lehrpersonen als Basis gemeinsamer und individueller Arbeit akzeptiert und meist nur als Aufgabensammlung genutzt wird. Damit wird auf einen wichtigen Aspekt schulischer Arbeit verzichtet. Der Unterricht sollte die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzen, selbstständig mit dem Lehrbuch zu arbeiten.

Mathematische Texte können Formulierungen von Aufgaben, die Entdeckung mathematischer Sachverhalte, ihre Anwendung und ihren Beweis zum Inhalt haben. Typisch für mathematische Texte ist die Verwendung der Fachsprache einschließlich des Variablengebrauchs und der entsprechenden Notation. Nicht selten bewegt sich die fachsprachliche Darstellung sehr weit entfernt von der Alltagssprache. Sie sichert damit die Korrektheit der Darstellung, erschwert gleichzeitig aber auch verständnisfördernde Assoziationen.

Mathematische Texte haben – gemessen an umgangssprachlichen Texten – eine hohe Informationsdichte und sind häufig als streng lineare Argumentationsketten aufgebaut. Ein nachfolgender Argumentationsschritt kann in der Regel erst dann verarbeitet werden, wenn alle vorausgehenden Schritte verstanden worden sind. Dagegen können bei alltagssprachlichen Texten Verständnislücken gegebenenfalls auch zunächst übersprungen und aus dem Gesamtverständnis gefüllt werden. Bei der Verarbeitung mathematischer Texte müssen Schülerinnen und Schüler gleichzeitig lernen, vorausschauend zu lesen und die erforderlichen Vernetzungen selbstständig vorzunehmen.

Im Unterricht sollten die folgenden Strategien zur Verarbeitung mathematischer Texte entwickelt werden:

Schülerinnen und Schüler müssen lernen,
- Verständnisprobleme auch dadurch zu überwinden, dass sie gegebenenfalls vom Ende der Argumentationskette den Sinn des Argumentationsschrittes erfassen und zurückverfolgen
- den Text vorzustrukturieren, indem sie sich überlegen, worin die wesentlichen Ideen des Textes bestehen, welche Voraussetzungen gemacht werden und welche Funktion diese Voraussetzungen haben
- abstrakte, (z. B. mit Variablen formulierte) fachliche Sachverhalte zu veranschaulichen und durch Wahl geeigneter Beispiele zu konkretisieren

- den eigenen Lernprozess zu kontrollieren. Das kann dadurch geschehen, dass das Verarbeitete reorganisiert wird, dass es auf selbst gestellte einfache Probleme angewendet wird, dass versucht wird, das Gelernte anderen Schülerinnen und Schülern weiter zu vermitteln etc. Individuelle Lernkontrollen, die gleichzeitig eine schriftliche Darstellung entwickeln helfen, könnten auch darin bestehen, verarbeitete mathematische Sachverhalte schriftlich wiederzugeben und von anderen Schülerinnen und Schülern mit dem vorgegebenen Originaltext vergleichen zu lassen
- zu akzeptieren, dass unverstandenes Auswendiglernen nur kurzfristig Erfolge bringen kann.

Um selbstständig mit mathematischen Texten arbeiten zu können, müssen den Schülerinnen und Schülern geeignete fachliche Informationsmöglichkeiten (z. B. Schülerduden Mathematik, Internet, etc.) vertraut und zugänglich sein. Bücher zu aktuellen Fragestellungen (z. B. zur Chaostheorie), zur „Freizeitmathematik" etc. eröffnen Differenzierungsmöglichkeiten und können zur Vorbereitung von Facharbeiten dienen.

Selbstständiges Arbeiten

Schülerinnen und Schüler müssen die Möglichkeit haben, an ihrem eigenen Erfahrungs- und Lernstand anzuschließen und dem Leitbild des aktiven und selbstständigen Arbeitens zu folgen. Deshalb muss der Mathematikunterricht ihnen Gelegenheiten eröffnen, sich des eigenen Lernens und der dabei ablaufenden Prozesse bewusst zu werden, sich darüber auszutauschen und das Lernen effektiver zu gestalten. Er soll die selbstständige Bearbeitung von komplexen Themen-, Aufgaben- und Problemstellungen anregen und einbinden in soziales und kooperatives Lernen.

Damit die Lernenden Verantwortung für das eigene Lernen übernehmen können, sind neben fachlichen Kompetenzen Methoden und Verfahren des selbstständigen und kooperativen Arbeitens und Lernens zu erwerben. Diese gilt es im Unterricht bewusst zu thematisieren und einzuüben (vgl. Kapitel 2.1, Bereich 3). Dazu gehört, dass die Schülerinnen und Schüler

- Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten erwerben bzgl. der Arbeitstechniken zur Planung und Organisation der Lernprozesse
- herausfinden, wie sie am besten Mathematik lernen, wie sie ihre Lernumgebung gestalten, mit Partnern arbeiten oder Lernhilfen benutzen
- in die Lage versetzt werden, ihr übendes und wiederholendes Lernen zielgerichtet und effizient zu gestalten und verschiedene Möglichkeiten der Selbstkontrolle zu nutzen
- Verfahren kennen lernen zur Reflexion des eigenen Lernprozesses
- in die Lage versetzt werden, mit mathematischen Nachschlagewerken sinnvoll umzugehen, ihr Lehrwerk eigenständig zu nutzen, Taschenrechner oder Computer als Werkzeug einzusetzen

- die selbstständige Nutzung fachbezogener Arbeitsmittel erlernen sowie eigene Arbeitsmittel (u. a. Unterrichtsmitschriften) für den persönlichen Gebrauch oder für andere zur Wiederholung herstellen können.

Für die Dokumentation des Lernprozesses können Unterrichtsmitschriften nützlich sein, denen man bei Bedarf Definitionen, Herleitungen oder Musterlösungen entnehmen kann. Auch andere protokollähnliche Textsorten können in besonderen Fällen bedeutsam sein. Diese sind unter dem Stichwort „Reflexion des Lernens" beschrieben. Protokolle in der Form von Verlaufs- oder Ergebnisprotokollen spielen im Mathematikunterricht keine wichtige Rolle.

Anwendungsbezogene oder historische Probleme eröffnen die Möglichkeit, Arbeitstechniken zum eigenständigen Lernen einzuüben, z. B. die Zielstellung herauszuarbeiten, Informationen zu beschaffen, verschiedene Zugangsweisen und Lösungsmethoden abzuwägen, unterschiedliche Verfahren der Visualisierung und Strukturierung, Hypothesenbildung und -überprüfung zu vergleichen, Ergebnisse sowie deren Präsentation zu überprüfen und gegebenenfalls zu korrigieren. Hierzu bieten sich u. a. Referate und Facharbeiten an.

Referat
Das Referat stellt ein individualisierendes Element in der Unterrichtsplanung und -durchführung dar. Es trägt ferner zur Vorbereitung auf die in der mündlichen Abiturprüfung geforderte Qualifikation des zusammenhängenden Vortrags einer selbstständig gelösten Aufgabe bei.

Bei der Erstellung und dem Vortrag eines Referats sollte neben den oben erwähnten Arbeitstechniken die Erstellung eines gegliederten Aufbaus sowie die Technik des Referierens erlernt und geübt werden. Hierbei ist Wert zu legen auf den Vortrag mit Hilfe einer stichpunktartigen Gliederung, auf adressatenbezogenes Sprechen, auf die verständliche Darstellung der Gedankengänge und auf korrektes Zitieren.

Im Fach Mathematik bieten sich folgende Aufgabenarten für Referate an:
- Abgrenzung eines Begriffs durch Beispiele und Gegenbeispiele
- Ausweitung eines im Unterricht besprochenen Sachverhalts
- Anwendungsbeispiel zu einer besprochenen Thematik
- Vergleich verschiedener unterrichtlicher Vorgehensweisen oder Lösungswege
- Erläuterung eines historischen Kontextes.

Facharbeit
Wissenschaftspropädeutisches Lernen zielt darauf ab, die Schülerinnen und Schüler mit den Prinzipien und Formen selbstständigen Lernens vertraut zu machen. Facharbeiten sind hierzu besonders geeignet. Jede Schülerin bzw. jeder Schüler soll im Verlauf der Schullaufbahn eine Facharbeit anfertigen.

Facharbeiten ersetzen in der Jahrgangsstufe 12 nach Festlegung durch die Schule je eine Klausur für den ganzen Kurs oder für einzelne Schülerinnen und Schüler.

Eine Facharbeit hat den Schwierigkeitsgrad einer Klausur; sie soll einen Schriftumfang von 8 bis 12 Seiten (Maschinenschrift) nicht überschreiten. Gleichartige Arbeiten gehören zum Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“.

Die methodischen Anforderungen an eine Facharbeit sind im Unterricht vorzubereiten. Unter Umständen ist es zweckmäßig, wenn diese Aufgabe nach Absprache in der Schule vom Fach Deutsch übernommen wird.

In Facharbeiten können die am Ende von Kapitel 2.3 dargelegten obligatorischen Aspekte des Mathematiklernens sehr gut eingeübt werden. Bei dieser wissenschaftspropädeutischen Arbeit bietet sich die Gelegenheit, Kompetenzen zu erwerben, die auf Studium und berufliche Ausbildung vorbereiten und über das rein Fachliche hinausgehen.

Die Themenfindung zu Facharbeiten kann sich an den zentralen Ideen orientieren. Denkbar wären beispielsweise:

- Räumliches Strukturieren: Geometrische Bedeutung eines algebraischen Problems
- Funktionaler Zusammenhang: Darstellung eines speziellen funktionalen Zusammenhangs in einem Anwendungsbereich
- Wahrscheinlichkeit: Untersuchung einer aktuellen Hochrechnung
- Algorithmus: Beispiele für Algorithmen, die zu Fraktalen führen
- Mathematisches Modellieren: Darstellung eines Modells zur Beschreibung eines naturwissenschaftlichen oder sozialwissenschaftlichen Zusammenhangs.

In der folgenden Aufstellung wird der Versuch einer Typisierung geeigneter Themenfelder gemacht. Es werden jeweils mögliche Themen stichwortartig benannt.

- Erarbeitung eines neuen Stoffgebietes (Komplexe Zahlen)
- Zusammenfassender Rückblick auf bekannte Unterrichtsinhalte (Besondere Eigenschaften der reellen Zahlen)
- Beschreibung von Methoden und Verfahren, die aus Zeitgründen im Unterricht keinen Platz hatten (spezielle Grenzwertbetrachtungen)
- Ein anschauliches Stoffgebiet mit in die Tiefe gehender mathematischer Struktur (Sierpinski-Dreieck/-Tetraeder, platonische Körper, Kristallformen)
- Beschreibung eines historischen Rechen- oder Messgeräts (Funktionsweise eines Planimeters, eines Rechenstabs, Ellipsenzirkel)
- Ein Mathematiker und seine Arbeit (Leibniz, Pascal, Russell'sche Antinomie)
- Experimenteller Einsatz des Computers
- Fachübergreifende Thematik (Auswertung eines naturwissenschaftlichen Experiments, Skisprungschanze, der FIFA-Fußball, Mathematisierung von Bewegungsabläufen beim Sport).

Reflexion des Lernens

Im Mathematikunterricht sind spezielle Lernarrangements zu verstärken, die dem Bewusstwerden, dem Nachdenken, der Anregung und dem Austausch von Lernerfahrungen dienen. So können Schülerinnen und Schüler zum eigenständigen Lernen in Mathematik befähigt werden. Wie das geschehen kann, dazu werden im Folgenden Anregungen gegeben.

Ein wichtiger Aspekt für den Mathematikunterricht ist, dass die Lernenden nicht mit „fertiger" Mathematik konfrontiert werden. Dazu kann beitragen, dass Lehrende und Lernende laut denken. Äußerungen dürfen sich auch auf

- das Wissen über die eigene Person (z. B.: Ich habe einen Fehler gemacht, weil mich Folgendes stört …; ich habe dies nicht gekonnt, weil ich über folgendes Vorwissen nicht verfüge …)
- das Wissen über die Aufgabenstellung (z. B.: Ich verstehe diese Aufgabe nicht, weil …; insbesondere ist bei dieser Aufgabenstellung darauf zu achten, dass …)
- das Strategiewissen (z. B.: ich löse diese Aufgabe so, weil …; sie ist aber auch in der folgenden Form zu lösen …; ich gehe bei dem Beweis so vor, weil …)
- die Steuerung des Lernprozesses (z. B.: Ich bin bei der Aufgabe nicht zum Ziel gelangt, weil …; ich habe den Beweis nicht nachvollziehen können, weil …)

beziehen. Auf diese Weise können Vorgehensweisen reflektiert und Strategien zum Wissenserwerb entwickelt werden.

Am Ende einer Lerneinheit hilft ein Arbeitsrückblick, sich über das eigene Lernen bewusst zu werden und über die erlernten Inhalte sowie über die angewandten Strategien zu reflektieren. Dies bietet eine Basis für einen Austausch über den Lernprozess und einen späteren Rückgriff auf die Lernerfahrungen. Der Arbeitsrückblick muss gesteuert und systematisch erlernt werden. Angeregt wird er durch spezielle Leitfragen der Lehrerin oder des Lehrers, z. B.: Was hast du Neues gelernt? Notiere es stichpunktartig! Welches Vorwissen musstest du aktivieren? Wo hattest du Schwierigkeiten, warum? Welche Fehler hast du gemacht? Wie bist du mit deinen Schwierigkeiten umgegangen?

Werden Arbeitsrückblicke in einem Lernjournal oder einem Lerntagebuch festgehalten, kann die Schülerin oder der Schüler über eine längere Zeitspanne den eigenen Lernprozess verfolgen. Für die Lehrerin oder den Lehrer besteht die Möglichkeit das Lernen intensiv zu begleiten, da Einblicke gewonnen werden können in Vorgehensweisen und Lernmethoden und nicht nur festgestellt wird, ob ein bestimmter Sachverhalt gelernt worden ist.

Arbeitsrückblicke werden erleichtert, wenn die Lernenden bereits bei ihren Aufzeichnungen im Heft und beim Lösen von Aufgaben das eigene kognitive Handeln kommentieren. So können Erfahrungen, Probleme und Fragen über Strategien und Aufgabentypen schriftlich festgehalten werden, z. B.: Ich weiß, dass mein Ergebnis falsch ist, weil es im Widerspruch steht zu der Annahme; ich muss einen Rechenfehler gemacht haben, da überschlagsmäßig in etwa folgendes Ergebnis zu erwarten wäre.

Die Aufforderung Gefühle auszusprechen (z. B.: Ich hatte ein Aha-Erlebnis, weil …; mich hat gestört, dass …) ermöglicht, Gespräche zu führen über die Verantwortlichkeit für das eigene Lernen und das kooperative Arbeiten im Kurs.

Beim reziproken Lehren übernehmen die Schülerinnen und Schüler abwechselnd die Rolle der Lehrperson. Dies kann u. a. dadurch geschehen, dass sie Gelegenheit erhalten ihren Mitschülerinnen und Mitschülern das zu erklären, was sie vorher gelernt haben. Dadurch sind sie aufgefordert einen Sachverhalt so zu beschreiben, dass andere ihn verstehen. Dies bedeutet, sie müssen ihn selbst sorgfältiger durchdenken und werden so auf Sprünge in der Argumentationskette aufmerksam. Die Schülerinnen und Schüler erfahren im gegenseitigen Austausch, wie andere den Unterrichtsgegenstand sehen. So erhalten sie zur Angemessenheit bzw. zur Nichtangemessenheit der eigenen Sichtweise oder des Lösungsweges wichtige Rückmeldungen.

Eine spezielle Form des reziproken Lehrens ergibt sich, wenn man zwei Gruppenarbeitsphasen in der folgenden Form miteinander verknüpft. In der ersten Phase erhalten mehrere Gruppen je einen Teil einer umfassenden Aufgabe. Sie lösen den ihnen gestellten Arbeitsauftrag kooperativ, dokumentieren ihre Ergebnisse und besprechen die Weitergabe des von ihnen erarbeiteten Wissens. Für die darauf folgende Phase werden die Gruppen neu gebildet. Sie setzen sich nun aus je einem Vertreter jeder ersten Gruppe zusammen. Hier übernimmt nun jeder für die Ergebnisse seiner ersten Gruppe die Verantwortung, da er allen neuen Gruppenmitgliedern diese darstellen, erklären und präsentieren muss. So erfährt jeder, ob seine Arbeit erfolgreich war.

Üben und Wiederholen/Vernetzen von Wissen

Erfolgreicher Mathematikunterricht setzt eine aktive Aneignung der im Unterricht entwickelten mathematischen Inhalte durch die Schülerinnen und Schüler voraus. Aktiver Erwerb mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten beschränkt sich nicht nur auf die erste Erarbeitung neuer Inhalte, sondern auch

- auf das Einüben von Routinen, um die nachfolgende mathematische Arbeit zu entlasten
- auf die individuelle Vernetzung neuer Inhalte mit den vorhandenen Vorkenntnissen und Erfahrungen
- auf die Fähigkeit, mathematische Konzepte und Sachverhalte anzuwenden und zu übertragen
- auf die Entwicklung heuristischer Fähigkeiten beim Problemlösen.

Zu diesen fachlichen Gesichtspunkten treten über das Fach hinausweisende Ziele, die sowohl im Fach als auch in der Zusammenarbeit mehrerer Fächer realisiert werden müssen (z. B. Erwerb von Schlüsselqualifikationen).

Es ist nicht damit getan, wichtige fachliche Inhalte in einem von der Lehrperson angeleiteten, optimal geplanten Prozess einüben zu lassen. Darüber hinaus müssen Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, ihre individuellen Übungsverfahren zu optimieren, um sich auf diese Weise auf lebenslanges Lernen vorzubereiten. Das kann nur gelingen, wenn sie im Üben subjektiv einen Sinn erkennen und lernen, sich selbst zu motivieren. Lehrerinnen und Lehrer müssen eine solche Entwicklung fördern durch die Organisation der Zusammenarbeit, durch Bereitstellung geeigneten Übungsmaterials, durch das Bewusstmachen eines sinnvollen kritischen Abstandes zu den eigenen Ergebnissen und die Anleitung zu geeigneten, individuellen Lernkontrollen.

In der Mathematik erschließen sich anspruchsvolle fachliche Begriffe für die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler erst in Anwendungen unterschiedlicher Komplexität. Dabei ist neben weiteren methodischen Prinzipien insbesondere das Prinzip der Isolation der Schwierigkeiten von Bedeutung.

Mathematik kann als eine universelle Anwendungswissenschaft viele außermathematische Situationen durch fachliche Strukturen beschreiben. Modellierungen und Anwendungen sind deshalb ein Teil der Übungen im Mathematikunterricht.

Auch in Zukunft werden Schülerinnen und Schüler bestimmte Routinen beherrschen müssen. Mit zunehmender Präsenz immer mächtigerer und bedienungsfreundlicherer Programme ist aber zu fragen, welche und wie intensiv sie im Unterricht behandelt werden müssen. Auch Verfahren, die als automatisiertes Werkzeug im Rechner verfügbar sind, können von Schülerinnen und Schüler nur dann erfolgreich eingesetzt werden, wenn gesicherte Vorstellungen über deren Funktion entwickelt werden, wenn ein prinzipielles Vertrautsein mit dem mathematischen Hintergrund erreicht wird und wenn aktive Erfahrungen in vielen Anwendungssituationen vorliegen.

Um mathematisches Wissen in unterschiedlichsten Situationen verfügbar zu machen, müssen Schülerinnen und Schüler dieses Wissen aktiv in ihren individuellen Wissensbestand einpassen und innermathematisch möglichst aspektreich vernetzen. So wird fachliches Wissen als Grundlage für ein vertieftes fachliches Verständnis akkumuliert. Üben und Wiederholen müssen diesem Aspekt Rechnung tragen.

Grundsätze zum Computereinsatz

Computer, leistungsfähige Graphik-Taschenrechner und Computeralgebra-Taschenrechner sind gebräuchliche mathematische Werkzeuge geworden und sollten auch zu Werkzeugen des Mathematikunterrichts werden.

Computergestützter Unterricht erfordert in besonderem Maße die Tätigkeit und Qualifikation der Lehrerinnen und Lehrer. Dabei wandelt sich deren Rolle, ein fragend-entwickelnder lehrerzentrierter Unterrichtsstil ist bei Computereinsatz kaum noch möglich. Individuelle Beratung, Einzelarbeits- und Gruppenarbeitsphasen und Phasen zentralen Unterrichts mit der ganzen Klasse wechseln sich ab, projektmäßiges Arbeiten erhält als Arbeitsform größere Bedeutung. Die Lehrerinnen und Lehrer werden verstärkt zu Moderatoren und Beratern, sie müssen auf ganz unterschiedliche Lernprozesse eingehen und dabei immer wieder für eine gemeinsame

Basis sorgen. Auch wird es immer wieder vorkommen, dass Schülerinnen und Schüler als Experten eingesetzt werden oder dass sie sich mit Lehrerinnen und Lehrern in einer gemeinsamen Experimentierphase befinden.

Der Computer ist ein geeignetes Werkzeug zur Visualisierung, er ermöglicht experimentelles Arbeiten und wirklichkeitsnähere Aufgabenstellungen. Er entlastet von langwierigen und komplizierten Rechnungen und dem Drill von Verfahren. Bisher klassische Themen werden an Bedeutung verlieren; Modellbilden, das Herstellen von Bezügen und Finden von Zusammenhängen und die Reflexion des eigenen mathematischen Tuns können mehr Gewicht bekommen. Bei längeren Computer-Arbeitsphasen ist eine zusammenfassende Rückschau sinnvoll. Dem sprachlichen Formulieren mathematischer Sachverhalte kommt somit durch sinnvollen Computereinsatz wieder stärkere Bedeutung zu.

Der Einsatz von Computern bewirkt entgegen populären Fehlvorstellungen keine „Mathematik auf Knopfdruck“, bei der man nichts mehr wissen muss, aber trotzdem alle Probleme lösen kann. Schließlich gibt es durch Textverarbeitungsprogramme ja auch keine „Literatur auf Knopfdruck“! Ohne solide fachliche Kenntnisse können Schülerinnen und Schüler den Computer nicht sinnvoll einsetzen.

Der numerische Taschenrechner hat Operationen wie Dividieren, Wurzelziehen, Logarithmieren zu unmittelbar verfügbaren Operationen gemacht. Später haben graphikfähige Taschenrechner bzw. Funktionenplotter das Zeichnen von Funktionsgraphen unmittelbar ermöglicht. Jetzt werden durch Computeralgebra-Systeme und -Taschenrechner Operationen wie Lösen von Gleichungen, Differenzieren, Integrieren, Invertieren von Matrizen unmittelbar ausführbar. Der numerische Taschenrechner konnte Schwächen in der Arithmetik kompensieren, falsch eingesetzt konnte er sie aber auch verstärken oder gar erzeugen. Die Computeralgebra-Systeme und -Taschenrechner können – sinnvoll eingesetzt – Schwächen in der Algebra und der Analysis überbrücken. Schülerinnen und Schüler werden dadurch unterstützt und von komplizierten und zeitaufwendigen Routinen entlastet.

Es ist nicht sinnvoll, neue Inhalte und Methoden für den Computereinsatz zu entwickeln und bei der Leistungsüberprüfung alles beim Alten zu lassen. Auch in Klausuren und im Abitur sollten Schülerinnen und Schüler Computer als Werkzeuge einsetzen bzw. Aufgaben zu deren Einsatz bearbeiten (siehe auch Kapitel 4.2 und 5.3). Derzeit ist es eher die Ausnahme, dass in Klausuren jede Kursteilnehmerin bzw. jeder Kursteilnehmer einen Computerarbeitsplatz zur Verfügung hat. Notfalls kann man die Aufgabenstellung der Klausur teilen und zunächst die Hälfte des Kurses am Computer arbeiten und dann die Arbeitsplätze und Aufgabenstellungen wechseln lassen. Um Wege für die weitere Entwicklung eines didaktischen Konzepts offen zu halten, wird auf eine dezidiertere Festschreibung von Inhalten und Methoden an dieser Stelle verzichtet. Es soll aber betont werden, dass der Computer als neues Werkzeug eingesetzt werden soll und sich sein Einsatz insbesondere da rechtfertigt, wo er neue Inhalte und Methoden ermöglicht. Neben den Möglichkeiten zur Veranschaulichung und arithmetischen bzw. algebraischen Entlastung können auch algorithmische Fragestellungen bearbeitet werden (z. B. mit Tabellenkalkulationen oder Computeralgebra-Systemen), ohne dass deswegen ein Programmierkurs absolviert werden muss.

3.2.3 Fachübergreifende, fächerverbindende und projektorientierte Lern- und Arbeitsorganisation

Fachübergreifender Unterricht findet zunächst im Fach selbst statt; er besteht aus dem „Blick über den Tellerrand“ in Gestalt von Exkursen oder der Reflexion der fachlichen Fragestellung und ihrer Plausibilität und Grenzen.

Fächerverbindender Unterricht besteht in der themen- oder problembezogenen Kooperation zweier oder mehrerer Fächer, wenn es gilt, „quer liegende“ Themenstellungen unter verschiedenen Fachperspektiven und -kategorien zu betrachten und dabei mehr als nur die Summe von Teilen zu erkennen. Fächerverbindender Unterricht ist organisatorisch und planerisch aufwendig. Er kann in den Schwerpunkten eines Schulprofils entwickelt werden. Da die Schülerinnen und Schüler in der gymnasialen Oberstufe an **einer** übergreifenden Veranstaltung teilnehmen sollen, müssen die Schulen, sofern sie keine Schulprofile (Fächerkopplungen) aufweisen, entsprechend langfristig planen.

Projektorientierter Unterricht ist anwendungsbezogen, kurzphasig, kompakt, produktorientiert. Er muss in der Themenstellung erkennbar „besonders“ und machbar sein. Er kann im Fach selbst oder fächerverbindend stattfinden.

Fächerverbindender Projektunterricht findet in **übergreifenden Projektveranstaltungen** statt. Diese Veranstaltungsform soll den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geben, erlernte Arbeitsmethoden aus unterschiedlichen Fachbereichen selbstständig auf ein komplexes Problem zu beziehen und ein Problem aus der Perspektive mehrerer Fächer zu sehen. Projektveranstaltungen bieten auch die Gelegenheit zur Teamarbeit. Diese Veranstaltungen sind unter bestimmten vorher festgelegten Leitfragen langfristig aus dem Fachunterricht heraus zu entwickeln. Die von den Schülerinnen und Schülern erbrachten Leistungen werden im Rahmen der „Sonstigen Mitarbeit“ beurteilt. Da solche Projektveranstaltungen stufenspezifische Ziele verfolgen, sind sie im Hinblick auf die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in der Regel auf eine Jahrgangsstufe oder auf die gymnasiale Oberstufe zu beschränken.

Das Fach Mathematik kann beispielsweise mit folgenden Themen Anregungen für fachübergreifenden, fächerverbindenden und projektorientierten Unterricht geben:

Mathematik	Physik, Technik
Thema: Brücken	
Klasse 11	Koordinatengeometrie: Kreise, Parabeln, Tangenten, Lineare Gleichungssysteme

Ausgehend von der Frage, wie zwei Geländepunkte durch eine Straße geradlinig verbunden werden können, stellt sich das Problem, diese Punkte auch dann zu verbinden, wenn dafür Brücken gebaut werden müssen. Unterschiedliche Distanzen und unterschiedliche Materialien erfordern geeignete Konstruktionsformen. Hier bietet es sich an, in der Umgebung und in der Literatur nach verschiedenen Brückenformen zu suchen. Dabei treten insbesondere Kreisbögen und Parabelbögen auf. In diesem Zusammenhang entstehen Tangentenprobleme, die mathematisch an dieser Stelle bei Kreisen und Parabeln noch elementar gelöst werden können und die spätere infinitesimale Behandlung vorbereiten. Bei Bestimmung von Parabelvorschriften zu gegebenen Konstruktionszeichnungen oder aus geeigneten Fotografien müssen einfache lineare Gleichungssysteme gelöst werden.

Mathematik	Physik, Technik
Thema: Sammelspiegel	
Klasse 11	Geradengleichung, quadratische Funktionen, Tangente und Normale, Einfalls-/Ausfallswinkel

Sammelspiegel tauchen vielfach in alltäglichen Zusammenhängen auf, z. B. bei Parabolantennen, Autoscheinwerfern, Solarkochern. Ausgehend von der Frage, warum die „Satellitenschüsseln" alle eine besondere Form haben, wird die Brennpunkteigenschaft quadratischer Parabeln untersucht. Andere nahe liegende Sammelspiegel wie Kugelspiegel oder Trichter haben diese Eigenschaft nicht. Dies können die Schülerinnen und Schüler mittels Zeichnungen oder Computersimulation entdecken.

Mit Hilfe von Spiegelfolie kann ein Solarkocher konstruiert und gefertigt werden.

Hinweis: Computereinsatz möglich

Mathematik	Physik, Technik
Thema: Fahrrad – Rollwiderstand	
JgSt. 11	Ausgleichsgerade

Man lässt ein Fahrrad auf ebener Bahn (Windstille) langsam ausrollen und misst den Zeit-Weg- bzw. den Zeit-Geschwindigkeitsverlauf. Dazu stellt man Messposten mit synchronisierten Uhren längs der Ausrollstrecke auf. Die Geschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit ab. Das Rad wird durch die konstante Rollwiderstandskraft gebremst. Man kann den Einfluss der Bereifung, des Newton'schen Luftdrucks und verschiedener Typen von Dynamos über die Steigung der t-v-Ausgleichsgeraden studieren. Bei Verwendung des Newton'schen Luftdrucks werden die wirksamen Bremskräfte quantitativ erfasst.

Hinweis: Einsatz von Tabellenkalkulation oder Computeralgebra-System (CAS) sinnvoll

Mathematik	Technik, Sozialwissenschaften
Thema: Verkehrsfluss und Geschwindigkeit	
GK 12 bzw. LK 12	Anwendungen der Differentialrechnung: Gebrochenrationale Funktionen, Extremwertprobleme; Modellbildung, Simulation
Ausgangspunkt ist die Fragestellung „Entstehen Staus durch Langsamfahren?“. In Abhängigkeit von der Geschwindigkeit werden mathematische Modelle für Verkehrsfluss/Staubildung entwickelt und in Simulationen berechnet. Die Ergebnisse werden dann mit empirischen Untersuchungen verglichen. Dabei zeigt sich, dass der Sicherheitsabstand eine entscheidende Rolle spielt. Der optimale Verkehrsfluss tritt nicht bei maximaler Geschwindigkeit ein, sondern hängt von den verwendeten Abstandsregeln ab. Die Ermittlung dieses optimalen Vekehrsflusses erweist sich als Extremwertproblem.	
Hinweis: Computereinsatz sinnvoll	

Mathematik	Erdkunde, Technik, Sozialwissenschaften, Physik
Thema: Trassierungen	
GK 12/13 bzw. LK 12/13	Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Krümmung, Krümmungsradius, lineare Gleichungssysteme, Interpolation, Berechnung eingeschlossener Flächen
Veränderungen und Neubau von Straßen und Schienenwegen können überall beobachtet werden. Die Anbindung an bereits bestehende Verkehrswege muss verkehrsgerecht erfolgen. Modelliert werden kann dieses Problem durch Kreisfunktionen und stückweise definierte ganzrationale Funktionen, die an den Übergangsstellen bis zur zweiten Ableitung übereinstimmen. In der Praxis führt die Bearbeitung auf umfangreichere lineare Gleichungssysteme. Zur Bearbeitung gehört auch eine Modellkritik, die gegebenenfalls in eine Umformulierung der Aufgabenstellung und eine modifizierte Lösung münden kann. Das Thema hat Beziehungen zu technischen Fragestellungen (Tunnelbau) und zu Umweltfragen. Bei einer zunächst ebenen Behandlung liegt auch eine Verallgemeinerung auf räumliche Kurven und eine Verknüpfung mit der analytischen Geometrie nahe.	
Hinweis: Computereinsatz sinnvoll, reichhaltige Unterrichtsmaterialien verfügbar	

Mathematik	Erdkunde, Sozialwissenschaften
Thema: Talsperren	
GK 12 bzw. LK 12	Herleitung des Integralbegriffes über Änderungseffekte, Anwendung der Integralrechnung, Modellbildung und Simulation
Ausgangspunkt ist die Frage, wie der Beckeninhalt einer Talsperre gesteuert werden muss, um einerseits in Zeiten anhaltender Trockenheit genügend Wasser abgeben zu können und andererseits bei Hochwasser genügend Stauraum zu besitzen. Speziell bei der Planung von Rückhaltebecken ergibt sich die Notwendigkeit zur numerischen Integration. Dazu ist es notwendig, über längere Zeit bei den in Frage kommenden Bächen den Durchfluss zu beobachten. Der Rückgriff auf existierende Daten oder eine geeignete Simulation bietet sich an.	

Mathematik	Sozialwissenschaften
Thema: Input-Output-Betrachtungen	
GK 12 bzw. LK 12	lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Matrizenmultiplikation, Graphen, Modellbildung
Bei der Produktionsplanung eines Unternehmens ist eine zentrale betriebswirtschaftliche Frage die nach dem für einen vorgegebenen Output an Produkten erforderlichen Input an Rohstoffen. Die betriebswirtschaftlichen Verflechtungen lassen sich durch Matrizen beschreiben. Meist muss berücksichtigt werden, dass es bei der Produktion mehrere Zwischenprodukte gibt. Die Zusammenfassung der Verflechtungen zu einer einzigen Verflechtungsmatrix führt zur Matrizenmultiplikation. Die Einbeziehung der externen Nachfrage sowohl der Zwischenprodukte als auch der verschiedenen Endprodukte stellt die Frage nach welcher Stückliste produziert werden soll. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die externe Nachfrage einen internen Bedarf zur Folge hat, da die einzelnen Produktionsbereiche durch gegenseitige Lieferungen miteinander verflochten sind. Eine Input-Output-Analyse bietet sich an.	

Mathematik	Musik
Thema: Tongeschlechter Dur und Moll	
GK 12/13 bzw. LK 12/13	Binomialverteilung, Hypothesentest
Man nimmt gleich viele Musikstücke (Tonleitern, Akkorde) in Dur und in Moll auf eine MD auf und lässt z. B. vier Titel durch Zufallsauswahl vorspielen. Die Versuchsteilnehmer kreuzen jeweils das vermutete Tongeschlecht an. Vor Versuchsauswertung bestimmt man in einer Phase mathematischen Modellierens Wahrscheinlichkeitsverteilungen - für die Anzahl der vorgespielten Dur-Stücke - für die Anzahl der Treffer einer Versuchsperson, die die Tongeschlechter nicht/mit Wahrscheinlichkeit 60%/90%/100% erkennt Wie sehen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus, wenn der Versuchsleiter den Versuch mit Wissen der Probanden so durchführt, dass genau zwei der vier Stücke in Dur gesetzt sein werden? In einer zweiten Phase des Bewertens vergleicht man die theoretischen Modelle mit den tatsächlich erreichten relativen Häufigkeitsverteilungen (u. a. auch Vergleich des Mittelwertes der Häufigkeitsverteilung mit den Erwartungswerten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen). Liegt die Trefferquote der Lerngruppe signifikant über der Quote 0,5 eines tauben Zuhörers? Weitere Fragestellungen bieten sich an: Hängt die Trefferquote von der Tonhöhe ab? Sind die Trefferquoten bei Dur und Moll gleich hoch?	

Mathematik	Kunst, Chemie, Philosophie, Geschichte
Thema: Platonische und archimedische Körper	
GK 13 bzw. LK 12/13	Lineare Algebra und Geometrie. Schnitte von Ebenen, Winkel, Drehsymmetrie
Platonische und archimedische Körper als regelmäßige bzw. halbregelmäßige konvexe Polyeder sind schon in der Antike untersucht worden. Sie tauchen in der Natur beispielsweise als Grundformen von Kristallen und Molekülen auf. Geistesgeschichtlich haben die platonischen Körper seit Pythagoras und Platon bis hin zu Kepler große Bedeutung gehabt. Frühe Weltbilder bauten auf ihnen auf und vermutlich wurde die Irrationalität am Pentagondodekaeder entdeckt. Sie können sowohl aufbauend aus regelmäßigen Vielecken konstruiert werden als auch durch geeignete Ebenenschnitte. Bei der Untersuchung, welche Körper bei Verbindung der Mittelpunkte der Seitenflächen entstehen, können Dualitätsuntersuchungen angestellt werden. Bei der Frage, mit welchen Körpern der Raum gefüllt werden kann, treten Winkelberechnungen auf. Die Untersuchung der Symmetrieeigenschaften ist eine Anwendung der Drehungen. Für diese Körper lassen sich Modelle basteln, sowohl aus Flächen als auch aus Kanten aufbauend. Sie eignen sich hervorragend zur Betrachtung in Computersimulationen.	
Hinweis: Computereinsatz möglich	

Mathematik	Pädagogik, Psychologie
Thema: Selbstkonzept und Schulleistung	
GK 12/13 bzw. LK 12/13	Unabhängigkeitstest, Korrelation, Normalverteilung
Mit einem Fragebogen quantifiziert man das „Selbstwertgefühl“ von Schülerinnen und Schülern als Summe von numerischen Skalenwerten verschiedener Items, deren Werte von 0 (trifft nicht zu) bis 6 (trifft genau zu) reichen. Beispiel: - Ich habe ein gutes Gefühl, was meine Arbeit angeht 0–1–2–3–4–5–6 - Ich bin zufrieden mit meiner Fähigkeit, vor der Klasse zu sprechen 0–1–2–3–4–5–6 Hypothese 1: Selbstkonzept und Schulleistung sind unabhängig voneinander: „Ich bin in der Schule zwar nicht so gut, habe dafür aber meine Stärken woanders.“ Hypothese 2 Selbstkonzept und Schulleistung beeinflussen sich gegenseitig. Man untersucht die Unabhängigkeit beider Variablen mit Unabhängigkeitstest oder Korrelationsanalyse. Ebenso spannend kann eine Untersuchung der Regression zwischen Schulnoten der Grundschule und Noten des letzten Zeugnisses sein. Standard-Tests zur Selbstkonzeption erhält man auch bei psychologischen Instituten.	

Mathematik	Biologie, Informatik
Thema: Iterierte Funktionensysteme	
LK 13	Anwendungen der Linearen Algebra: Abbildungsmatrizen
Nur mit einfachen Abbildungen in der Ebene wie Drehung, Streckung und Verschiebung lassen sich durch fortgesetzte Hintereinanderausführung zahlreiche Fraktale erzeugen. Diesen Vorgang kann man als simultan arbeitende „Mehrfach-Verkleinerungs-Kopier-Maschine“ deuten. In der Regel reichen 4 oder 5 solcher Abbildungen und damit 24 oder 30 Zahlenwerte, um Figuren wie die Schneeflockenkurve oder das Sierpinski-Dreieck zu zeichnen oder das Wachstum von Gräsern und Farnen zu simulieren! Es ist eine faszinierende Erfahrung, dass das „Grenzbild“ (hier nur im Rahmen der Bildschirmauflösung) nicht von der Ausgangsfigur, sondern nur von den gewählten Abbildungen abhängt. Dabei kann in experimenteller Weise schön studiert werden, wie die Veränderung von Parametern in den Abbildungen zu verschiedenen Grenzfiguren führt. Der Einsatz entsprechender Software ist dringend anzuraten, gegebenenfalls kann die Erstellung solcher Software auch in einem gemeinsamen Projekt von einem Informatik-Kurs in Angriff genommen werden.	
Hinweis: Computereinsatz sinnvoll	

Mathematik	Kunst, Technik, Psychologie
Thema: Perspektive	
GK 13 bzw. LK 13	Anwendungen der Linearen Algebra: Projektionsmatrizen, Basis, Bildraum, Kern
Es ist ein altes und doch sehr aktuelles Problem, dreidimensionale Gebilde in der Ebene darzustellen, sei es auf dem Papier oder auf dem Bildschirm. Neben dem einäugigen Sehen der Zentralperspektive, wie es in der Kunst mehr üblich ist, haben sich in Mathematik und Technik mehr Verfahren der Parallelperspektive durchgesetzt. Hier gibt es schräge Parallelperspektiven wie Kavalierperspektive oder Militärperspektive und senkrechte Parallelperspektiven wie Grundriss-Aufriss-Seitriss oder Dimetrie oder Isometrie. Die Modellierung mit entsprechenden Projektionsmatrizen führt auf Fragen der Bildebene (Bildraum) und der Projektionsrichtung (Kern) und implizit auf einfache Dimensionsüberlegungen. Mit Computerunterstüzung kann man die Perspektive dann auf Knopfdruck wechseln und auch mit Abbildungen wie Drehung oder Spiegelung verbinden. Das einäugige Sehen der Zentralperspektive kann noch durch zweifaches einäugiges Sehen zu den Rot-Grün-Stereogrammen und damit räumlichem Sehen erweitert werden. Von besonderem Reiz sind auch die bewussten Manipulationen der Perspektive, die zu „unmöglichen Figuren“ (Escher-Grafiken) führen.	
Hinweis: Computereinsatz möglich	

Mathematik	Sozialwissenschaften, Geschichte, Informatik
Thema: Wahlen – Prognosen, Auswertungen, Wahlrecht	
GK 13 bzw. LK 13	Modellbildung, Anwendung der Statistik
Regelmäßig gibt es Wahlen, zum Bundestag, zum Landtag, zum Bürgermeister usw. Vor den Wahlen gibt es in den Medien Prognosen, am Abend Hochrechnungen und schließlich eine Sitzverteilung in den Parlamenten. Dies ist mit viel (versteckter) Mathematik verbunden und gibt viele Anregungen für fächerverbindendes Arbeiten: Nach welchen Grundsätzen werden Wahlen geregelt? Was hätte ein anderes Wahlverfahren für Auswirkungen (Mehrheitswahl, Verhältniswahl, Zuschnitt von Wahlkreisen)? Welche Sitzverteilungsverfahren gibt es (z. B. d'Hondt, Hare/Niemeyer), welche Eigenschaften haben sie? Wie werden Wahlprognosen und Wahlhochrechnungen erstellt?	
Hinweis: Computereinsatz sinnvoll	

3.2.4 Besondere Lern- und Arbeitsformen

Mit der besonderen Lernleistung sollen herausgehobene Leistungen, die Schülerinnen und Schüler zusätzlich erbracht haben, im Rahmen der für die Abiturprüfung vorgesehenen Punktzahlen auch zusätzlich honoriert werden. Es muss sich um eine herausragende Leistung handeln. Dies hat auch in Art und Umfang der Darstellung bzw. der Dokumentation seinen Niederschlag zu finden. Die Kultusministerkonferenz hat als äußerliche Anhaltspunkte für die Wertigkeit den Rahmen bzw. den Umfang eines mindestens zweisemestrigen Kurses – dieses entspricht dem Äquivalent von maximal 60 Punkten – genannt.

Besondere Lernleistung kann z. B. sein: Ein umfassender Beitrag aus einem von den Ländern geförderten Wettbewerb, es kann das Ergebnis eines über mindestens ein Jahr laufenden fachlichen oder fachübergreifenden Projektes sein. Es kann sich auch um eine größere Arbeit handeln, die sich aus dem Fachunterricht ergeben hat. Die besondere Lernleistung muss in Qualität und Umfang eine Facharbeit deutlich überschreiten. Sie soll außer- und innerschulische Möglichkeiten außerhalb der Unterrichtsvorhaben erschließen, etwa in Feldarbeit und Experiment, in der Arbeit in Archiven, Bibliotheken oder im Internet. Das Vorhaben soll eine klare Aufgabenstellung und eine nachvollziehbare Ausführungsebene haben (z. B. Produkt, Recherche, Versuch, Auswertung bzw. Reflexion).

Besondere Lernleistungen im Fach Mathematik können sich ergeben aus
- der erfolgreichen Teilnahme am Bundeswettbewerb oder an der Mathematikolympiade
- einem mathematischen Thema beim Wettbewerb „Jugend forscht"
- einer Software-Entwicklung für Teilbereiche der Mathematik

- der Anwendung mathematischer Methoden im Rahmen z. B. der Astronomie
- mathematischen Modellierungen/Simulationen von Zusammenhängen (Probleme im lokalen Umfeld, z. B. Verkehrsprobleme)

(vgl. auch Kap. 5.5).

3.3 Grund- und Leistungskurse

Grund- und Leistungskurse tragen gemeinsam dazu bei, das Ziel der Studierfähigkeit zu erreichen.

Grundkurse repräsentieren das Lernniveau der gymnasialen Oberstufe unter dem Aspekt einer grundlegenden wissenschaftspropädeutischen Ausbildung.

Sie sollen
- in grundlegende Fragestellungen, Sachverhalte, Problemkomplexe, Strukturen und Darstellungsformen eines Faches einführen
- wesentliche Arbeitsmethoden des Faches vermitteln, bewusst und erfahrbar machen
- Zusammenhänge im Fach und über dessen Grenzen hinaus in exemplarischer Form erkennbar werden lassen.

Leistungskurse repräsentieren das Lernniveau der gymnasialen Oberstufe unter dem Aspekt einer exemplarisch vertieften wissenschaftspropädeutischen Ausbildung.

Sie sind gerichtet
- auf eine systematische Beschäftigung mit wesentlichen, die Komplexität und den Aspektreichtum des Faches verdeutlichenden Inhalten, Theorien und Modellen
- auf eine vertiefte Beherrschung der fachlichen Arbeitsmittel und -methoden, ihre selbstständige Anwendung und theoretische Reflexion
- auf eine reflektierte Standortbestimmung des Faches im Rahmen einer breit angelegten Allgemeinbildung und im fachübergreifenden Zusammenhang.

Beide Kursarten basieren unverzichtbar auf dem Grundkursunterricht der Jahrgangsstufe 11.

Grundkurse

Im Unterricht der Grundkurse im Fach Mathematik muss berücksichtigt werden, dass hier viele Schülerinnen und Schüler vertreten sind, deren Interessen und berufliche Perspektiven nicht an mathematischen oder naturwissenschaftlichen Schwerpunkten orientiert sind. Ihnen muss im Rahmen der bis 13/II verpflichtenden Grundkurse ermöglicht werden, grundlegende mathematische Begriffe, Denk- und Arbeitsweisen kennen zu lernen und deren Anwendbarkeit und Tragweite zu erfahren, zumal auch in geistes- und sozialwissenschaftlichen, medizinischen und erst recht in wirtschaftswissenschaftlichen Bereichen mathematische Methoden benutzt werden. Die Grundkurse Mathematik sollten hierzu Grundlagen und so viel Verständnis vermitteln, dass eine Einarbeitung in die jeweiligen spezielleren benötigten Kenntnisse ermöglicht wird. Dies erfordert es, didaktische Vereinfachungen vorzunehmen, ohne Begriffsbildungen inhaltlich zu verfälschen.

Da erfahrungsgemäß in den Grundkursen ein breites Spektrum unterschiedlicher Leistungsfähigkeit anzutreffen ist, sollte darauf geachtet werden, dass durch Aufgabenstellungen und Arbeitsformen insbesondere auch leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zur Entfaltung individueller mathematischer Interessen und Fähigkeiten gegeben wird.

Gerade die erheblichen Leistungsunterschiede erfordern es, dass auf die Versprachlichung von Zusammenhängen auch mit Mitteln der Alltagssprache besonderer Wert gelegt wird. Die Vermittlung des Verständnisses von Schlussweisen, Beweisideen und Plausibilitätsbetrachtungen ist wesentlich.

Wünschenswert ist es, problemorientierte Ausgangspunkte zu wählen, aus denen mathematische Modelle entwickelt werden bzw. an denen die Anwendbarkeit mathematischer Werkzeuge verdeutlicht werden kann. Dabei sollten die Zentralen Ideen der Mathematik besonders zur Geltung kommen. In überschaubaren Problemkontexten können dann auch logisch-formale Zusammenhänge der mathematischen Gegenstände zum Thema des Unterrichts werden („Lokales Ordnen"). Wo für die Arbeit im Unterricht Algorithmen und ähnliche Techniken erforderlich sind, sollten diese durchschaubar gemacht und zumindest in den Grundzügen erlernt werden, ohne sich dabei in zu große Abhängigkeit von diesen zu begeben, zumal verfügbare technische Hilfsmittel (Taschenrechner, Computer) genutzt werden können, um diese technischen Aufgaben zu übernehmen.

Leistungskurse

Der Unterricht in den Leistungskursen geht über die für den Grundkurs genannten Aspekte hinaus, die allerdings auch für Leistungskurse von Bedeutung sind. Da die Schülerinnen und Schüler ihre Wahl auf der Grundlage besonderer Neigungen und Fähigkeiten für das Fach oder aber wegen beruflicher Perspektiven getroffen haben, die angemessene Voraussetzungen für ein Studium mit einem fachmathematischen Schwerpunkt erfordern, muss im Leistungskurs die fachsystematische Orientierung stärker in den Vordergrund treten.

Der Unterricht in den Leistungskursen unterscheidet sich daher vom Unterricht in den Grundkursen insbesondere hinsichtlich der inhaltlichen Vertiefung sowie im angestrebten Argumentations- und Reflexionsniveau, zumal durch verfügbare Methoden komplexere Problemstellungen zugänglich sind.

Die Modellierung außermathematischer Probleme und die Beteiligung an fächerverbindenden Projekten vollzieht sich so auf der Basis vertiefter mathematischer Sichtweisen und stärkerer Systematisierung der mathematischen Inhalte, wobei zu enge Spezialisierungen oder gar die Vorwegnahme von dem Studium vorbehaltenen Inhalten zu vermeiden sind.

Die Erfahrung der Tragweite mathematischer Inhalte in außermathematischen Zusammenhängen stellt im Sinne der Entwicklung eines ausgewogenen Bildes von Mathematik auch im Leistungskurs einen notwendigen Aspekt des Unterrichts dar.

3.4 Sequenzbildung

Die Aufgabe der Jahrgangsstufe 11 in ihrer allgemeinen Funktion ist im Kapitel 4 der Richtlinien beschrieben.

Die Schülerinnen und Schüler belegen in der Jahrgangsstufe 11 i. d. R. durchgehend 10 bis 11 Grundkurse (30 bis 33 Wochenstunden).

Der Unterricht folgt für die Jahrgangsstufen 11 bis 13 insgesamt einem Sequenzialitätsprinzip. Dabei ergibt sich für die Jahrgangsstufe 11, dass sie die wissenschaftspropädeutische Vorbereitung für die Qualifikationsphase inhaltlich und methodisch übernehmen muss, d. h. dass gesorgt werden muss

- für eine breite fachliche Grundlegung
- für eine systematische Methodenschulung in fachlicher, fachübergreifender und kooperativer Hinsicht
- für Einblicke in die Anforderungen von Leistungskursen
- für Angebote zur Angleichung der Kenntnisse.

Die Jahrgangsstufe 11 hat für das Fach Mathematik eine Gelenkfunktion. Sie knüpft an die Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler zum Abschluss der Sekundarstufe I an. Im Verlauf des Jahres werden sie in die wissenschaftspropädeutische Arbeitsweise der gymnasialen Oberstufe eingeführt, auf die Anforderungen in der Qualifikationsphase inhaltlich und methodisch vorbereitet und mit den Formen selbstständigen Arbeitens bekannt gemacht.

Antwort auf die Frage, welche Mathematikkenntnisse von Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Jahrgangsstufe 11 erwartet werden können, geben die Lehrpläne des Landes Nordrhein-Westfalen für die Schulformen der Sekundarstufe I, deren erfolgreicher Abschluss zum Eintritt in die gymnasiale Oberstufe berechtigt. Die Kultusministerkonferenz hat in ihrem Beschluss vom 12. Mai 1995 „Standards für den mittleren Schulabschluss Mathematik“ festgelegt:

- In der Arithmetik/Algebra ist das Ziel „der sichere Umgang mit Zahlen und Größen in Anwendungssituationen, verbunden mit einer sachgerechten Interpretation von Rechenergebnissen und Abschätzungen”, und es soll “ein Verständnis des Funktionsbegriffs und der Umgang mit Funktionen so weit entwickelt werden, dass sie der Klärung und Lösung entsprechender Sachfragen in Anwendungen dienen können“.
- Folgende Inhalte werden festgelegt: „Mündliches und schriftliches Rechnen mit rationalen Zahlen, Rechnen mit Größen, Prozentrechnung, Potenzen mit ganz-

zahligen Exponenten, Wurzeln, Zuordnungen zwischen Größenbereichen, insbesondere proportionale und umgekehrt proportionale Zuordnungen, exponentielles Wachstum, lineare, quadratische und trigonometrische Funktionen, lineare und quadratische Gleichungen mit einer Variablen, Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen“.

- In der Geometrie ist das Ziel, „die beobachtete Wirklichkeit unter geometrischen Gesichtspunkten zu beschreiben und zu strukturieren“ und „die Entwicklung und Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens“.
- Folgende Inhalte werden festgelegt: „Geometrische Grundbegriffe und Lagebeziehungen, Symmetriebetrachtungen, ebene Figuren (Dreieck, Viereck, Kreis), Kongruenz, Flächeninhalt und Umfang ebener Figuren, ähnliche Figuren, Satz des Pythagoras, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel, Winkel- und Seitenberechnungen in Dreiecken“.
- In der Stochastik geht es um „Sachfragen und Anwendungsprobleme aus der Lebenswirklichkeit“, „ausgehend von vielfältigen konkreten Erfahrungen mit dem Zufall“.
- Folgende Inhalte werden festgelegt: „Sammeln, Bearbeiten und Interpretieren von Daten, Erstellen und Auswerten graphischer Darstellungen, Bestimmen von Häufigkeiten, Berechnen und Interpretieren von Mittelwerten und Abweichungen, Zufallsversuche, inhaltliches Verständnis des Begriffs Wahrscheinlichkeit, Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten, einfache Wahrscheinlichkeitsrechnungen“.

Eine eigenständige Wiederholungs- oder gar Erarbeitungsphase vom Lehrstoff der Sekundarstufe I ist im regulären Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 11 nicht vorgesehen. Es ist aber darauf zu achten, dass wichtige Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe I in integrierenden Wiederholungen aufgegriffen und so aktuell verfügbar gehalten werden. Im Übrigen sind Schülerinnen und Schüler zu beraten, wie sie Lücken im Stoff aufarbeiten können. Gegebenenfalls müssen die Schulen geeignete Angebote (Angleichungskurse, Selbstlernzentren) bereitstellen.

In der Jahrgangsstufe 11 wird die Mathematik wie alle übrigen Fächer in Grundkursen unterrichtet. Diese bereiten Schülerinnen und Schüler vor auf die Differenzierung des Faches in Grund- und Leistungskurse von der Jahrgangsstufe 12 an. So müssen auch die Anforderungen in den späteren Leistungskursen erfahrbar werden.

Da die Gebiete Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik in der Oberstufenmathematik eine herausragende Stellung einnehmen, werden sie in der Stufe 11 in den drei ausgewiesenen Themen Koordinatengeometrie, Beschreibende Statistik und Differentialrechnung für ganzrationale Funktionen angesprochen. Diese sollen nach Möglichkeit nicht isoliert behandelt, sondern zueinander in Beziehung gesetzt werden. Projektartige Unterrichtsformen werden auch in der Jahrgangsstufe 11 schon erprobt. Ausdrücklich hingewiesen wird auf die vielfältigen Möglichkeiten zu fächerverbindendem Lernen (vergleiche Kapitel 3.2.3).

Die Jahrgangsstufen 12 und 13 bilden die Qualifikationsphase zum Abitur. In diesen Stufen entfaltet sich das Kurssystem in Grund- und Leistungskurse. In diesen beiden Jahrgangsstufen ist Mathematik Pflichtfach für alle Schülerinnen und Schüler. Zu Beginn der Stufe 12 entscheiden sie sich, ob sie Mathematik als Grundkurs oder als Leistungskurs fortführen. In jedem Fall werden die in der Qualifikationsphase erbrachten Leistungen für die Zulassung zum Abitur angerechnet.

Für die Bildung einer Sequenz sind folgende Prinzipien wichtig:

- Herausarbeitung der wesentlichen Grundbegriffe
- Entzerren der großen thematischen Blöcke (Analysis, Lineare Algebra/ Geometrie, Stochastik)
- Spiraligkeit des Aufbaus
- Vernetzungen innerhalb des Faches
- implizite Wiederholungen
- Einbeziehung von Kontexten
- Aufbau von Orientierungswissen.

Dies soll dazu beitragen, nicht nur kurzfristige Lernerfolge zu erzielen.

Im Folgenden wird eine mögliche Grundkurs-Sequenz vorgestellt, in der Analysis und Lineare Algebra/Geometrie als Bereiche für das Abitur vorgesehen sind und in der in Stochastik Orientierungswissen vermittelt wird. Diese Sequenz hat nur Beispielcharakter. Es wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie die Anforderungen des Lehrplans im Unterrichtsalltag realisiert werden können. Thematische Blöcke werden bewusst aufgebrochen, um eine Verzahnung und einen spiraligen Aufbau zu ermöglichen. Die Themen werden stichwortartig aufgelistet und, wo es sinnvoll erscheint, mit einigen Kommentaren und Hinweisen für den Unterricht ergänzt. Eine Zeitplanung erfolgt jahrgangsstufenweise.

Jahrgangsstufe 11

- Erfassen, Darstellen, Aufbereiten von statistischen Daten, Mittelwerte, Streuungsmaße: Fragebogen als fächerverbindendes Projekt (z. B mit Deutsch oder Sozialwissenschaften)
- Aspekte von Gerade, Parabel, Kreis, Tangente: Brücken oder Hohlspiegel
- Ausgleichsgerade, Regression: zunächst anschaulich anhand geeigneten Datenmaterials, dann als elementare Extremwertaufgabe
- Änderungsrate (z. B. Geschwindigkeit oder …), Differenzenquotient, Tangente, Grenzprozesse, Differenzierbarkeit/Ableitungsfunktion, graphische Zusammenhänge von Funktion und Ableitung (Einsatz eines Funktionenplotters), Ableitungsregeln
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen (knapp, Überblick bis Grad 4), Anwendung auf wirtschaftswissenschaftliche Fragestellungen.

Jahrgangsstufe 12

- Exponentialfunktionen und ihre Ableitung: Wachstumsprozesse
- Bestimmung ganzrationaler Funktionen: Trassierung, Karosserieprofile, Bestimmung von Funktionstermen für vorliegende Kostenfunktionen (Näherung)

- Optimierungsaufgaben
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten (Orientierungswissen)
- lineare Gleichungssysteme, Matrix-Vektor-Schreibweise, Übergangsmatrizen, Materialverflechtung oder stochastische Matrizen
- Punkte und Vektoren im Anschauungsraum, Schnitt von Ebenen und Geraden, Schnittwinkel: Platonische und archimedische Körper, Kristallformen.

Jahrgangsstufe 13

- Einführung in die Integralrechnung, Änderungseffekte, infinitesimale Behandlung von Produktsummen: Zufluss/Abfluss, von der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion zur Zeit-Weg-Funktion
- bestimmtes Integral, Stammfunktion, Hauptsatz
- Flächenberechnungen, Integration als verallgemeinerte Mittelwertbildung
- binomialverteilte Zufallsgrößen (Orientierungswissen)
- numerische Integration: implizite Wiederholung von Bestimmung ganzrationaler Funktionen und Grundkenntnissen der Integralrechnung
- Übersicht über Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen: implizite Wiederholung von Aspekten der vektoriellen Geometrie
- Abstandsprobleme: Verbindung von Analysis und Linearer Algebra/Geometrie.

3.5 Mädchen und Jungen im Mathematikunterricht

Auch im Mathematikunterricht besteht die Gefahr, dass Lehrerinnen und Lehrer ihre Aufmerksamkeit verstärkt den Jungen zuwenden, diese stärker als Individuen ansprechen und ihnen Gelegenheit geben ihre technisch bestimmten Vorkenntnisse und Interessen im Unterricht zur Geltung zu bringen. Dadurch werden Mädchen benachteiligt. Sie werden nicht selten demotiviert, erhalten weniger Leistungsanreize und bestätigen dann scheinbar das eigene und das Vorurteil anderer, als Mädchen für solche Fächer nicht begabt zu sein.

Mangelnde Einbettung der Mathematik in Sinnzusammenhänge und in verstehbare Anwendungsbezüge beeinträchtigen tendenziell bei Schülerinnen stärker die Lernmotivation und den Lernerfolg als bei Schülern. Lernen im Kontext und die Verwendung kooperativer Lernverfahren eignen sich, den Schülerinnen in ihren Lerninteressen entgegenzukommen. Auf diese Weise kann der Mathematikunterricht an den Lernbedürfnissen der Mädchen orientiert werden, ohne die Jungen zu benachteiligen. Ein derartiges Vorgehen fördert den Lernerfolg von Schülerinnen wie von Schülern.

Bei Schülerinnen und Schülern sind häufig unterschiedliche Herangehens- und Verfahrensweisen beim Lösen und Bearbeiten von mathematischen Problemen feststellbar. Während Schüler sich stärker durch Probieren und Verwerfen einem Ziel nähern, machen sich Schülerinnen häufiger zuerst einen Plan, nach dem sie bei der Problembearbeitung vorgehen. Das gilt insbesondere für den Computereinsatz im Mathematikunterricht. Die Förderung und Würdigung unterschiedlicher

Lernwege schaffen Gelegenheiten, beide Vorgehensweisen zuzulassen und die Vorteile beider Verfahren für alle produktiv zu nutzen.

Das Verwenden unterschiedlicher Methoden kann nicht zuletzt unter dem Aspekt der Förderung von Schülerinnen akzentuiert werden. Reflexion des Lernens zusammen mit dem Austausch von Lernerfahrungen trägt zur Kommunikation und zur Erhöhung sprachlicher Anteile im Mathematikunterricht bei. Dies kommt den Einstellungen und den sprachlichen Fähigkeiten der Mädchen entgegen und wirkt sich insgesamt qualitätssteigernd auf den Mathematikunterricht aus.

4 Lernerfolgsüberprüfungen

4.1 Grundsätze

Die Grundsätze der Leistungsbewertung ergeben sich aus den entsprechenden Bestimmungen der Allgemeinen Schulordnung (§§ 21 bis 23). Für das Verfahren der Leistungsbewertung gelten die §§ 13 bis 17 der Verordnung über den Bildungsgang und die Abiturprüfung in der gymnasialen Oberstufe (APO-GOSt).

Die Leistungsbewertung ist Grundlage für die weitere Förderung der Schülerinnen und Schüler, für ihre Beratung und die Beratung der Erziehungsberechtigten sowie für Schullaufbahnentscheidungen.

Folgende Grundsätze der Leistungsbewertung sind festzuhalten:

- Leistungsbewertungen sind ein kontinuierlicher Prozess. Bewertet werden alle von Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit dem Unterricht erbrachten Leistungen (vgl. Kapitel 4.2 und 4.3).
- Die Leistungsbewertung bezieht sich auf die im Unterricht vermittelten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten. Die Unterrichtsziele, -gegenstände und die methodischen Verfahren, die von den Schülerinnen und Schülern erreicht bzw. beherrscht werden sollen, sind in den Kapiteln 1 bis 3 dargestellt.

Leistungsbewertung setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schüler im Unterricht Gelegenheit hatten, die entsprechenden Anforderungen in Umfang und Anspruch kennen zu lernen und sich auf diese vorzubereiten. Die Lehrerin bzw. der Lehrer muss ihnen hinreichend Gelegenheit geben, die geforderten Leistungen auch zu erbringen.

- Bewertet werden der Umfang der Kenntnisse, die methodische Selbstständigkeit in ihrer Anwendung sowie die sachgemäße schriftliche und mündliche Darstellung. Bei der schriftlichen und mündlichen Darstellung ist in allen Fächern auf sachliche und sprachliche Richtigkeit, auf fachsprachliche Korrektheit, auf gedankliche Klarheit und auf eine der Aufgabenstellung angemessene Ausdrucksweise zu achten. Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit in der deutschen Sprache werden nach § 13 (6) APO-GOSt bewertet.
- Bei Gruppenarbeiten muss die jeweils individuelle Schülerleistung bewertbar sein.
- Die Bewertung ihrer Leistungen muss den Schülerinnen und Schülern auch im Vergleich mit den Mitschülerinnen und Mitschülern transparent sein.
- Im Sinne der Qualitätsentwicklung und Qualitätssicherung sollen die Fachlehrerinnen und Fachlehrer ihre Bewertungsmaßstäbe untereinander offen legen, exemplarisch korrigierte Arbeiten besprechen und gemeinsam abgestimmte Klausur- und Abituraufgaben stellen.
- Die Anforderungen orientieren sich an den im Kapitel 5 genannten Anforderungsbereichen.

In den Klausuren soll sich eine möglichst große Vielfalt des im Unterricht behandelten Stoffs widerspiegeln. Aber auch wenn dies der Fall ist, können manche bedeutsamen unterrichtlichen Aspekte in Klausuren nicht überprüft werden. Diese müssen bei der Bewertung der „Sonstigen Mitarbeit“ Berücksichtigung finden.

4.2 Beurteilungsbereich „Klausuren“

4.2.1 Allgemeine Hinweise

Klausuren dienen der schriftlichen Überprüfung der Lernergebnisse in einem Kursabschnitt. Klausuren sollen darüber Aufschluss geben, inwieweit im laufenden Kursabschnitt gesetzte Ziele erreicht worden sind. Sie bereiten auf die komplexen Anforderungen in der Abiturprüfung vor.

Wird statt einer Klausur eine Facharbeit geschrieben, wird die Note für die Facharbeit wie eine Klausurnote gewertet.

Zahl und Dauer der in der gymnasialen Oberstufe zu schreibenden Klausuren gehen aus der APO-GOSt hervor.

4.2.2 Fachspezifische Hinweise zur Aufgabenstellung, Korrektur und Bewertung von Klausuren/Facharbeiten

Aufgabenstellung in Klausuren

Von der Stufe 11 ab sind die Gesichtspunkte weiterzuentwickeln, die in den Lehrplänen für die Sekundarstufe I hinsichtlich der Aufgabenstellung, der Zusammenstellung und Durchführung von Klassenarbeiten beschrieben sind. Im Verlauf der Oberstufe werden die Aufgaben umfangreicher und komplexer, ihre Anzahl verringert sich. Die Anforderungen nähern sich allmählich denen der schriftlichen Abiturprüfung an, so wie sie in Kapitel 5.3 beschrieben sind. Dem Gesichtspunkt des kumulativen und konstruktiven Lernens (vgl. Kapitel 3.2) ist in geeigneter Weise Rechnung zu tragen. Es wird angeregt, in stärkerem Maße auch verbale Leistungen einzufordern: Erläuterung von Vorgehensweisen, Beschreibung von Lösungswegen, kritische Bewertung von Ergebnissen, Darstellung von Orientierungswissen.

Parallelarbeiten sind geeignet zum Vergleich des Lernstandes verschiedener Kurse einer Jahrgangsstufe und zur Qualitätssicherung. Zu ihrer Durchführung bedarf es detaillierter vorheriger Absprachen zur Unterrichtsführung.

Korrektur und Bewertung von Klausuren

Bei der Korrektur werden die Fehler an der Stelle ihres Auftretens und am Rand markiert. Es haben sich folgende Korrekturzeichen bewährt:

a) In Rechnung, Zeichnung oder Text

(Beispielzahl)	$\underline{1\ 2\ 3\ 4}$	erstmals auftretender Fehler
(Beispielzahl)	$\underline{2}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}$	weitergeführter Fehler (im Endergebnis)
	~~	Ungenauigkeit

b) Am Rand

	—	Flüchtigkeitsfehler, einfacher Rechenfehler (Verschreiber, numerischer Irrtum)
	|	Voller Fehler
	+	Schwerer Fehler
		Lücke im Text oder in der Rechnung
	#	Fehlen ganzer Passagen bzw. eines Restes der Aufgabe
	≷	Ungenauigkeit, die den Wert einer Lösung nur unwesentlich beeinträchtigt

Die Korrektur muss für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar sein. Oft genügen die formalen Korrekturzeichen nicht. Dann sind sie durch sachbezogene Hinweise und Bemerkungen am Rand oder am Ende der Arbeit zu ergänzen. Eine sich steigernde Komplexität der Anforderungen verlangt bei der Korrektur und Bewertung der Klausuren ein adäquates Eingehen auf das Informationsbedürfnis der Kursteilnehmer. Hinweise zum Lernprozess sind wünschenswert.

Die Benotung muss sich aus der Korrektur und den Erläuterungen schlüssig ergeben. Erbrachte Teilleistungen sind zu werten. Sie können nicht durch Fehlleistungen in anderen Aufgabenteilen aufgehoben werden. Einmal aufgetretene und weitergeführte Fehler dürfen nicht zu einer übermäßigen Abwertung führen. Bei der Beurteilung von Klausuren sollten über das Kriterium der fachlichen Richtigkeit weitere Aspekte berücksichtigt werden. Solche Aspekte können sein:

- der Grad der Vollständigkeit in der Bearbeitung und Darstellung
- die zweckmäßige, begründete Auswahl von Verfahrensweisen
- die sinnvolle Einordnung und Kommentierung von Verfahrensweisen und Ergebnissen
- der sinnvolle Umgang mit erkannten Fehlern, die nicht mehr korrigiert werden konnten.

Als Grundlage für die Notengebung ist ein Punktsystem nützlich. Die vergebenen Punkte werden für die einzelnen Aufgaben und in ihrer Summe dem jeweils erreichbaren Höchstergebnis gegenübergestellt. Sie werden am Rand oder am Ende der Arbeit vermerkt. Anhaltspunkte für die Notengebung bieten die in Kapitel 5.3.3 dargelegten Regelungen. Dabei sollte die Zuordnung der Noten zu den Punkten nicht starr gehandhabt werden. Eventuell vorhandene deutliche Einschnitte in der Punktverteilung können zur Festlegung von Notengrenzen herangezogen werden.

Aber auch der Eindruck, der sich aus dem Gesamtbild der Arbeit hinsichtlich des Gebrauchs der Fachsprache, des fachlichen Überblicks sowie der Schlüssigkeit und Form der Darstellung ergibt, sollte in die Beurteilung eingehen. Leichtere Verstöße gegen die fachliche Exaktheit können möglicherweise durch derartige positive Merkmale ausgeglichen werden. Es ist darauf zu achten, dass das Ergebnis einer Hilfspunktbewertung nicht dem Gesamteindruck aus den aufgeführten Kriterien widerspricht.

Facharbeiten

Facharbeiten werden von der Fachlehrerin bzw. dem Fachlehrer korrigiert und bewertet. Die Note wird in einem Gutachten begründet. Neben der eigentlichen Arbeit können Beobachtungen während der Anfertigung der Facharbeit und ein eventuell beigefügtes Lerntagebuch dazu beitragen, die Leistung richtig einzuschätzen und angemessen zu bewerten. Für die Beurteilung sind fachliche und überfachliche Gesichtspunkte zu berücksichtigen.

In fachlicher Hinsicht kommen neben den für Klausuren genannten Aspekten zum Tragen:
- Übersichtlichkeit im Aufbau der Arbeit
- themengerechte Gliederung
- Schlüssigkeit der Gedankenführung
- richtige Gewichtung der einzelnen Aspekte
- Eigenständigkeit
- Gründlichkeit in der Materialsammlung
- Reichhaltigkeit der benutzen Quellen
- kritischer Umgang mit Sekundärliteratur.

An überfachlichen Gesichtspunkten sind zu beachten:
- äußerer Gesamteindruck
- sprachliche Korrektheit
- formale Exaktheit (Zitate, Fußnoten, Literaturverzeichnis)
- Objektivität der Darstellung, wissenschaftliche Distanz
- spürbares Interesse an der Thematik.

4.3 Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“

4.3.1 Allgemeine Hinweise

Dem Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ kommt der gleiche Stellenwert zu wie dem Beurteilungsbereich „Klausuren“. Im Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ sind alle Leistungen zu werten, die eine Schülerin bzw. ein Schüler im Zusammenhang mit dem Unterricht mit Ausnahme der Klausuren und der Facharbeit erbringt.

Dazu gehören Beiträge zum Unterrichtsgespräch, beim selbstständigen Arbeiten, in Gruppenarbeit, bei der Mitarbeit in Projekten sowie bei der Präsentation von Arbeitsergebnissen, wie sie in Kapitel 3.2.2 beschrieben sind.

Die Schülerinnen und Schüler sollen in den verschiedenen Formen der „Sonstigen Mitarbeit“ auf die mündliche Abiturprüfung vorbereitet werden und deren Struktur sowie die Beurteilungskriterien im Abitur kennen lernen.

4.3.2 Anforderungen und Kriterien zur Beurteilung der Leistungen im Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“

Beiträge zum Unterrichtsgespräch

Basis der Leistungsbewertung im Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ sind die Beiträge der Schülerinnen und Schüler zum Unterrichtsgespräch. Bisweilen ist es sinnvoll, eine einzelne Teilleistung zu beurteilen; in anderen Fällen (z. B bei Beiträgen zum Unterrichtsgespräch) liegt eine punktuelle Bewertung nicht nahe. Hier sollten die Lehrerinnen und Lehrer vielmehr die Schülerleistungen über einen längeren Zeitraum beobachten und sich entwickeln lassen. Es wird angeraten, dass Lehrerinnen und Lehrer sich jeweils in Abständen von 3 bis 5 Wochen ein zusammenfassendes Urteil über die unterrichtlichen Leistungen der Kursteilnehmer bilden. Dabei kann es hilfreich sein, dass sie sich vor einem Kursabschnitt über die wichtigsten Ziele des Unterrichts klar werden und später bei der Notengebung die Schülerinnen und Schüler daran messen, in welchem Maße sie den Zielvorstellungen entsprochen haben.

Besondere Arbeitsformen

In Kapitel 3.2.2 sind verschiedene Arbeitsformen beschrieben. Diese spielen, wenn sie im Unterricht eingesetzt werden, auch bei der Leistungsbewertung eine Rolle.

Hausaufgaben ergänzen die unterrichtliche Arbeit. Sie dienen zur Festigung und Sicherung des im Unterricht Erarbeiteten sowie zur Vorbereitung des Unterrichts. Das Vortragen der Hausaufgaben hat im Fach Mathematik traditionell einen beachtlichen Stellenwert. Eine regelmäßige Kontrolle dient der Bestätigung korrekter Lösungen oder der Berichtigung von Fehlern sowie der gebührenden Anerkennung eigenständiger Schülerleistungen. Beurteilungsmerkmale, wie sie in Kapitel 5.4 für die mündliche Abiturprüfung zusammengestellt sind, können helfen, die Leistung beim Vortragen von Hausaufgaben richtig einzuschätzen.

Bei Referaten geben die im Kapitel 3.2.2 genannten Kriterien Hinweise für die Benotung. Für die Qualität von Protokollen sind fachliche Richtigkeit, sprachliche Präzision, Übersichtlichkeit und Konzentration auf das Wesentliche ausschlaggebend.

Schriftliche Übungen

Im Lernprozess können schriftliche Überprüfungen notwendig oder wünschenswert sein, um den Wissensstand einer Kursgruppe festzustellen. Sie werden von der Lehrkraft oder von Mitschülern kontrolliert und im Allgemeinen nicht benotet. Davon zu unterscheiden ist die schriftliche Übung gemäß § 22 ASchO. Sie wird benotet. Die Aufgabenstellung muss sich unmittelbar aus dem Unterricht ergeben. Sie muss so begrenzt sein, dass für ihre Bearbeitung in der Regel 30 Minuten, höchstens 45 Minuten erforderlich sind.

Selbstständiges Arbeiten/Gruppenarbeit/Mitarbeit in Projekten

Selbstständiges Arbeiten sowie das Arbeiten in Gruppen und Projekten ist in der gymnasialen Oberstufe wichtig und darf aus der Leistungsbewertung nicht ausgeklammert werden.

Gesichtspunkte können sein, wie und in welchem Umfang die Schülerinnen und Schüler

- Beiträge zur Arbeit leisten
- Beiträge anderer aufnehmen und weiterentwickeln
- sich in die Denkweisen anderer einfinden
- Aufgaben wie Gesprächsleitung, Protokollführung, Berichterstattung übernehmen
- Informationen beschaffen und erschließen
- ihre Gruppenarbeit organisieren und durchführen, auch in arbeitsteiligen Verfahren
- systematische und heuristische Vorgehensweisen nutzen
- ihre Arbeitsschritte überprüfen, diskutieren und dokumentieren.

Bei der selbstständigen Arbeit kann darüber hinaus mitbewertet werden, inwieweit eine Schülerin bzw. ein Schüler in der Lage ist

- das eigene Lernen zielbewusst zu planen und zu steuern
- den eigenen Lernerfolg zu überprüfen und
- daraus Rückschlüsse zu ziehen für das weitere Lernen.

Notenbildung

Die Teilnote im Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ wird unabhängig von der Teilnote im Bereich „Klausuren“ gebildet. Sie wird den Schülerinnen und Schülern mitgeteilt und auf Wunsch erläutert. Der kontinuierliche Anteil der „Sonstigen Mitarbeit“ ist dabei hinsichtlich Quantität und Qualität ebenso zu berücksichtigen wie punktuelle Leistungsüberprüfungen. Es erscheint nicht angebracht, ein festes Schema für deren jeweilige Gewichtung anzugeben. Hier gibt es Entscheidungsspielräume, die von Lehrerinnen und Lehrern verantwortungsbewusst ausgefüllt werden müssen. Eine gesicherte Beurteilung der „Sonstigen Mitarbeit“ sollte möglich sein, wenn in einem Halbjahr etwa 4 Teilnoten für die kontinuierliche Unterrichtsleistung und zusätzlich weitere Einzelleistungen dokumentiert sind.

5 Die Abiturprüfung

5.1 Allgemeine Hinweise

Es ist spezifische Aufgabe der folgenden Regelungen, das Anforderungsniveau für die Prüfungen im Fach zu beschreiben, die Aufgabenstellung zu strukturieren und eine Beurteilung der Prüfungsleistungen nach verständlichen, einsehbaren und vergleichbaren Kriterien zu ermöglichen.

Entscheidend für die Vergleichbarkeit der Anforderungen ist die Konstruktion der Prüfungsaufgaben, die durch Beschluss der KMK[1)] in allen Bundesländern nach vereinbarten Grundsätzen erfolgen soll. Diese Grundsätze helfen zugleich, die Beurteilung der Prüfungsbedingungen transparent zu machen.

Zu diesen vereinbarten Grundsätzen gehört die Feststellung, dass den Bedingungen einer schulischen Prüfung zur allgemeinen Hochschulreife die bloße Wiedergabe gelernten Wissens ebenso wenig entspricht wie eine Überforderung durch Problemfragen, die von der Schülerin bzw. vom Schüler in der Prüfungssituation nicht angemessen bearbeitet werden können. Der Schwerpunkt der Anforderungen liegt in der Abiturprüfung in Bereichen, die mit selbstständigem Aussagen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte sowie Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen beschrieben werden können.

Die Abiturprüfungsanforderungen sollen deshalb in allen Fächern durch drei Anforderungsbereiche strukturiert werden. Es sind dies:

Anforderungsbereich I	(z. B. Wiedergabe von Kenntnissen)
Anforderungsbereich II	(z. B. Anwenden von Kenntnissen)
Anforderungsbereich III	(z. B. Problemlösen und Werten).

Die Anforderungsbereiche sind für die Lehrerinnen und Lehrer als Hilfsmittel für die Aufgabenkonstruktion gedacht.

Sie sollen

- den Lehrerinnen und Lehrern unter Berücksichtigung der Unterrichtsinhalte und ihrer Vermittlung eine ausgewogene Aufgabenstellung erleichtern
- den Schülerinnen und Schülern Verständnis für die Aufgabenstellungen im mündlichen und schriftlichen Bereich erleichtern und ihnen Bewertungen durchschaubar machen
- die Herstellung eines Konsenses zwischen den Fachlehrerinnen und Fachlehrern und damit eine größere Vergleichbarkeit der Anforderungen ermöglichen.

[1)] Vereinbarung über die einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung, Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 1. Juli 1979, i. d. F. vom 01. Dezember 1989

5.2 Beschreibung der Anforderungsbereiche

In der Abiturprüfung sollen die Kenntnisse und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler möglichst differenziert erfasst werden. Hierbei sind die mit den Aufgaben verbundenen Erwartungen drei Anforderungsbereichen zuzuordnen, die im Folgenden beschrieben sind.

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst

- die Wiedergabe von Sachverhalten (z. B. Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Aussagen) aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Dazu kann gehören:

- Wiedergeben von Definitionen und Sätzen
- Wiedergeben eines im Unterricht ausführlich besprochenen und wiederholten einfachen Beweises
- Anfertigen von Skizzen und Funktionsgraphen auf eine im Unterricht behandelte Weise
- Ausführen von geübten Algorithmen
- Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübtem Verfahren
- Bestimmen von Ableitungsfunktionen nach gelernten und eingeübten Regeln
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Berechnen bestimmter Integrale von ganzrationalen Funktionen
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines einfachen, durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen.

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst

- selbstständiges Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang

- selbstständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann.

Dazu kann gehören:

- verbales, nicht schematisches Darstellen von Begründungen oder Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten
- Durchführen von Beweisschritten, bei denen eine selbstständige Rekonstruktion von Gedankengängen erforderlich ist
- Ausführen eines Beweises, wenn ähnliche Beweise im Unterricht in vergleichbaren Zusammenhängen durchgeführt wurden
- Anwenden von Begriffen (z. B. Grenzwert, Basis, Zufallsgröße) in Beispielen, die nicht vom Unterricht her bekannt, in ihrer Struktur aber einfach sind
- Untersuchen von Funktionen mit Methoden, die von anderen Funktionenklassen her bekannt sind
- Berücksichtigen von Fallunterscheidungen bei der Untersuchung von Funktionsscharen, wenn Überlegungen dieser Art aus dem Unterricht vertraut sind
- Entwickeln von Funktionsgraphen aus Untersuchungsergebnissen, sofern die Gestalt nicht durch Übungen bereits vertraut ist
- Integrieren mit Hilfe von Substitution oder partieller Integration in vom Typ her bekannten Fällen
- Bestimmen von Funktionen aus vorgegebenen Bedingungen
- Erkennen und Verwenden von Nebenbedingungen bei Extremwertaufgaben in einer vom Unterricht her bekannten Form
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen, wobei die die Geraden oder Ebenen bestimmenden Punkte oder Richtungen erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- bei Aufgaben aus der Stochastik realitätsbezogene Situationen analysieren und in gewohnter Weise auf ein stochastisches Modell beziehen
- Testen von Hypothesen nach vorgegebenen, geübten Methoden.

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst planmäßiges Verarbeiten komplexer Gegebenheiten mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen, Wertungen zu gelangen. Dabei werden aus den gelernten Methoden oder Lösungsverfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig ausgewählt oder einer neuen Problemstellung angepasst.

Dazu kann gehören:

- Umsetzen eines in der Aufgabenstellung umgangssprachlich beschriebenen umfangreicheren Sachverhalts in die Form von Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssystemen o. Ä., ohne dass unmittelbar vergleichbare Aufgaben behandelt wurden

- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Erkennen und Begründen, ob die Übertragung eines Sachverhalts auf einen neuen oder erweiterten Bereich möglich ist
- Auffinden und Formulieren einer Vermutung, die sich für den Prüfling aus der Bearbeitung einer Teilaufgabe oder aus dem Vergleich mehrerer Teilaufgaben ergibt
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind
- Interpretieren von Ergebnissen in nicht vom Unterricht her bekannten Zusammenhängen
- Verwenden komplexer Begriffe (z. B. Differenzierbarkeit, lineare Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit) in Beispielen, die nicht vom Unterricht her bekannt sind, unter Benutzung einer formalen Definition
- Berechnen eines Integrals, dessen Typ im Unterricht nicht behandelt wurde, mit Hilfe von bekannten, jedoch selbstständig auszuwählenden Methoden.

5.3 Die schriftliche Abiturprüfung

Zur Art der Aufgabenstellung, zur Vorlage der Aufgabenvorschläge bei der oberen Schulaufsichtsbehörde, zur Korrektur und Bewertung der schriftlichen Arbeiten gelten grundsätzlich die §§ 32 bis 34 der APO-GOSt und die entsprechenden Verwaltungsvorschriften.

Die Aufgabenstellung für Leistungskurse muss den Anforderungen gerecht werden, die sich aus der Definition der Leistungskurse (Kapitel 3.3) ergeben. Die Fragestellung muss eine systematische und komplexe Auseinandersetzung mit einer Aufgabe ermöglichen, den Nachweis einer vertieften Beherrschung der fachlichen Methoden sowie eine reflektierte Einordnung der Fragestellung in größere Zusammenhänge einfordern.

5.3.1 Aufgabenarten der schriftlichen Abiturprüfung

Für die schriftliche Abiturprüfung wird keine thematisch geschlossene Gesamtaufgabe gestellt. Zu bearbeiten sind vielmehr zwei bzw. drei voneinander unabhängige Aufgaben. Diese sollen sich in ihrer Gesamtheit auf alle drei in Kapitel 5.2 beschriebenen Anforderungsbereiche erstrecken. Die Aufgaben erreichen dann ein angemessenes Niveau, wenn das Schwergewicht der zu erbringenden Prüfungsleistung im Anforderungsbereich II liegt und daneben die Anforderungsbereiche I und III berücksichtigt werden, und zwar Anforderungsbereich I in deutlich höherem Maße als Anforderungsbereich III.

Zur Aufgabenkonstruktion seien folgende Grundsätze genannt:

- In jedem Abiturvorschlag müssen wenigstens zwei Gebiete berücksichtigt werden. Analysis muss eines dieser Gebiete sein.
- Die Aufgaben müssen eindeutig formuliert, klar umgrenzt und in der vorgesehenen Zeit zu bearbeiten sein. Sie dürfen einer bereits bearbeiteten Aufgabe nicht so nahe stehen oder im Unterricht so vorbereitet sein, dass ihre Bearbeitung keine selbstständige Leistung erfordert.
- Wegen der geringen Zahl der Aufgaben einer Prüfungsarbeit müssen diese in mehrere Teilaufgaben gegliedert werden. Die Teilaufgaben müssen in einem Problemzusammenhang stehen. Gegebenenfalls kann die Nennung eines Zwischenergebnisses oder einer Varianten eines Teilresultats erforderlich sein, um so die Voraussetzungen für die Lösung weiterer Teilaufgaben zu schaffen. Die Aufgliederung in Teilaufgaben und die Angabe von Zwischenergebnissen darf nicht so detailliert sein, dass die Selbstständigkeit der Bearbeitung nicht mehr gewährleistet ist.
- Die Forderung nach Selbstständigkeit der Leistung ist so einzubringen, dass dadurch ein Grunderfolg nicht beeinträchtigt wird. Das kann durch geeignete Abfolge der Teilaufgaben erreicht werden. Schwierige Teilaufgaben sollten nicht als solche gekennzeichnet werden.
- Die Aufgaben eines jeden Abiturvorschlags sollen in der Regel etwa gleiches Gewicht besitzen.
- Alternative Aufgaben oder auch nur alternative Teilaufgaben sind nicht zulässig.
- Es ist unzulässig, Aufgaben aus Quellen zu entnehmen, die den Schülerinnen und Schülern leicht zugänglich sind, beispielsweise aus an der Schule eingeführten Unterrichtswerken oder im Unterricht benutzten Aufgabensammlungen. Die benutzten Quellen sind anzugeben.

5.3.2 Einreichen von Prüfungsvorschlägen

Die Fachlehrerin bzw. der Fachlehrer legt zwei Prüfungsvorschläge einschließlich der Genehmigungsunterlagen vor, von denen die obere Schulaufsicht einen Vorschlag auswählt. Jeder Vorschlag muss für Leistungskurse drei, für Grundkurse zwei Aufgaben umfassen. Zur Aufgabenstellung ist § 33 Abs. 1 APO-GOSt zu beachten. Die Aufgabenvorschläge in der schriftlichen Abiturprüfung müssen aus dem Unterricht in der Qualifikationsphase erwachsen sein. Die der Schulaufsicht vorzulegenden Vorschläge müssen sich in ihrer Breite insgesamt auf die Ziele, Problemstellungen, Inhalte und Methoden der vier Halbjahre der Qualifikationsphase beziehen und unterschiedliche Sachgebiete umfassen. Der vom Prüfling zu bearbeitende Vorschlag muss sich in der Breite der Ziele, Problemstellungen, Inhalte und Methoden mindestens auf zwei Halbjahre der Qualifikationsphase beziehen.

Das Anspruchsniveau beider Vorschläge muss gleichwertig sein. Parallelaufgaben dürfen einander nicht zu ähnlich sein. Bei Aufgaben aus der Analysis sind verschiedene Funktionenklassen zu berücksichtigen. Empfehlend wird auf die Möglichkeit hingewiesen, für parallele Kurse gleiche Vorschläge einzureichen.

Dem Prüfungsvorschlag sind beizufügen

- eine kurz gefasste konkrete Beschreibung der erwarteten Schülerleistung (Erwartungshorizont) unter Hinweis auf die konkreten unterrichtlichen Voraussetzungen einschließlich einer Lösung der vorgelegten Aufgaben. Es sind die Kriterien zu benennen, die der Bewertung zu Grunde liegen (vgl. Kapitel 4.2.2). Ebenso sind die Anforderungsbereiche den Arbeitsaufträgen zuzuordnen
- eine hinreichend detaillierte Angabe über die Lerninhalte der Halbjahreskurse
- die Erklärung der Fachlehrerin oder des Fachlehrers, dass das Notwendige für die Geheimhaltung veranlasst wurde.

Die beigefügte Lösung soll der Fachaufsicht und dem Korreferenten ein klares Bild von Art und Umfang der erwarteten Schülerleistung vermitteln. Für die Lösbarkeit der gestellten Aufgaben und die Richtigkeit der Lösung ist die Fachlehrerin bzw. der Fachlehrer verantwortlich. Die konkreten unterrichtlichen Voraussetzungen müssen erkennen lassen, welche besonderen Anforderungen in Bezug auf einzelne Aufgabenteile an die Schülerinnen und Schüler gestellt werden. Das ist nur möglich, wenn beschrieben wird, in welchem Umfang und wie intensiv sie auf die einzelnen Aufgabenstellungen vorbereitet wurden. Werden Aufgaben aus anderen als innermathematischen Anwendungsbereichen gestellt, so ist darzustellen, auf welche Weise gleichwertige Lernvoraussetzungen im Unterricht geschaffen und gesichert wurden.

Die vorgesehenen Hilfsmittel sind am Schluss eines jeden Vorschlags aufzuführen. Grundsätzlich zugelassen sind Zeichengeräte, eingeführtes Tabellenwerk, eingeführte Formelsammlung, Taschenrechner. Bei Tafelwerken sind Verfasser bzw. Verlag zu nennen. Bei Verwendung von Taschenrechnern ist sicherzustellen, dass die Schülerinnen und Schüler gleichwertige Geräte zur Verfügung haben. Es ist der Typ des verwandten Geräts bzw. ein repräsentatives Muster zu nennen.

Programmierbare Taschenrechner und Computer können für die schriftliche Abiturprüfung als Hilfsmittel vorgesehen werden, wenn die Schülerinnen und Schüler aus dem Unterricht der Qualifikationsphase und den Klausuren über hinreichende Erfahrungen mit den Geräten verfügen.

Sind in bestimmten Fällen die eingeführten Tafelwerke nicht ausreichend, so müssen die zur Ergänzung erforderlichen Unterlagen mit den Aufgaben vorgelegt werden. Dies betrifft auch selbst gefertigte Formelsammlungen.

5.3.3 Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistungen

Die schriftliche Prüfungsarbeit wird von der zuständigen Fachlehrkraft korrigiert, begutachtet und abschließend mit einer Note bewertet (§ 34 Abs. 1 APO-GOSt). Das Gutachten muss

- Bezug nehmen auf alle im Erwartungshorizont geforderten Teilleistungen und darlegen, inwieweit die Anforderungsbereiche erreicht wurden
- neben den inhaltlichen auch die methodischen Leistungen und den Grad der Selbstständigkeit bewerten. Eine informative, nicht redundante textliche Ge-

staltung mit Ansatzerläuterungen, Ergebnisdiskussionen oder Ähnlichem gehört bei allen Aufgaben zu den Prüfungsanforderungen und ist in die Bewertung einzubeziehen
- Aussagen zum Anforderungs-/Leistungsniveau machen (Anforderungsbereich I bis III)
- Aussagen zur Sprachrichtigkeit enthalten (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt).

Für die Notengebung kann eine detaillierte Punktverteilung hilfreich sein. Die Note „ausreichend“ soll erteilt werden, wenn annähernd die Hälfte der Punkte erreicht wurde. Der für die Noten „sehr gut“ bis „ausreichend“ vorgesehene Bereich ist in vier etwa gleich große Intervalle zu unterteilen. Wird weniger als ein Fünftel der Punkte erreicht, so ist die Leistung in der Regel „ungenügend“. Das beschriebene arithmetische Messmodell darf aber keineswegs als ausschließliche Entscheidungshilfe dienen. In jedem Fall müssen die im Gutachten erwähnten Gesichtspunkte bei der Festsetzung der Note angemessen berücksichtigt werden.

Der Zweitkorrektor korrigiert die Arbeit ebenfalls (§ 34 Abs. 2 APO-GOSt); er schließt sich der Bewertung begründet an oder fügt eine eigene Beurteilung und Bewertung an.

Bei der Begründung bzw. der Beurteilung und Bewertung muss in knappen Aussagen auf die Beurteilungskriterien Bezug genommen werden.

5.3.4 Beispiele für Prüfungsaufgaben in der schriftlichen Abiturprüfung

Die nachfolgenden Aufgabenbeispiele wurden unter anderem aus den in Nordrhein-Westfalen eingereichten Abiturvorschlägen ausgewählt und geringfügig überarbeitet, um die Intentionen des Lehrplans im Hinblick auf die Abiturprüfung zu verdeutlichen. Unterrichtliche Voraussetzungen und Erwartungshorizonte weisen auf notwendige Kenntnisse und besondere Aspekte der Aufgabenstellung hin. Welche Anforderungsbereiche erreicht werden, hängt nicht zuletzt von den jeweiligen unterrichtlichen Voraussetzungen in der konkreten Lerngruppe ab, die im Rahmen des Lehrplans nicht dargelegt werden können. Hierzu sind bei der Einreichung der Vorschläge im Allgemeinen zusätzliche Erläuterungen erforderlich. Damit der Umfang des Lehrplans nicht zu stark ausgeweitet wird, ist nur bei Aufgabe 1 eine Lösung beigefügt worden.

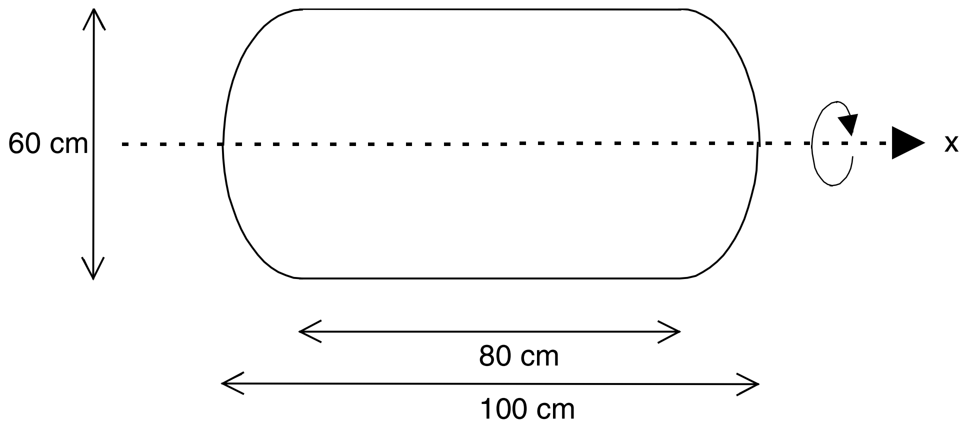
Beispiel 1 (Grundkurs)

Aufgabenstellung

a) Skizzieren Sie eine Herleitung für die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$ zur Berechnung des Volumens eines Körpers, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht.

Ein liegender Wassertank besteht aus einem Zylinder mit zwei kuppelförmigen Aufsätzen. Die Abmessungen sind der beigefügten Zeichnung zu entnehmen. Er entsteht durch Rotation der gezeichneten Kurve um die x-Achse.

Querschnitts-Skizze des Wassertanks:

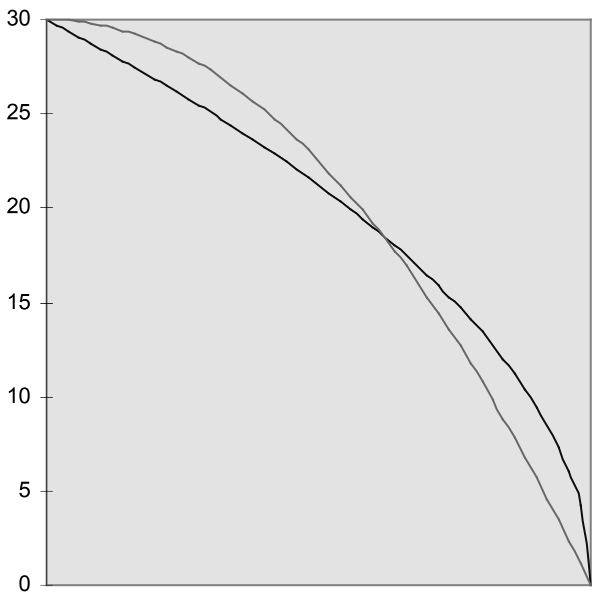


b) Schätzen Sie mit einfachen geometrischen Mitteln ab, dass weniger als 400 l in den Tank passen.

c) Gegeben sind die Graphen der Funktionen mit $g(x) = \sqrt{4500 - 90x}$ und $k(x) = -\frac{3}{10}(x-40)^2 + 30$ (vgl. beiliegende Abbildung). Begründen Sie, welcher der beiden Graphen der von g und welcher der von k ist.
Zeigen Sie, dass beide Funktionen die kuppelförmigen Aufsätze des Wassertanks näherungsweise beschreiben.
Wo sehen Sie Abweichungen?
Bestimmen Sie nun das Volumen des Wassertanks mit Hilfe von g(x).

d) Aus einem Wasserhahn fließt in gleichen Zeitabschnitten immer gleich viel Wasser in den Tank. Skizzieren Sie den Graphen für die jeweilige Funktion H(t) (t: Zeit seit Füllbeginn, H(t) Höhe der Wasseroberfläche im Tank über dem Boden zur Zeit t), wenn der Tank auf einer der beiden Kuppeln steht bzw. auf der Seite liegt. Erklären Sie den Verlauf der Graphen.

Abbildung



Unterrichtliche Voraussetzungen
Notwendige Kenntnisse: Ableitungen von ganzrationalen Funktionen und Wurzelfunktionen, qualitative Analyse von Graphen, Rotationsvolumen.

Erwartungshorizont
In Teilaufgabe a) wird Orientierungswissen (vgl. Kapitel 3.2.1) zur Integralrechnung überprüft. Die Skizze für die Herleitung der Formel verlangt von den Schülerinnen und Schülern eine Entscheidung darüber, welche Ideen (heuristischer und begrifflicher Art) für die Herleitung wesentlich waren. Diese Ideen sollen knapp dargestellt werden (Anforderungsbereich I, II). In b) soll ein Volumen elementargeometrisch abgeschätzt werden. Hierzu ist eine geeignete Idee erforderlich (Anforderungsbereich I, II). In c) geht es darum zu überprüfen, inwieweit zwei vorgegebene Funktionen für die Modellierung des vorgegebenen Problems geeignet sind (neuartige Aufgabenstellung) (überwiegend Anforderungsbereich II). Schließlich sollen in d) zwei Graphen qualitativ skizziert und ihr jeweiliger Verlauf gedeutet werden (Anforderungsbereich III).

Lösung:

a) Schülerinnen und Schüler haben Integrale als Riemannsche Integrale bei der Berechnung von Flächeninhalten kennen gelernt. Zu einer angemessenen Lösung gehören daher die folgenden Punkte:
   - Skizze eines Rotationskörpers mit innerem und äußerem Scheibchenkörper anfertigen
   - Volumen des Rotationskörpers durch die Volumina der inneren und äußeren Scheibchenkörper abschätzen

- ggf. beschränken auf monotone Begrenzungsfunktion, Entwickeln eines Terms für das Volumen des inneren Scheibchenkörpers
- das Volumen des inneren Scheibchenkörpers als innere Treppenfläche der Berandungsfunktion f^2 deuten und damit
- das Volumenintegral auf ein Flächenintegral zurückführen.

b) Der kleinste den Wassertank umschreibende Quader hat das Volumen

$$6 \cdot 6 \cdot 10 \text{ l} = 360 \text{ l} < 400 \text{ l}.$$

c) Bei geschickter Festlegung des Koordinatensystems muss eine geeignete Randfunktion f folgende Eigenschaften besitzen:

I	$f(40) = 30$
II	$f(50) = 0$
III	f ist monoton fallend
IV	f hat einen differenzierbaren Übergang bei $x = 40$, schneidet bei $x = 50$ senkrecht die x-Achse.

Die Bedingungen I, II, III lassen sich für g und k unmittelbar nachrechnen.

Wegen $g'(40) = -\frac{3}{2}$ schließt g nicht knickfrei an die waagerechte Seitenwand an. Wegen $k'(40) = 0$ hat k einen differenzierbaren Übergang bei $x = 40$.

Wegen $g'(x) \xrightarrow[x \to 50]{} -\infty$ schneidet g bei $x = 50$ senkrecht die x-Achse.

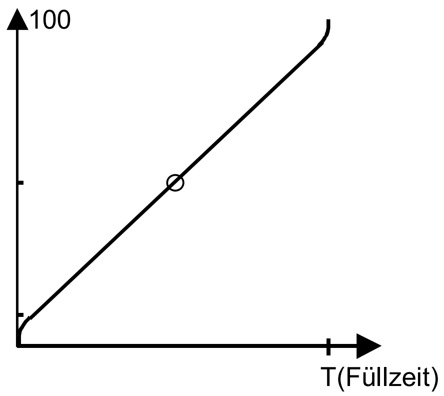
Wegen $k'(50) = -6$ ist das für k nicht der Fall.

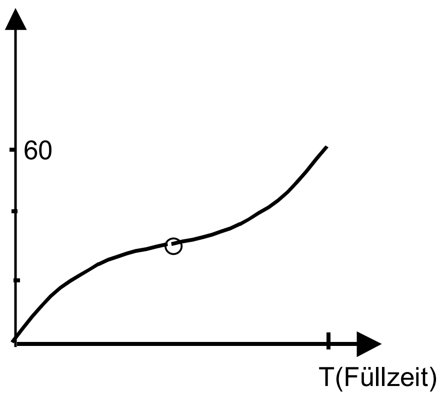
Keine der beiden Funktionen erfüllt also die geforderten Eigenschaften vollständig.

g ist die Funktion, deren Graph in der Skizze zunächst unterhalb des anderen Graphen verläuft.

$$V_{Tank} = 2 \cdot \left[40 \cdot 30^2 \cdot \pi + \pi \cdot \int_{40}^{50} (4500 - 90x)\,dx \right] \approx 254{,}5 \text{ (in l)}.$$

d)





Beide Graphen sind punktsymmetrisch zu $\left(\frac{T}{2}\middle|50\right)$ bzw. $\left(\frac{T}{2}\middle|30\right)$, da der Tank in beiden Lagen eine waagerechte Symmetrieebene hat.

Steht der Tank auf einer Kuppel, dann ist die Kuppel aufgrund des kleinen Volumens relativ schnell voll gelaufen (Wasserstand 10 cm). Bis das Wasser in die obere Kuppel dringt, steigt der Wasserstand linear.

Da die Querschnittsfläche des auf der Seite liegenden Tanks bis zur Symmetrieebene immer größer wird, nimmt H'(t) bis zum Symmetriepunkt monoton ab.

Beispiel 2 (Leistungskurs)

Fachliche Bedeutung der Aufgabe
Der Prozessor eines Computers kann nur auf- und abwärtszählen. Mit raffinierten Programmen kann man die Grundrechenarten Addieren, Multiplizieren etc. auf das Zählen zurückführen, und damit den Computer Funktionswerte ganzer und gebrochen rationaler Funktionen berechnen lassen. Um nicht-rationale Funktionen durch den Computer bearbeiten zu lassen, werden solche Funktionen näherungsweise durch ganzrationale Funktionen ersetzt.

Aufgabenstellung
In dieser Aufgabe sollen mit verschiedenen Methoden ganzrationale Näherungsfunktionen für die Kosinusfunktion entwickelt werden.

1. Näherungsmethode:
Der Graph der Näherungsfunktion $p_1(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ soll durch den Startpunkt $(0|1)$ und die Nullstellen $(\pm\frac{\pi}{2}\,|\,0), (\pm\frac{3\pi}{2}\,|\,0)$ der Kosinusfunktion gehen.

2. Näherungsmethode:
Die Näherungsfunktion $p_1(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ soll an der Stelle 0 im Funktionswert und in den ersten vier Ableitungen mit der Kosinusfunktion übereinstimmen,
d.h. $p_2(0) = \cos(0), p_2'(0) = \cos'(0), p_2''(0) = \cos''(0), \ldots$

Die Aufgabenteile a), c) und d) sollen mit einem Computeralgebra-System (Derive, Maple …) bearbeitet, in gewohnter Weise kommentiert und auf Diskette abgespeichert abgegeben werden. Die übrigen Teile sind auf dem Klausurbogen zu bearbeiten.

a) Berechnen Sie die beiden Näherungsfunktionen p_1 und p_2 und plotten Sie p_1, p_2 und die Kosinusfunktion im Intervall $[-2\pi\,|+2\pi]$ aus.

b) Erläutern Sie, weshalb man bei Vorgabe von
- 5 Funktionswerten bzw.
- einem Funktionswert an einer Stelle und den ersten 4 Ableitungen an dieser Stelle eine ganzrationale Funktion mindestens 4. Grades ansetzen muss!

In beiden Näherungen ergeben sich die Koeffizienten b und d zu Null. Hätte man sich das vor dem ersten Ansatz überlegen können, um bei der Bearbeitung Zeit zu sparen? Erläutern Sie Ihre Überlegungen!

c) Vergleichen Sie p_1 und p_2 im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}\middle|+\frac{\pi}{2}\right]$ mit der Kosinusfunktion.

Benutzen Sie dabei die graphische Darstellung aus dem Aufgabenteil 1. Um die drei Graphen optisch trennen zu können, müssen Sie vermutlich die Zoomfunktion benutzen.
Stellen Sie in diesem Intervall für beide Näherungen die Abweichung von der Kosinusfunktion graphisch dar und bestimmen Sie die maximalen Abweichungen.

d) Mit Hilfe des Näherungspolynoms p_2, das durch das 2. Verfahren gewonnen wurde, soll der Flächeninhalt zwischen der Kosinuskurve und der x-Achse im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}\middle|+\frac{\pi}{2}\right]$ näherungsweise berechnet werden.

Schätzen Sie zunächst (z. B. unter Verwendung von Teilaufgabe c)) grob ab, wie groß der Fehler höchstens werden kann. Erläutern Sie Ihre Schätzung.

e) Wie könnte man die Näherungen verbessern ?

Unterrichtliche Voraussetzungen
Notwendige Kenntnisse: ganzrationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, „Steckbriefaufgaben“, Extremwertprobleme, Flächenberechnungen, Umgang mit einem Computeralgebra-System.

Erwartungshorizont
Die grundsätzliche Fragestellung von Funktionsapproximationen durch ganzrationale Funktionen einschließlich ihrer Bedeutung für die numerische Behandlung von Funktionen durch Taschenrechner und Computer ist den Schülerinnen und Schülern neu. Steckbriefaufgaben wurden im Unterricht mit einem Computeralgebra-System bearbeitet (Anforderungsbereich I, II). In den Teilaufgaben b) und c) wird Orientierungswissen (Theorie der linearen Gleichungssysteme, Umgang mit Funktionen und Graphen) überprüft (überwiegend Anforderungsbereich II). Die Fehlerabschätzung in d) ist aus dem Unterricht nicht bekannt (Anforderungsbereich III). Eine Verbesserung der Approximation erfordert kreatives Umgehen mit bekannten Sachverhalten (Anforderungsbereich III).

Beispiel 3 (Grundkurs)

Gegeben sei die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte A, B und C von E mit den Koordinatenachsen. Tragen Sie diese in das beigefügte Zeichenblatt ein und veranschaulichen Sie die Ebene durch Einzeichnen der Spurgeraden.
Stellen Sie dann die Gleichung für E in Parameterform auf!

b) Welches Projektionsverfahren liegt diesem Zeichenblatt zu Grunde? Leiten Sie die Projektionsmatrix **P** her und bestimmen Sie die Projektionsrichtung!

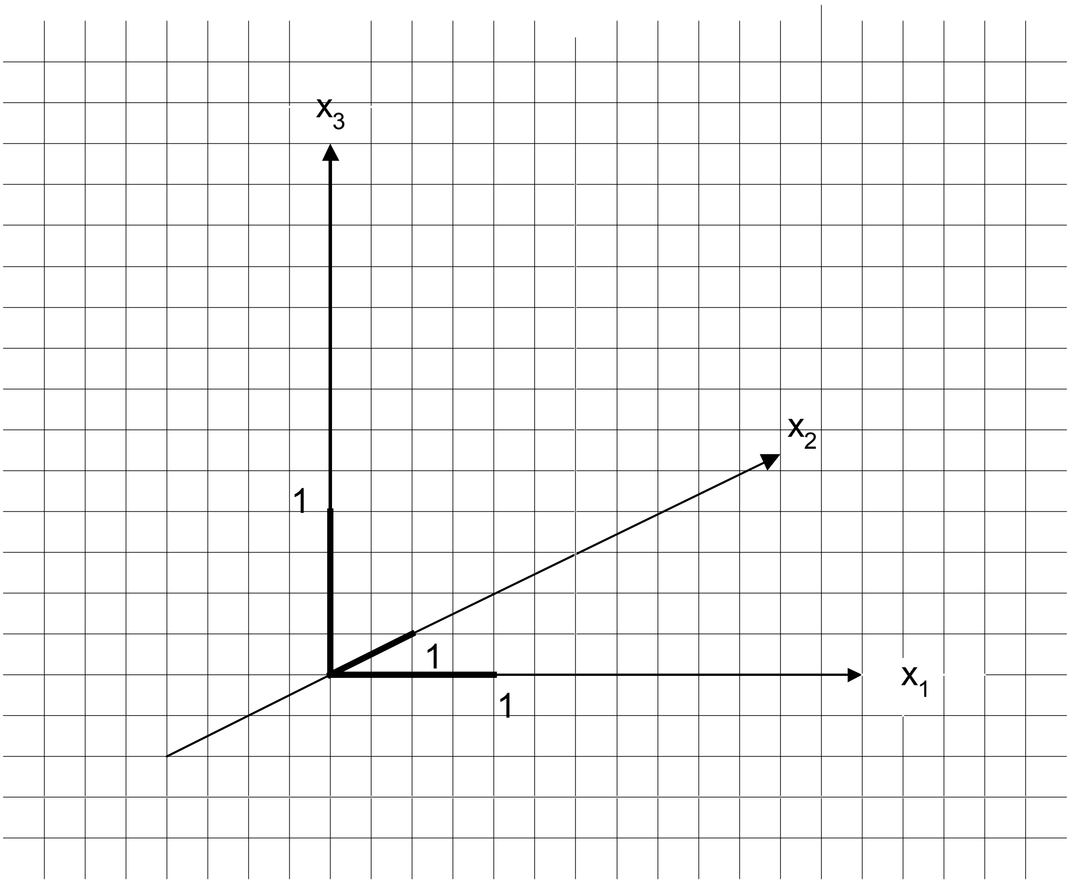
c) Unter welchem Winkel α schneidet die Ebene E die $x_2 - x_3$-Ebene $E_1: x_1 = 0$?

d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g von E und E_1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Tetraeder OABC und der Geraden g?

e) Das Tetraeder OABC wird durch eine Rotation um die x_3-Achse mit dem Rotationswinkel $\beta = 120°$ auf ein Tetraeder OA'B'C' abgebildet.
Leiten Sie die Rotationsmatrix **R** her, berechnen Sie A', B', C' mit einer Genauigkeit von 3 Dezimalstellen und tragen Sie das Tetraeder OA'B'C' noch in das Zeichenblatt ein.

f) Durch die Rotation aus e) wird die Gerade
$h: x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ auf eine Gerade h' abgebildet.
Leiten Sie eine Geradengleichung für h' her!

Zeichenblatt



Unterrichtliche Voraussetzungen
Notwendige Kenntnisse: elementare Raumvorstellung, normierte räumliche Darstellung im $\mathbb{R}^2$, Berechnen von Abbildungsmatrizen.

Erwartungshorizont
Die Teilaufgaben a) bis d) sind Standardaufgaben (Anforderungsbereich I, II). Teilaufgabe c) ist durch die spezielle Lage von E_1 verfremdet. In der Teilaufgabe d) sollen algebraische Zusammenhänge räumlich interpretiert werden. Die Leistung der Teilaufgabe e) besteht darin, die Berechnung einer Matrix für die Rotation um die x_1-Achse auf die x_3-Achse zu übertragen (Anforderungsbereich II, III). Das (elementare) Problem der Teilaufgabe f) ist neu. Lösungsansätze können aber unmittelbar aus der räumlichen Vorstellung erschlossen werden (Anforderungsbereich II).

Beispiel 4 (Leistungskurs)

Aufgabenstellung

Durch die Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ist eine Abbildung vom $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben.

a) Berechnen Sie zum Startvektor $\mathbf{s_0} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ die Vektoren

$\mathbf{s}_1 = \mathbf{A} \circ \mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{A} \circ \mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{A} \circ \mathbf{s}_2$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\vec{s}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Grenzvektor $\mathbf{s} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{s}_n$.

c) Ist der Grenzvektor auch Fixvektor?

d) Zeigen Sie: Die Gerade $g: x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ ist eine Fixgerade der Abbildung mit der Matrix **A**.

e) Matrix und Vektoren können folgendermaßen inhaltlich gedeutet werden:
In einem Krug sind 4 Tassen Milch und in einer Kanne 2 Tassen schwarzer Kaffee. Man nimmt aus dem Krug eine Tasse Milch und gibt sie unter Umrühren in die Kanne zu dem Kaffee.
Dann füllt man aus der Kanne eine Tasse Milchkaffee ab und gibt sie unter Umrühren in den Krug.
Dieser Hin- und Hertransport einer Tasse voll Flüssigkeit soll wiederholt durchgeführt werden.
Die Koordinaten des Vektors $\vec{s}_n$ geben das Milchvolumen in dem Krug und in der Kanne nach n Umfüllungen an.
Zeigen Sie, dass die Matrix **A** den Umfüllvorgang beschreibt.

f) Zeichnen Sie die Gerade g und die zu den Vektoren aus Aufgabe a) gehörenden Punkte.
Erläutern Sie den Umfüllvorgang anhand dieser Zeichnung.

Unterrichtliche Voraussetzungen

Notwendige Kenntnisse: Vollständige Induktion, Geradengleichungen, Abbildungen durch Matrizen, Fixgerade, Modellbildung.

Erwartungshorizont
Die Teilaufgaben a), c) und d) haben Routinecharakter (Anforderungsbereich I, II). In b) ist ein Beweis mittels vollständiger Induktion zu führen (Anforderungsbereich II). Für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt ist der in e) geforderte Nachweis, dass ein mit Worten beschriebener Umfüllvorgang durch die voraufgegangenen Berechnungen beschrieben und quantitativ erfasst wird, sowie die Deutung der Zeichnung in Teilaufgabe f) (Anforderungsbereich III).

Beispiel 5 (Grundkurs)

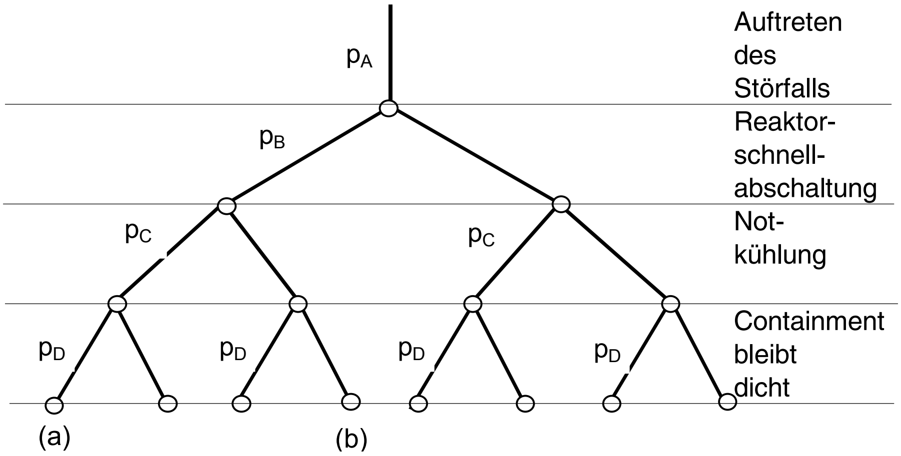
Aufgabenstellung
Zur Bearbeitung gehört eine differenzierte Darstellung aller zur Lösung gehörenden Überlegungen.
Zur Vereinfachung der Rechnung steht eine Tabelle akkumulierter Wahrscheinlichkeiten zur Verfügung.

a) Knapp daneben
1988 stürzte ein Jumbo-Jet der PanAm über dem schottischen Ort Lockerbie ab. Lockerbie liegt in der Nähe des Atomkraftwerks Chapel Cross. DIE ZEIT zitierte wenig später einen Sprecher des Atomkraftwerks Chapel Cross:
„Es mag eine etwas zynische Betrachtungsweise sein, aber die statistische Wahrscheinlichkeit, dass ein Flugzeug auf Chapel Cross abstürzt, ist nun noch geringer als vorher."
Beurteilen Sie diese Aussage aus mathematischer Sicht.

b) Ausfälle im KKW
In der Studie zur Sicherheit der deutschen Kernkraftwerke gibt die Reaktorsicherheitskommission die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ für den „Ausfall Hauptspeicherwasser und Hauptwärmesenke" an (bezieht sich auf einen Reaktor in einem Jahr). Setzen Sie voraus, dass ständig 20 KKWs in Deutschland am Netz sind.
   b_1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Jahr dieser Ausfall in mindestens 5 und höchstens 8 der deutschen Kernkraftwerke auftritt?
   b_2) Geben Sie mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5% an, in wie vielen deutschen Kernkraftwerken in diesem Jahr mit diesem Ereignis zu rechnen ist.

c) Störfälle im KKW

Die Kernforschungsanlage Jülich hat 1983 in der Studie „Die Sicherheit von KKWs“ den folgenden Ablaufplan (hier etwas vereinfacht) für Störfälle angegeben:



Ein Störfall tritt mit der Wahrscheinlichkeit p_A auf. p_B, p_C, p_D sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Sicherheitsvorkehrungen nicht funktionieren, jeweils auf ein Jahr bezogen.

c_1) Der Ereignisablauf (a) beschreibt einen GAU (größter anzunehmender Unfall). Erläutern Sie den Ablauf (b).
Geben Sie für beide Abläufe Terme an, die die Wahrscheinlichkeiten beschreiben.

c_2) Die in der Studie angegebenen Wahrscheinlichkeiten betragen $p_A = 8 \cdot 10^{-4}$, $p_B = 2 \cdot 10^{-3}$, $p_C = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$, $p_D = 5 \cdot 10^{-5}$

Geben Sie mit den Formeln aus c_1) die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Abläufe (a) und (b) an.
In der Jülicher Studie wird für den Ablauf (b) die (falsche) Formel $p_{Jül} = p_A \cdot p_B$ angegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für (b) mit der Jülichformel und vergleichen Sie sie mit dem Ergebnis der eigenen Formel. Bewerten Sie die praktische Verwendbarkeit der Jülichformel.

d) Der GAU

Nach den Wahrscheinlichkeitsüberlegungen des Aufgabenteils c) tritt ein GAU (Ablauf (a)) mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit auf.
Wir wollen den Zeitraum von Jahren berechnen, in dem mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens 95,5% mindestens ein Störfall auf der Welt auftritt.
(Benutzen Sie dabei die folgenden Daten: Die Zahl von 500 aktiven KKWs auf der gesamten Welt soll konstant bleiben, jedes KKW erleide mit der Wahrscheinlichkeit $p_{GAU} = 2 \cdot 10^{-14}$ einen GAU pro Jahr.)

Unterrichtliche Voraussetzungen
Notwendige Kenntnisse: Binomialverteilung, Sicherheitswahrscheinlichkeit, σ-Umgebungen, stochastische Interpretation von Sachzusammenhängen.

Erwartungshorizont
Teil a) verlangt Orientierungswissen (vgl. Kapitel 3.2.1) (Anforderungsbereich II). Die Lösung von Teil b) überprüft eingeübte Kenntnisse zur Binomialverteilung und zu den Eigenschaften von σ-Umgebungen (Anforderungsbereich I). Im Teil c) wird auf elementarer Basis eine kritische, wertende Auseinandersetzung mit Berechnungsformeln erwartet (Anforderungsbereich I, II). Im Teil d) soll der Mindestumfang einer Stichprobe berechnet werden (Anforderungsbereich II, III). Hier genügt es nicht, in eine bekannte Formel einzusetzen. Der Schwerpunkt des Aufgabenteils liegt in der schlüssigen Darstellung der Überlegungen, die zum Ansatz führen (Anforderungsbereich III).

Beispiel 6 (Leistungskurs)

Artikel aus der Frankfurter Rundschau vom 27.11.1984

Feste Bindung nicht gefragt
Umfrage unter jungen Männern: Ernährerrolle wird abgelehnt
Hamburg, 26 November (AP).

Junge Männer von heute haben anscheinend ein völlig anderes Rollenverständnis als ihre Väter. Das jedenfalls zeigt das Ergebnis einer repräsentativen Umfrage der Zeitschrift ‘Brigitte’ unter 4000 Personen ab 14 Jahren durch das Sample-Institut. Danach wird von vielen jungen Leuten abgelehnt, was für ihre Väter noch eine Selbstverständlichkeit war, nämlich heiraten, eine Familie gründen und diese ernähren. 40 Prozent der jungen Männer unter 25 geben an, keine feste Bindung zu suchen. Mehr als die Hälfte finden es nicht wichtig, einmal eine Familie zu ernähren.

Ganz anders die Männer über 55. In großer Mehrheit stimmen sie für die dauerhafte Beziehung. Nur 14 Prozent der über 55-jährigen Männer halten es nicht mehr für erstrebenswert, sich auf Dauer zu binden.

Die Erwartungen der jungen Frauen decken sich weit gehend mit den Wünschen der jungen Männer. Die feste Bindung ist auch für 35 Prozent der Frauen unter 25 nicht erstrebenswert. Noch weniger Frauen (35 Prozent) als Männer (41 Prozent) unter 25 erwarten, dass der Mann die Rolle des Familienernährers übernimmt.

Unterdessen sind junge Männer auch bereit, die Frauen im Haushalt zu unterstützen. Nur jeder fünfte Mann unter 25 lehnt es ab, die Hälfte der Hausarbeit zu übernehmen, was von fast allen Frauen (93 Prozent) erwartet wird. Hausfrauentätigkeit wird aber von Frauen durchweg höher bewertet als von Männern. Während 63 Prozent der jungen Männer und 79 Prozent der über 55-jährigen Männer angaben, Hausfrauentätigkeit sei für sie genauso viel wert wie Berufstätigkeit, meinten dies 69 Prozent der jungen Frauen und 88 Prozent der Frauen über 55 Jahre.

Aufgabenstellung

a) Erläutern Sie zunächst, inwiefern sich Wahrscheinlichkeiten als „Grenzwerte" relativer Häufigkeiten deuten lassen.

Legen Sie für die nachfolgenden Berechnungen die in dem Artikel angegebenen relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zu Grunde.

b) Der Leistungskurs Mathematik hat 12 junge Männer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   - mindestens die Hälfte der männlichen Kursteilnehmer keine feste Bindung sucht
   - maximal die Hälfte die Teilung der Hausarbeit ablehnt?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würden mindestens 290 von insgesamt 300 Oberstufenschülerinnen von den Männern die Teilung der Hausarbeit erwarten?

d) Eine Oberstufenschülerin behauptet, dass mehr als ein Drittel der jungen Frauen feste Bindungen nicht für erstrebenswert hält. Trifft diese Behauptung mit einer Sicherheit von 98 % zu?
   Mangels entsprechender Angaben wird angenommen, dass von den 4000 befragten Personen 1000 Frauen unter 25 Jahre gewesen sind.

e) Geben Sie das 95,5%-Konfidenzintervall für den Anteil der Männer in der Gesamtbevölkerung unter 25 Jahren an, die es ablehnen, die Hälfte der Hausarbeit zu übernehmen (n = 1000).

f) Erläutern Sie, ob es zum Beispiel angesichts des Ergebnisses der Teilaufgabe e) überhaupt zulässig, und wenn ja vernünftig ist, mit den in dem Artikel genannten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zu operieren, wie das zu Beginn der Aufgabe vorgegeben wurde. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

g) Die Aufgabenteile b) und c) sind für Oberstufenschüler formuliert. Kann diese Vorgabe die Resultate in Frage stellen?

h) Prüfen Sie kritisch die Aussage des Textes „ …wird von vielen jungen Männern abgelehnt, was für ihre Väter noch eine Selbstverständlichkeit war, nämlich heiraten, eine Familie gründen und diese ernähren." Wie kann diese These vom Text her begründet werden? Ist die Begründung stichhaltig?

Unterrichtliche Voraussetzungen

Notwendige Kenntnisse: relative Häufigkeiten, Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten, Zufallsgrößen und ihre Eigenschaften, Binomialverteilung, Testen von Hypothesen, Ermittlung von Konfidenzintervallen, Analyse, Strukturierung und Interpretation von Daten, die in einem Sachzusammenhang vorgegeben sind.

Erwartungshorizont
Die Teilaufgabe a) verlangt Orientierungswissen (vgl. Kapitel 3.2.1) (Anforderungsbereich II). Zur Lösung der Teilaufgaben b) bis e) ist stochastisches Denken notwendig. Die für die Standardberechnungen erforderlichen Zahlenwerte müssen dem Zeitungstext entnommen werden (Anforderungsbereich I, II). In den Aufgabenteilen f) bis h) wird eine qualifizierte Beurteilung der Ergebnisse in Verbindung mit dem gegebenen Sachzusammenhang erwartet. Insbesondere die kritische Reflexion der Voraussetzungen, die den Berechnungen zu Grunde liegen, beinhaltet einen erhöhten Anspruch (Anforderungsbereich III).

5.4 Die mündliche Abiturprüfung

Für die mündliche Abiturprüfung gelten im Grundsatz die gleichen Anforderungen wie für die schriftliche Prüfung.

Die Prüfung ist insgesamt so anzulegen, dass der Prüfling
- sicheres geordnetes Wissen
- Vertrautheit mit der Arbeitsweise des Faches
- Verständnis und Urteilsfähigkeit
- selbstständiges Denken
- Sinn für Zusammenhänge des Fachbereichs
- Darstellungsvermögen

beweisen kann.

Verfahren und Gestaltung der mündlichen Prüfung sind in den §§ 37 und 38 APO-GOSt und den dazugehörigen Verwaltungsvorschriften beschrieben. Der Prüfling soll in einem ersten Teil versuchen, die Lösung der vorbereiteten Aufgabe zusammenhängend vorzutragen. In einem zweiten Teil sollen vor allem größere fachliche und fachübergreifende Zusammenhänge in einem Prüfungsgespräch angesprochen werden. Beide Prüfungsteile sollten zeitlich etwa gleichen Umfang haben. Die Prüfung ist insgesamt so anzulegen, dass der Prüfling prinzipiell jede Note erreichen kann.

5.4.1 Aufgabenstellung für den ersten Teil der mündlichen Prüfung

Die Aufgabe für den ersten Prüfungsteil kann in Teilaufgaben gegliedert werden. Verschiedene Anforderungsbereiche müssen gesichert werden. Offene Aufgabenstellungen, die verschiedene Lösungen gegebenenfalls auf unterschiedlichem Niveau erlauben, sind möglich. Günstig ist es, wenn etwa eine letzte Teilaufgabe geeignete Anknüpfungspunkte für das anschließende Prüfungsgespräch bietet.

Der Umfang der gestellten Aufgabe muss bewusst begrenzt werden. Der rechnerische Aufwand ist gering zu halten. Die Darstellung und Begründung von Sachverhalten soll im Vordergrund stehen. Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, eine

Aufgabe zu stellen, die zur Lösung den Einsatz eines Rechners erfordert. Die Vorbereitungszeit kann bei Bedarf angemessen verlängert werden.

Beim Vortrag der Lösung kommt es nicht nur auf fachliche Richtigkeit an, sondern auch auf die verständige Erläuterung und Begründung von Ansätzen und einzelnen Lösungsschritten. In der Vorbereitung entstandene Rechnungen können durch Übernahme von Zwischenergebnissen aus dem Konzept verkürzt dargestellt werden. Hierbei hat sich der Einsatz von Overheadfolien bewährt. Die Prüferin oder der Prüfer hält sich in diesem Teil der Prüfung weit gehend zurück und greift nur dann ein, wenn es unbedingt notwendig erscheint. Der Prüfungsvorsitzende muss darauf achten, dass der Prüfling eine eigenständige Leistung erbringt, die eine gesicherte Benotung ermöglicht.

5.4.2 Gestaltung des zweiten Teils der mündlichen Prüfung

Von der Thematik des ersten Prüfungsteils kann die Prüferin oder der Prüfer zum zweiten Prüfungsteil überleiten. Dies ist zum Beispiel möglich, indem die Prüferin oder der Prüfer einen speziellen Aspekt aus dem ersten Prüfungsteil kurz aufgreift und daran anknüpft (z. B. werden Unklarheiten aus dem Schülervortrag angesprochen oder Anschlussfragen gestellt). Für den zweiten Prüfungsteil gilt noch ausdrücklicher als für den ersten, dass Rechnungen zu Gunsten der Darstellung fachlicher Zusammenhänge zurückgedrängt werden müssen. Lohnende Aspekte für ein Prüfungsgespräch sind z. B. die Erläuterung und Beurteilung von Lösungsverfahren sowie der Vor- und Nachteil von Kalkülen, Verallgemeinerungen von konkreten Sachverhalten und qualitative Betrachtungen. Die Erläuterung von Begriffen und zentralen Ideen oder die Darstellung von Orientierungswissen sind besonders zu empfehlen. Isolierte Rechnungen sind zu vermeiden.

5.4.3 Bewertung der Prüfungsleistungen

Für die Bewertung der mündlichen Prüfung gelten im Wesentlichen die gleichen fachlichen Gesichtspunkte wie für die schriftliche Prüfung, beispielsweise:

- Umfang und Qualität der mathematischen Kenntnisse
- Sicherheit im Einsatz mathematischer Arbeitsmethoden
- verständliche Darlegung, angemessener Ausdruck, Beherrschung der Fachsprache
- Fähigkeit, das Wesentliche herauszustellen
- Übersichtliche Anordnung informativer Skizzen und ihre Verwendung
- Grad der Selbstständigkeit.

Daneben sind aber auch zu berücksichtigen:

- Gliederung des Vortrags
- Übernahme einer Partnerrolle im Prüfungsgespräch
- Eingehen auf Fragen und Einwände, Aufgreifen von Anregungen und Hilfen
- Begründen des eigenen Standpunkts.

5.4.4 Beispiele für Prüfungsaufgaben in der mündlichen Abiturprüfung

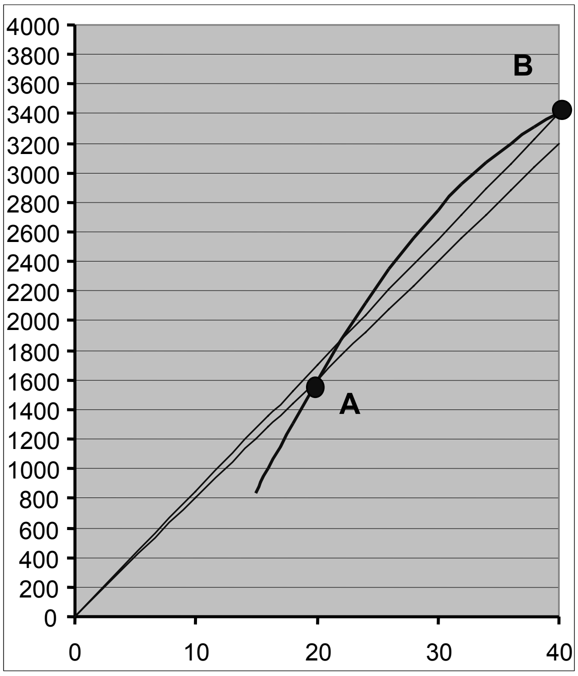
Beispiel 1

Aufgabenstellung

Auf einem Waldgrundstück pflanzt man 750 junge Bäume pro ha. Die Produktion P pro ha wird angenähert berechnet durch die Vorschrift:

$P = -2{,}5\,t^2 + 240\,t - 2200,\ 15 \le t \le 40$

Hierbei ist P die Produktion in m³ pro ha und t die Zeit in Jahren.



a) Wir nehmen an, dass die Bäume nach 20 Jahren gefällt werden. Wie groß ist dann die Produktion in m³ pro ha?

b) Berechnen Sie die mittlere Produktion pro Jahr $\overline{P}$, wenn man nach 40 Jahren die Bäume schlägt. Zeigen Sie, dass diese mittlere Produktion gleich der Steigung der Geraden OB ist (B = (40|P(40))).

c) Nehmen Sie einen beliebigen Punkt Q auf dem Graphen und lassen Sie die t-Koordinate von Q von 15 bis 40 steigen. Ist die Steigung der Geraden OQ dann zunehmend?

d) Lesen Sie aus der Figur ab, für welche t die Steigung der Geraden OQ maximal ist. Welche besondere Linie ist in diesem Fall die Gerade OQ?

e) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die mittlere Produktion maximal ist.

f) Wann sollte man, Ihrer Meinung nach, die Bäume fällen?

Unterrichtliche Voraussetzungen

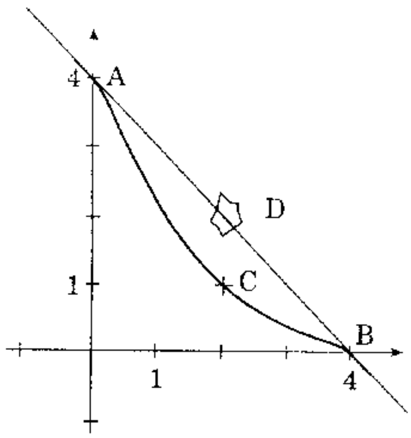
Notwendige Kenntnisse: Kurvenverlauf ganzrationaler Funktionen, Steigung, Extremwertprobleme, Interpretation der Eigenschaften von Graphen bei vorgegebener Modellierung.

Erwartungshorizont

Der rechnerische Teil der Aufgabe überprüft Routinetechniken aus der Differentialrechung. Die besondere Schwierigkeit der Aufgabe besteht in der Interpretation und Auswertung des mathematischen Gehalts für den Sachzusammenhang (Anforderungsbereich III).

Beispiel 2

Aufgabenstellung



(Einheit 1 km)

Um die Ortschaft D, die an der geraden Straße durch A(0|4) und B(4|0) liegt, wird eine Umgehungsstraße gebaut. Diese soll in A und B tangential in die alte Straße münden und durch den Punkt C(2|1) gehen.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Computerprogramms eine ganzrationale Funktion f vom Grad 4, deren Graph den obigen Bedingungen entspricht. Erläutern Sie ihren Ansatz.

b) Plotten Sie die Graphen von f, f' und f'' in ein Koordinatensystem. Erläutern Sie daran die Zusammenhänge zwischen f'', f' und f und ziehen Sie Schlussfolgerungen für markante Punkte des Graphen von f.

c) Untersuchen Sie, ob die neue Straße in A und B „ruckfrei" in die alte Straße übergeht.

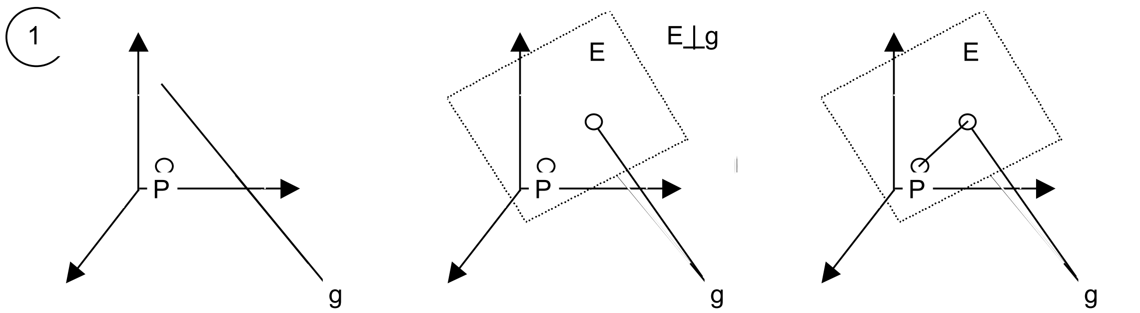
d) Wie groß ist die Fläche zwischen den beiden Straßen? Erläutern Sie Ihren Ansatz.

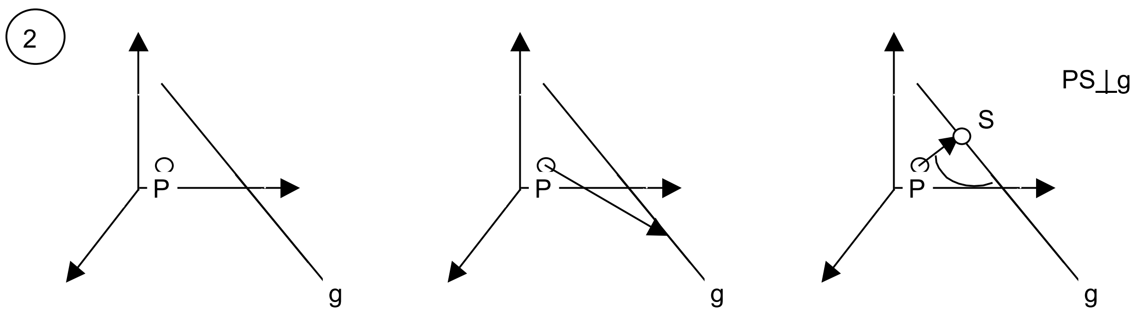
Unterrichtliche Voraussetzungen
Notwendige Kenntnisse: Funktionsbestimmung, Interpolation, Extrapolation, Flächenbestimmung durch Integration, Arbeit mit einem Computerprogramm.

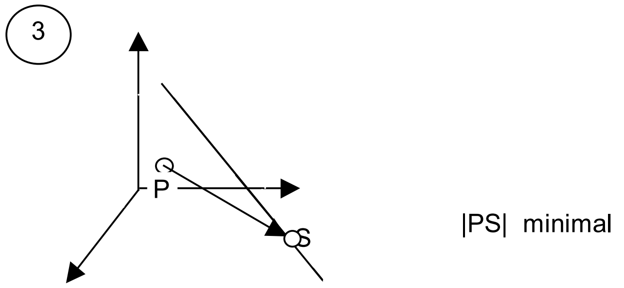
Erwartungshorizont
Funktionsbestimmungen sowie die Lösung von Gleichungssystemen und die Flächenbestimmung durch Integration mit einem Computerprogramm sind Routinetechniken. Im Aufgabenteil b) wird Orientierungswissen (graphische Zusammenhänge von Funktionen und Ableitungen) überprüft. Die Beurteilung der „Brauchbarkeit" der ermittelten Funktion an den markanten Punkten, besonders bzgl. des „ruckfreien Übergangs" setzt ein erhöhtes fachliches Verständnis voraus.

Beispiel 3

Aufgabenstellung
In den folgenden drei Bildfolgen werden drei verschiedene Ideen dargestellt, wie der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden g: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + x \cdot \mathbf{b}$, $x \in \mathbb{R}$, berechnet werden kann. Die zweite Idee wurde im Unterricht besprochen.







a) Erläutern Sie die drei Ideen.
   Geben Sie dazu stichwortartig in Form eines Arbeitsplans die einzelnen Arbeitsschritte an, die für jede Idee erforderlich sind, um den Abstand zu berechnen.

b) Führen Sie Idee 1 oder Idee 3 für die folgenden Daten aus:

$$P = (1|2|1),\ \vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Unterrichtliche Voraussetzungen
Notwendige Kenntnisse: Analytische Geometrie der Geraden und Ebenen, Abstandsprobleme.

Erwartungshorizont
Die Bildfolgen werden während der Prüfung projiziert. Zunächst wird – gesteuert durch die Bildfolgen – Orientierungswissen zur Linearen Algebra/Geometrie (Geraden, Ebenen, Abstände, Senkrecht-Stehen) und zur Analysis (Extremwertproblem) überprüft. In der konkreten Abstandsberechnung müssen eingeübte Begriffe und Techniken zielgerichtet miteinander verknüpft werden.

Beispiel 4

Aufgabenstellung
Ein Laplace-Würfel wird 300-mal geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 50-mal eine „Eins" zu werfen?

b) Bestimmen Sie für den Laplace-Würfel den Ablehnungsbereich für die Hypothese H_1: $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$ (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$).

c) Der Laplace-Würfel und ein verfälschter Würfel liegen nebeneinander auf dem Tisch. Für den verfälschten gilt $P(\{1\}) = 0{,}3$. Es soll festgestellt werden, welcher Würfel der verfälschte ist.
Stellen Sie hierzu für beide Hypothesen einen Annahmebereich auf (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$). Wie könnte auf Grund dieser Bereiche ein Entscheidungsverfahren aussehen?

d) Welche Schwäche hat das Verfahren aus Teil c)? Wie kann man es verbessern?

Unterrichtliche Voraussetzungen
Notwendige Kenntnisse: Erwartungswert, Standardabweichung, Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung, ein- und zweiseitiger Hypothesentest.

Erwartungshorizont
In den Teilaufgaben a) und b) sind Standardrechnungen durchzuführen. Auch die Ermittlung der Annahmebereiche in c) ist Routine. Das Problem, das sich dann stellt, besteht darin, dass ein Entscheidungsverfahren gefordert wird, obwohl die Annahmebereiche disjunkt sind und die vorgegebene Grundmenge der Zahlen von 0 bis 300 nicht überdecken. Insbesondere in einem mittleren Bereich müssen auf dem vorgegebenen Signifikanzniveau beide Hypothesen abgelehnt werden. Der Prüfling muss sich nun für eine Zahl z entscheiden, die als Grenze für einen einseitigen Test im folgenden Sinn verwendet wird: "Der Würfel gilt als verfälscht genau dann, wenn die Anzahl der gewürfelten Einsen größer als z ist." Die dabei auftretenden (möglicherweise unterschiedlichen) Fehler können errechnet werden. Sie lassen sich verkleinern (Teilaufgabe d)), wenn man die Anzahl der Würfe erhöht.

5.5 Die besondere Lernleistung

Die Absicht, eine besondere Lernleistung zu erbringen, muss spätestens am Ende der Jahrgangsstufe 12 bei der Schule bzw. bei der Schulleiterin oder beim Schulleiter angezeigt werden. Die Schulleitung entscheidet in Abstimmung mit der Lehrkraft, die als Korrektor vorgesehen ist, ob die beantragte Arbeit als besondere Lernleistung zugelassen werden kann. Die Arbeit ist nach den Maßstäben und dem Verfahren für die Abiturprüfung zu korrigieren und zu bewerten. In einem Kolloquium, das im Zusammenhang mit der Abiturprüfung nach Festlegung durch die Schule stattfindet, stellt der Prüfling vor einem Fachprüfungsausschuss die Ergebnisse der besonderen Lernleistung dar, erläutert sie und antwortet auf Fragen. Die Endnote wird auf Grund der insgesamt in der besonderen Lernleistung und im Kolloquium erbrachten Leistungen gebildet, eine Gewichtung der Teilleistungen findet nicht statt. Bei Arbeiten, an denen mehrere Schülerinnen und Schüler beteiligt waren, muss die individuelle Schülerleistung erkennbar und bewertbar sein.
Beschrieben wird die besondere Lernleistung in Kapitel 3.2.4.

6 Hinweise zur Arbeit mit dem Lehrplan

Aufgaben der Fachkonferenzen

Nach § 7 Abs. 3 Nr. 1 des Schulmitwirkungsgesetzes entscheidet die Fachkonferenz über

- Grundsätze zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit sowie über
- Grundsätze zur Leistungsbewertung.

Die Beschlüsse der Fachkonferenz gehen von den im vorstehenden Lehrplan festgelegten obligatorischen Regelungen aus und sollen die Vergleichbarkeit der Anforderungen sicherstellen. Hierbei ist zu beachten, dass die Freiheit und Verantwortung der Lehrerinnen und Lehrer bei der Gestaltung des Unterrichts und der Erziehung durch Konferenzbeschlüsse nicht unzumutbar eingeschränkt werden dürfen (§ 3 Abs. 2 SchMG).

Die Fachkonferenz berät und entscheidet z. B. in den folgenden Bereichen:

- Präzisierung der fachlichen Obligatorik und Maßnahmen zur Sicherung der Grundlagenkenntnisse
- Absprachen zu den fachspezifischen Grundlagen der Jahrgangsstufe 11
- Absprachen über die konkreten fachspezifischen Methoden und Formen selbstständigen Arbeitens
- Absprachen über den Rahmen von Unterrichtssequenzen
- Absprachen über die Formen fachübergreifenden Arbeitens und den Beitrag des Faches zu fächerverbindendem Unterricht
- Koordination des Einsatzes von Facharbeiten
- Absprachen zur besonderen Lernleistung.

Im Fach Mathematik sind Beschlüsse über das Abschlussniveau in Jahrgangsstufe 11 sowohl in inhaltlicher wie auch in methodischer Hinsicht erforderlich, damit der Unterricht in den Leistungs- und Grundkursen der Qualifikationsphase nicht durch ungleiche Lernvoraussetzungen der Kursteilnehmer erschwert wird. Die entsprechenden Festlegungen sind für die Lehrerinnen und Lehrer bindend. Im Hinblick auf die Weiterentwicklung und attraktive Gestaltung des Mathematikunterrichts können die Fachkonferenzen wichtige Beiträge leisten.

Grundsätze zur Leistungsbewertung

Grundsätze und Formen der Lernerfolgsüberprüfung sind in Kapitel 4 behandelt worden. Es ist die Aufgabe der Fachkonferenz diese Grundsätze nach einheitlichen Kriterien umzusetzen.

Beschlüsse beziehen sich

- auf den breiten Einsatz von Aufgabentypen
- auf das Offenlegen und die Diskussion der Bewertungsmaßstäbe

- auf gemeinsam gestellte Aufgaben bei Klausuren und im Abitur
- auf die beispielhafte Besprechung korrigierter Arbeiten.

Beiträge der Fachkonferenzen zur Schulprogrammentwicklung und zur Evaluation schulischer Arbeit

Aussagen zum fachbezogenen und fachübergreifenden Unterricht sind Bestandteil des Schulprogramms. Die Evaluation schulischer Arbeit bezieht sich zentral auf den Unterricht und seine Ergebnisse. Die Fachkonferenz spielt deshalb eine wichtige Rolle in der Schulprogrammarbeit und bei der Evaluation des Unterrichts. Dabei sind Prozess und Ergebnisse des Unterrichts zu berücksichtigen. Die Fachkonferenz definiert die Evaluationsaufgaben, gibt Hinweise zur Lösung und leistet insoweit ihren Beitrag zur schulinternen Evaluation.

Register