Kombinatorik
Bei komplizierten Zufallsversuchen mit vielen möglichen Ergebnissen, ist das Zeichnen eines Baumdiagramms häufig zu kompliziert. Man hilft sich hier mit sog. „Zählstrategien“, d.h. man berechnet die Anzahl der verschiedenen Ereignisse. Auf diese Weise kann man auf die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens schließen. Diesen Teil der Mathematik nennt man **Kombinatorik**.

Beispiel 1 Ein Zahlenschloss hat 4 Räder - auf jedem Rad sind die Ziffern 1 bis 8.

a) Wie viele verschiedene Kombinationsmöglichkeiten gibt es?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig die richtige Kombination zu treffen?

Beispiel 2 Bei Fußballtoto tippt man den Ausgang von 11 Partien (Heimsieg, Auswärtssieg oder unentschieden).

a) Wie viele verschiedene Tipps gibt es?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig den richtigen Tipp zu haben?
c) Wie Wahrscheinlich ist, dass man 8 Partien korrekt tippt?

Beispiel 3 Ein Passwort besteht aus 8 *verschiedenen* Buchstaben.

a) Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es (bei 26 Buchstaben)
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig das richtige Wort zu tippen?

Lösung und Verallgemeinerung
Beispiele 1 und 2
Bei diesen Fällen betrachtet man einen mehrstufigen Prozess (4-mal eine Zahl einstellen, 11-mal tippen). Bei jedem Ereignis ist die Wahrscheinlichkeit identisch. Man kann diese und ähnliche Zufallsversuche mit dem **Urnenmodell** modellieren, d.h. der Versuch wird auf das Ziehen von Kugeln aus einem Gefäß abgebildet.

Etwa das erste Beispiel: Eine „Urne“ mit 8 unterscheidbaren Kugeln, aus denen 4-mal eine Kugel gezogen und anschließend zurückgelegt wird. Beim ersten Zug gibt es 8 Möglichkeiten, beim zweiten ebenso usw. Insgesamt haben wir $8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=8^4$ unterschiedliche (und gleichwahrscheinliche) Ergebnisse. Jedes Ergebnis hat also die Wahrscheinlichkeit $p=\frac{1}{8^4}=\left(\frac{1}{8}\right)^4$. Allgemein: Bei n unterscheidbaren Kugeln und k-mal Ziehen mit Zurücklegen, gibt es n^k unterschiedliche und gleichwahrscheinliche Ergebnisse. Jedes Ergebnis hat die Wahrscheinlichkeit $p=\frac{1}{n^k}=\left(\frac{1}{n}\right)^k$

Beispiel 3
In den ersten beiden Beispielen wurden Versuche untersucht, bei denen die Wahrscheinlichkeit auf allen Stufen gleich ist. Im Urnenmodell hat man dies durch die Formulierung „*mit Zurücklegen*“ ausgedrückt. Bei jedem Zug waren somit wieder gleichviel Kugeln in der Urne. Im 3. Beispiel sollen hingegen 8 *verschiedene* Buchstaben ausgewählt werden. Für die erste Stelle hat man noch alle 26 zur Auswahl, bei der zweiten nur noch 25 u.s.w. Insgesamt gibt es also $26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19=6{,}3\cdot 10^{10}$ verschiedene Kombinationen!
Im Urnenmodell drückt man dies so aus:
Bei einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln wird k-mal **ohne** zurücklegen gezogen. Dieser Versuch hat $N=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)$ verschiedene gleichwahrscheinliche Ergebnisse. Deren Wahrscheinlichkeit ist also $p=1/N$.