

Integralrechnung und das Riemannintegral

Vorlesung zur Didaktik der
Analysis

Oliver Passon

Inhalt

- Historisches
 - Archimedes (Parabel)
 - Hippokrates („Möndchen“)
 - Cavalerie
- Aktuell
 - Berechnung
 - Hauptsatz
 - Existenz
 - Darboux Konstruktion
 - Riemannsummen
- Zum Begriff der „Integrierbarkeit“ und der „elementaren“ Integrierbarkeit
- Zusammenfassung

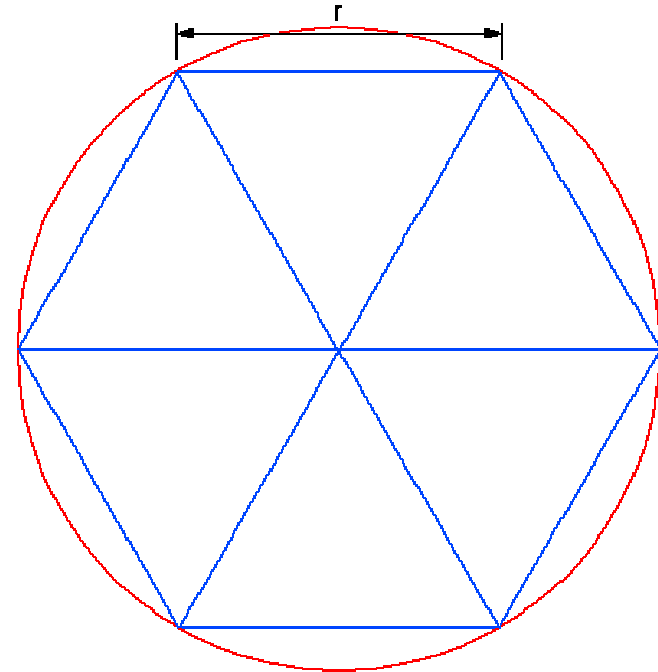
Historisches

- Flächen- und Volumenberechnung vor Entwicklung der Analysis:

Näherung von π durch Polygone
Archimedes nähert mit einem 96-Eck

$$\pi \approx \frac{223}{71} = 3,1408\dots$$

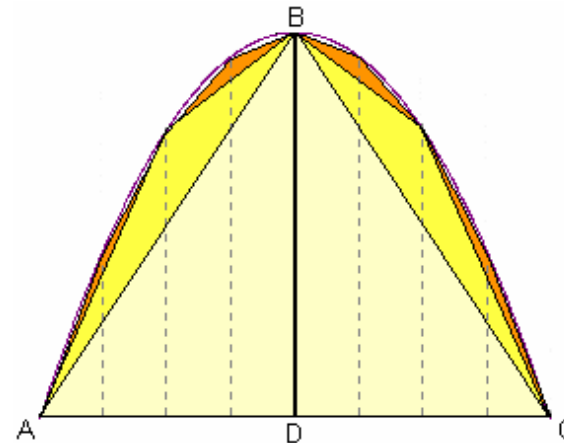
(Exhaustionsmethode)



Quadratur der Parabel durch Archimedes (Brief an Dositheos, ca. 250 v.u.Z.)

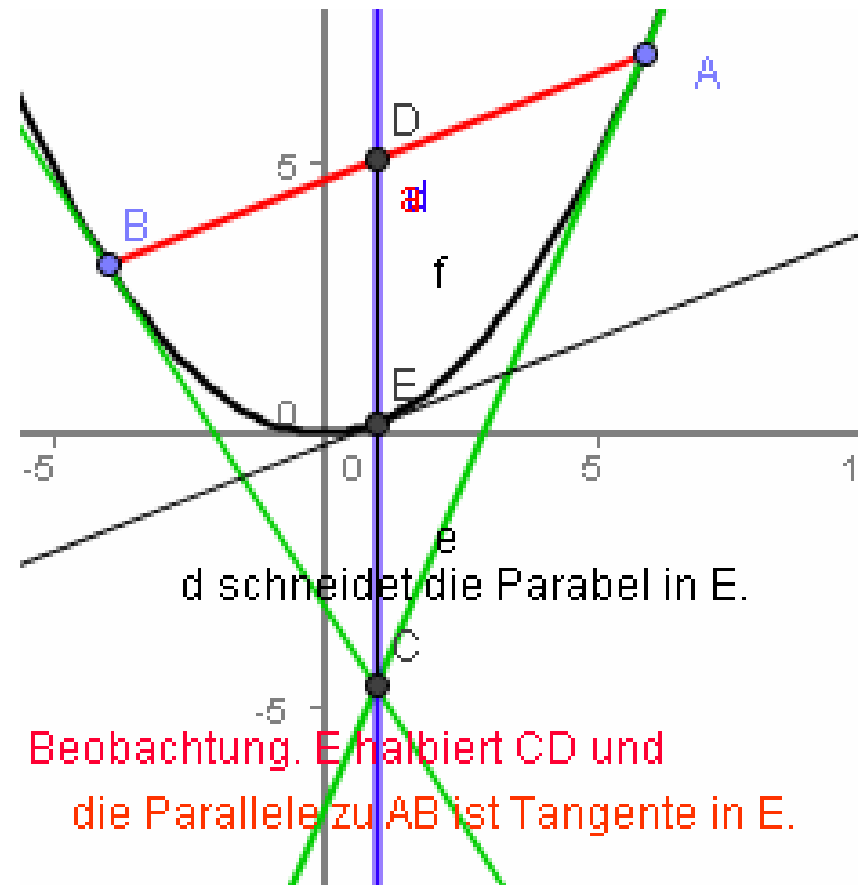
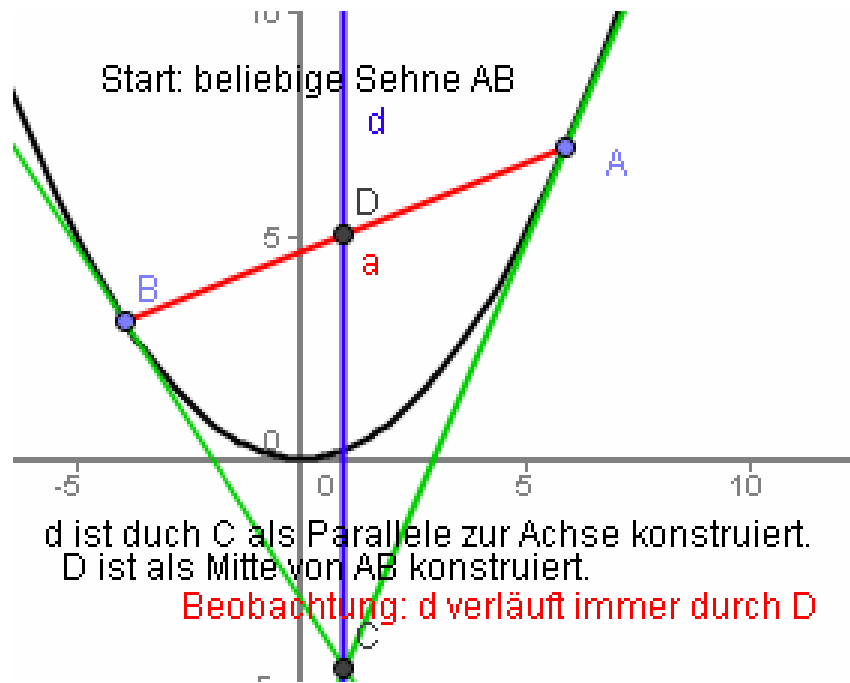
$$A_{\text{Parabel}} = \frac{4}{3} \Delta_{ABC}$$

$$A = \Delta + \frac{1}{4} \Delta + \frac{1}{16} \Delta + \dots = \frac{4}{3} \Delta$$

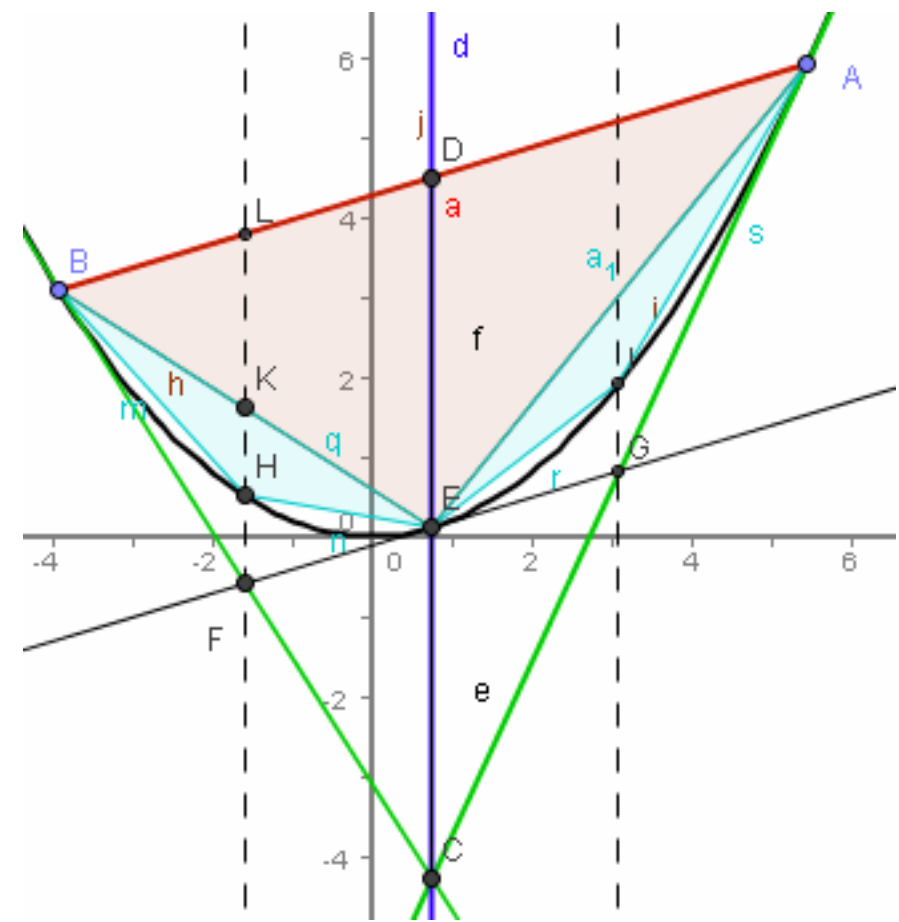
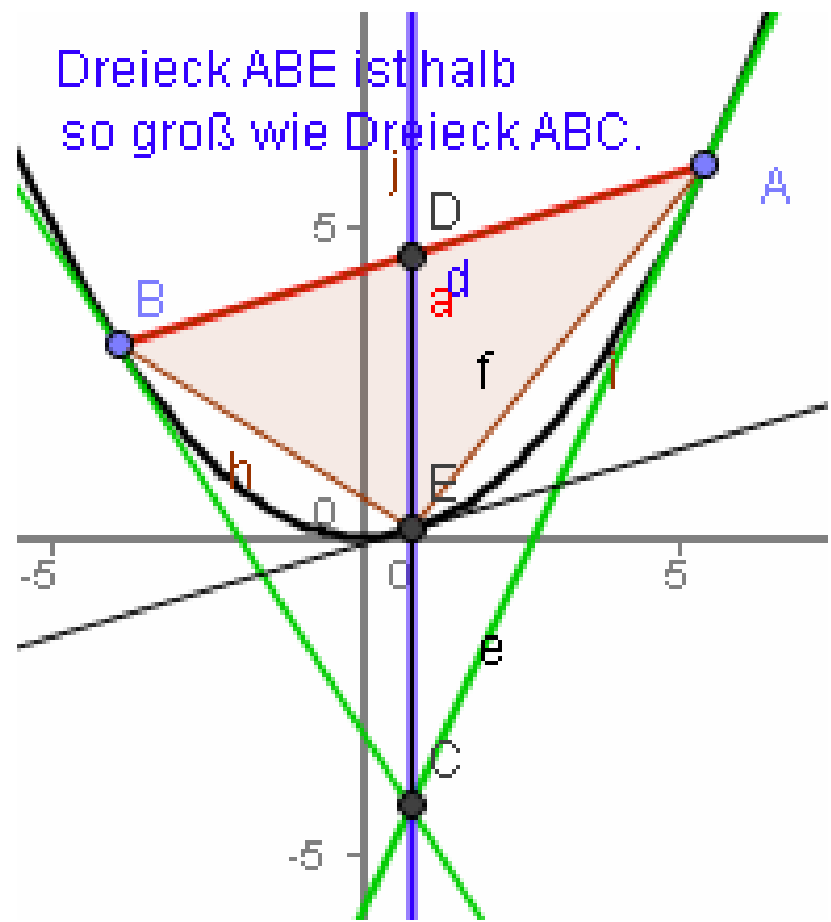


In der Antike kannte man aber noch nicht die Begriffe „**unendliche Reihe**“ und „**Grenzwert**“. Archimedes zeigt daher durch eine doppelten **Widerspruchsbeweis**, dass die Fläche des Parabelsegments nicht größer, aber auch nicht kleiner als $\frac{4}{3}$ der Dreiecksfläche sein kann.

Zur Quadratur der Parabel



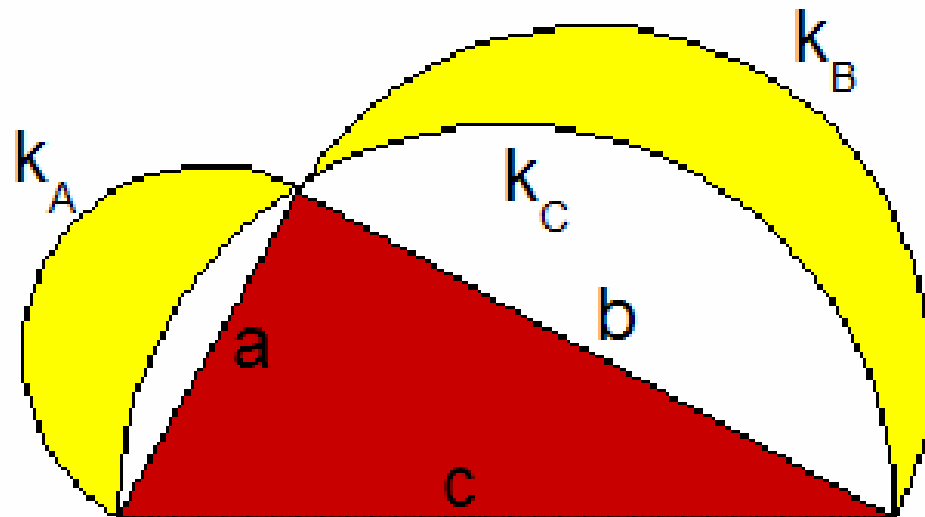
<http://haftendorn.uni-lueneburg.de/geschichte/griechen/archi-parabel.htm>



Die Mündchen des Hippokrates

Die Dreiecke k_x haben die Strecke x ($=a, b$ oder c) als Durchmesser.

Es gilt: Die gelben „Mündchen“ haben zusammen die Fläche des roten Dreiecks.



Diese Lösung legt nahe, dass auch eine „Quadratur des Kreises“ gelingen kann. Dass dieses klassische Konstruktionsproblem (mit Zirkel und Lineal) nicht durchgeführt werden kann, konnte allerdings erst 1882 von Ferdinand von Lindemann gezeigt werden!

Antike Wurzeln der Integralrechnung?

„Die antike Lehre vom Flächeninhalt der klassischen Periode, wie wir sie systematisch ausgearbeitet im ersten und sechsten Buch der „Elemente“ des Euklid (~340 - ~260) finden, unterscheidet sich wesentlich von der unsrigen insofern als in ihr der Vergleich von Flächen und nicht die Berechnung derselben im Vordergrund stand. Es wurde also mit den Flächen bzw. Figuren selbst gearbeitet und nicht mit Maßzahlen; als Methoden kommen Kongruenz und allgemeiner Zerschneiden und Zusammenfügen einerseits in Frage (im Buch I bei Euklid) zum andern aber auch Zurückführung auf Streckenverhältnisse (im Buch VI bei Euklid).“

Klaus Volkert in „Die Mönchen des Hippokrates – eine Möglichkeit zum Konstruieren und zum Arbeiten mit Flächen“

<http://www.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Moendchen.pdf>

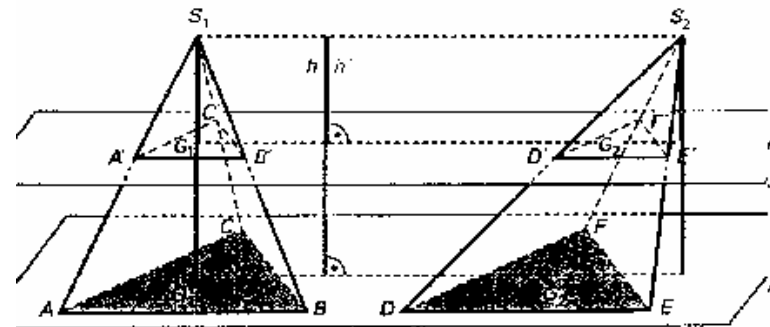
Das Prinzip von Cavalieri

„Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in entsprechenden Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.“



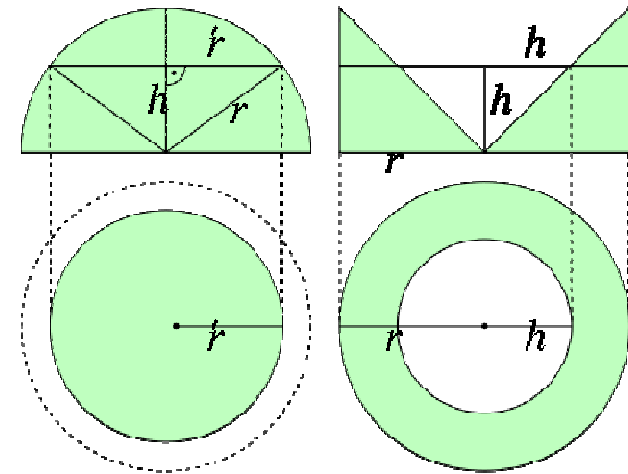
Anwendung: Pyramiden mit selber Grundfläche und Höhe haben die selbe Fläche.

Grundidee: Zerlegung in **infinitesimal** dünne Scheiben...

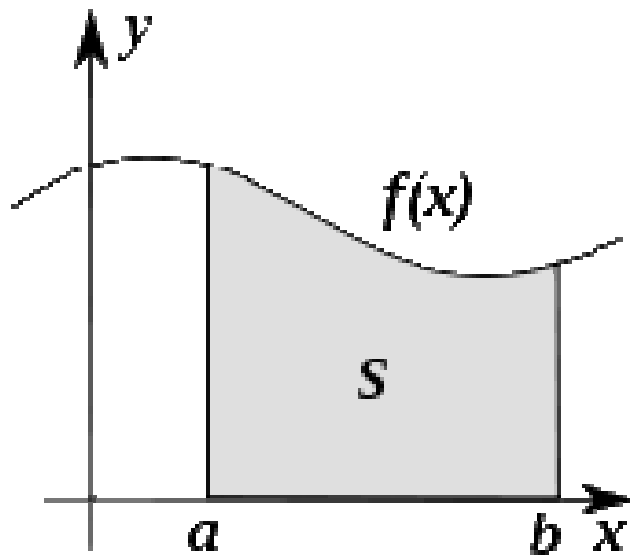


Cavalieri (1598-1647) hat sein Prinzip noch nicht streng beweisen

Beachte: das Berechnen von Volumina wird auf Flächen zurückgeführt.



Integralrechnung



(i) **Existenz** der Fläche beweisen

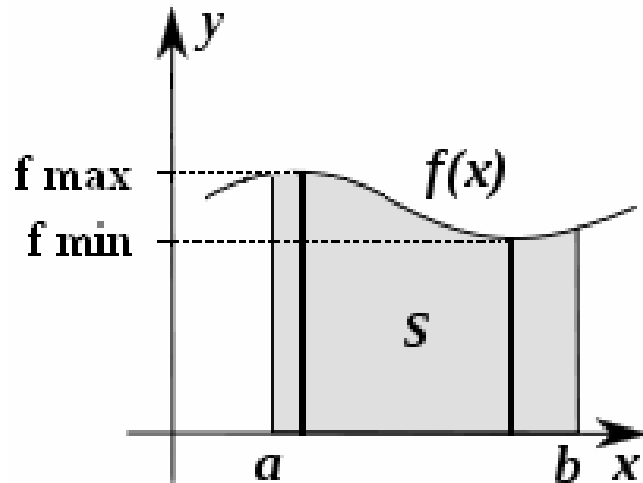
(ii) **Maßzahl** der Fläche berechnen

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Kenntnisse aus Sek I

1. S positive Zahl
2. Kongruente Figuren haben die selbe Fläche
3. Für bekannte Figuren (Rechtecke, Dreiecke, ...) sollten sich die bekannten Ergebnisse ergeben
4. Die Fläche disjunkter Figuren ist Summe der Einzelflächen.

Berechnung der Maßzahl durch den Hauptsatz:



$F(x)$ sei die Fläche unter dem Graphen von 0 bis x , also
 $S = F(b) - F(a)$

Sei f stetig und überall positiv

Satz: Eine stetige Funktion nimmt auf einem kompakten Intervall Minimum und Maximum an

$$f_{\min} \cdot (b - a) \leq F(b) - F(a) \leq f_{\max} \cdot (b - a)$$

$$f_{\min} \leq \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \leq f_{\max}$$

$$\lim_{b \rightarrow a} f_{\min} \leq \lim_{b \rightarrow a} \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \leq \lim_{b \rightarrow a} f_{\max}$$

$$f(a) = F'(a)$$

Stellung des Hauptsatzes

- Bereits von Isaac Barrow (akademische Lehrer von Newton) wurde erkannt, dass Flächen- und Tangentenberechnung in gewisser Weise invers zueinander sind (nicht explizit formuliert).
- Erste Publikation durch James Gregory 1667 („*Geometriae pars universalis*“).
- In seiner vollen Bedeutung erst durch Newton (1666 aufgezeichnet, 1686 publiziert) und Leibnitz (1677) erkannt.
- Cauchy liefert den ersten Beweis (1823 veröffentlicht).

- Man definiert: $\int f \, dx = F$
- Aus den elementaren Flächeneigenschaften (1) bis (4) folgen Relationen vom Typ:
 - Intervalladditivität
 - Linearität: $\int (af(x) + bg(x)) = a \int f(x) + b \int g(x)$
 - ...

Beachte:

Die „Orientierung“ der Fläche ist durch die bisherige Beschränkung auf *nicht-negative* stetige Funktionen noch nicht eingeführt!

Beweis der Existenz der Fläche

Das Riemannintegral kann auf zwei Wegen begründet werden:

- Unter- und Obersummen sowie Supremumsbegriff
- Riemannsummen und Grenzwertbegriff

1. Methode

f sei beschränkte Funktion auf dem Intervall $[a,b]$, die x_i seien eine Zerlegung Z dieses Intervalls. Man definiert als Ober- und Untersumme:

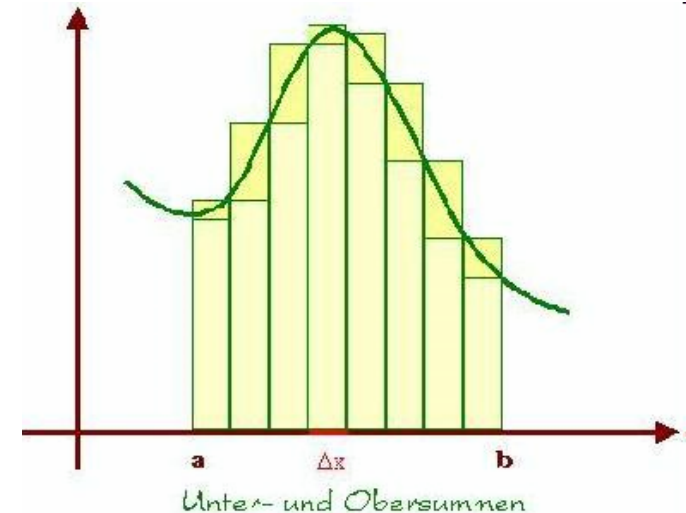
$$O(Z) := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x_{k-1} < x < x_k} f(x)$$

$$U(Z) := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x_{k-1} < x < x_k} f(x)$$



Funktion von Z!

sup= kleinste obere Schranke
inf= größte untere Schranke



Man definiert das obere (untere) Darboux-Integral durch Betrachtung aller möglichen Zerlegungen:

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx := \inf_Z O(Z)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, dx := \sup_Z U(Z)$$

Sind unteres und oberes Darboux-Integral gleich, nennt man f Riemannintegrierbar

$$\int_a^b f(x) \, dx := \underline{\int_a^b} f(x) \, dx = \overline{\int_a^b} f(x) \, dx$$

1. Methode „in Worten“:

Beachte: Die Zerlegung findet in *endlich* viele Teilintervalle statt!

Bei einer Riemannintegrierbaren Funktion kann man jedoch durch Unterteilung des Integrationsintervalles den Unterschied zwischen Ober- und Untersumme *beliebig* klein machen. Es gibt dann nur eine Zahl, die kleiner oder gleich jeder Obersumme und größer oder gleich jeder Untersumme ist, und diese Zahl ist das Riemannsches Integral.

2. Methode

Man nimmt Teilungspunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die Intervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ bilden eine *Zerlegung* Z des Intervalls $[a, b]$. Ihre *Feinheit* $\Phi(Z)$ ist die Länge des größten Teilintervalls:

$$\Phi(Z) = \max_{j=1, \dots, n} |x_j - x_{j-1}|.$$

Wählt man nun beliebige Zwischenpunkte $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, so nennt man

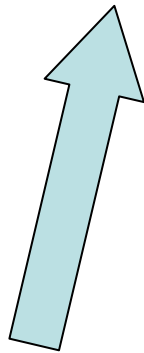
$$S = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

eine *Riemannsumme*.

Betrachte nun eine Folge von Zerlegungen Z_n , deren Feinheit Φ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, sowie die zugehörigen Riemannsummen S_n

f heißt Riemannintegrierbar, falls für beliebige Zerlegungen mit der obigen Eigenschaft S_n gegen die selbe Zahl konvergiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$



Riemannsumme für Zerlegungen, deren Feinheit gegen Null geht...

Wann ist eine Funktion Riemannintegrierbar?

- Ist eine reelle Funktion f auf $[a,b]$ **gleichmäßig stetig**, so ist sie dort Riemann-integrierbar
- Ist f auf $[a,b]$ definiert und beschränkt und hat f dort nur **endlich** viele Unstetigkeitsstellen, so ist f dort Riemann-integrierbar.
- Sind f, g auf $[a,b]$ reellwertig und Riemann-integrierbar, so sind dort auch Riemann-integrierbar: $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f,g)$, ...
- ...

Weitere Integralbegriffe:

Dirichlet Funktion:

Ist **nicht** Riemann-integrierbar, da alle Untersummen 0 und Obersummen 1 ergeben. Zudem liegen unendlich viele Unstetigkeitsstellen vor.

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion ist jedoch Lebesgue-integrierbar (mit dem Ergebnis 0). Sprich: „die rationalen Zahlen sind eine Lebesgue-Nullmenge.“

Wann ist eine Funktion „elementar“ integrierbar?

- Offensichtlich gibt es mehr integrierbare Funktionen, als differenzierbare Funktionen...
- Aber: Es existiert keine Integrationsregel, die erlaubt, aus der Stammfunktion von f und g auf die Stammfunktion von $f \cdot g$ zu schließen !

$$\int e^x \cdot \frac{1}{x} dx = ???$$

„Ob es eine Substitution gibt, und wie man sie findet, darüber lassen sich keine allgemeinen Aussagen machen; vielmehr ist hier ein Punkt wo **Übung und Geschicklichkeit** gegenüber der systematischen Methode zu ihrem Recht kommen.“
(R. Courant)

Aber was soll „elementar“ integrierbar überhaupt heißen?

Elementare Funktionen:

- Polynome
- Sinus, Kosinus, ...
- Log, e-Fkt
- ...

Dies ist im Kern eine **willkürliche** Auswahl nach dem Gesichtspunkt der Nützlichkeit!

„Wenn also das Ziel der Integralrechnung wäre, Funktionen elementar zu integrieren, so wären wir rasch am Ende dieser Kunst angelangt. Aber ein solches Ziel hat tatsächlich keine innere Berechtigung; im Gegenteil: Es haftet ihm etwas künstliches an.“

(R. Courant in „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Bd. 1“)

Vielmehr sollte der Integrationsprozess als Prinzip zur **Erzeugung** neuer Funktionen aufgefasst werden.

$$\int_1^x \frac{1}{z} dz = \ln x$$

Ein Integral, das nicht „elementar“ ausgeführt werden kann, ist wie ein Bruch, der nicht gekürzt werden kann! Er definiert eine rationale Zahl...

Zusammenfassung

- Das Problem der Integralrechnung reicht bis in die **Antike** zurück – allerdings war die damalige **Begriffswelt** vollständig anders!
- **Kaum erwähnt**: Die Flächenberechnung ist nicht die einzige Anwendung der Integralrechnung (Stichwort: Integral als **Mittelwert**, etc.pp.)
- Aus heutiger Sicht fällt die Integralrechnung in 2 Teilprobleme:
 - **Existenz** des Integrals
 - **Berechnung** des Integrals
- Aus schulischer Sicht ist das mathematische Hauptproblem (die Existenz) **schwer** zu motivieren!
- Die konkrete Zerlegung in **Treppenfunktionen** ist kein Beweis der Existenz des Flächeninhalts! Dazu müssten **beliebige** Zerlegungen untersucht werden.
- Die **handwerkliche** Schwierigkeit konkrete Integrale tatsächlich durchzuführen, sollte nicht den Blick darauf verstellen, dass „**integrierbar**“ eine **schwächere** Eigenschaft als „**differenzierbar**“ ist!