Arbeitsauftrag

a) **Praktischer Teil**: Stellt 50 Trinkbecher möglichst dicht in die Kiste. Ihr sollt anschließend aus mittlerer Entfernung mit Murmeln auf die Trinkbecher werfen, bis ihr 20-mal getroffen habt (wenn keine Murmel daneben fällt reichen also 20 Würfe…). Versucht nicht auf einen speziellen Becher zu zielen. Berechnet anschließend die relative Häufigkeit, mit der ein Becher keinmal getroffen wird, ein Becher genau einmal getroffen wurde, ein Becher genau 2-mal getroffen wird etc. Wiederholt diesen Versuch 2- bis 3-mal um durch Mittelungvernünftige Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

b) **Theoretischer Teil:** Die Zufallsgröße „X = Anzahl der *k*-fach Treffer“ kann auch berechnet werden. Betrachtet zuerst die Spezialfälle „Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher *k*-mal getroffen wird“ (mit *k*=0, 1 und 2). Wie lautet die allgemeine Formel?

Arbeitsauftrag

a) **Praktischer Teil**: Stellt 50 Trinkbecher möglichst dicht in die Kiste. Ihr sollt anschließend aus mittlerer Entfernung mit Murmeln auf die Trinkbecher werfen, bis ihr 20-mal getroffen habt (wenn keine Murmel daneben fällt reichen also 20 Würfe…). Versucht nicht auf einen speziellen Becher zu zielen. Berechnet anschließend die relative Häufigkeit, mit der ein Becher keinmal getroffen wird, ein Becher genau einmal getroffen wurde, ein Becher genau 2-mal getroffen wird etc. Wiederholt diesen Versuch 2- bis 3-mal um durch Mittelungvernünftige Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

b) **Theoretischer Teil:** Die Zufallsgröße „X = Anzahl der *k*-fach Treffer“ kann auch berechnet werden. Betrachtet zuerst die Spezialfälle „Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher *k*-mal getroffen wird“ (mit *k*=0, 1 und 2). Wie lautet die allgemeine Formel?

Arbeitsauftrag

a) **Praktischer Teil**: Stellt 50 Trinkbecher möglichst dicht in die Kiste. Ihr sollt anschließend aus mittlerer Entfernung mit Murmeln auf die Trinkbecher werfen, bis ihr 20-mal getroffen habt (wenn keine Murmel daneben fällt reichen also 20 Würfe…). Versucht nicht auf einen speziellen Becher zu zielen. Berechnet anschließend die relative Häufigkeit, mit der ein Becher keinmal getroffen wird, ein Becher genau einmal getroffen wurde, ein Becher genau 2-mal getroffen wird etc. Wiederholt diesen Versuch 2- bis 3-mal um durch Mittelungvernünftige Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

b) **Theoretischer Teil:** Die Zufallsgröße „X = Anzahl der *k*-fach Treffer“ kann auch berechnet werden. Betrachtet zuerst die Spezialfälle „Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher *k*-mal getroffen wird“ (mit *k*=0, 1 und 2). Wie lautet die allgemeine Formel?

Musterlösung

a) Ich habe den Versuch zuhause einmal durchgeführt. Dabei hatte ich nach 20 Treffern 35 leere Becher, 9 Becher mit einem Treffer, 4 Becher mit Doppeltreffer und einen Becher mit einem Dreifachtreffer. Die relativen Häufigkeiten sind also:

$$\frac{35}{50} = 70\%, \frac{9}{50} = 18\%$$

$$\frac{4}{50} = 8\%, \frac{1}{50} = 2\%$$

b) Man wirft 20-mal. Dies ist also die „Stufigkeit" des Bernoulli Versuchs. Auf jeder Stufe gibt es die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{50}$ denselben Becher noch einmal zu treffen. Die Gegenwahrscheinlichkeit ist also $1 - p = \frac{49}{50}$.

Betrachten wir zunächst Spezialfälle:

- <u>0 Treffer</u>: 20 mal muss das Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = \frac{49}{50}$ eintreten, also $P(X = 0) = \left(\frac{49}{50}\right)^{20} \approx 66{,}7\%$
- <u>1 Treffer</u>: Jetzt haben wir also einmal das Ereignis mit $p = \frac{1}{50}$ und 19-mal das Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = \frac{49}{50}$. Allerdings kann der „Treffer" beim ersten Mal, oder beim zweiten Mal, oder… beim 20.-mal eintreten. Diese Pfadwahrscheinlichkeiten müssen also addiert werden. Zusammen:

  $$P(X = 1) = 20 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{1} \left(\frac{49}{50}\right)^{19} \approx 27{,}2\%$$
- <u>2 Treffer</u>: Jeder Pfad zu diesem Ereignis hat offensichtlich die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{50}\right)^{2} \left(\frac{49}{50}\right)^{18}$. Aber wie viele Pfade gibt es davon? Die beiden Treffer können irgendwo in der 20-stufigen Kette auftreten! Im Urnenmodell argumentiert: aus den 20 Stufen werden zwei ausgewählt. Die „Reihenfolge" ist dabei egal. Die Auswahl erfolgt jedoch „ohne zurücklegen", d.h. jede Position kann nur einmal gewählt werden! Das heißt jedoch, dass es $\binom{20}{2} = 190$ Möglichkeiten gibt. Zusammen:

  $$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{2} \left(\frac{49}{50}\right)^{18} \approx 5{,}2\%$$

<u>Zusammenfassung:</u> Die Zufallsgröße X= „k Treffer in einem Becher" ist binomialverteilt (siehe im Buch S. 405ff) mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{50}$ (weil es 50 Becher gibt) und der Stufenzahl 20. Die Fälle k=0 und k=1 werden von der Formel ebenfalls richtig berechnet. Es gilt nämlich $\binom{20}{0} = 1$

und $\binom{20}{1} = 20$. Sehr schön!