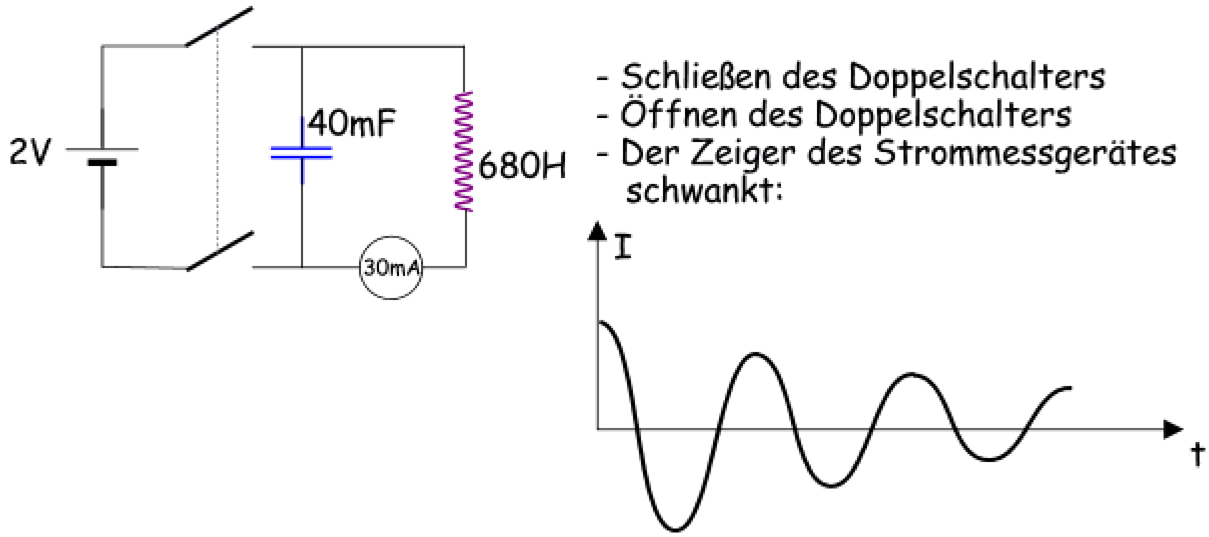
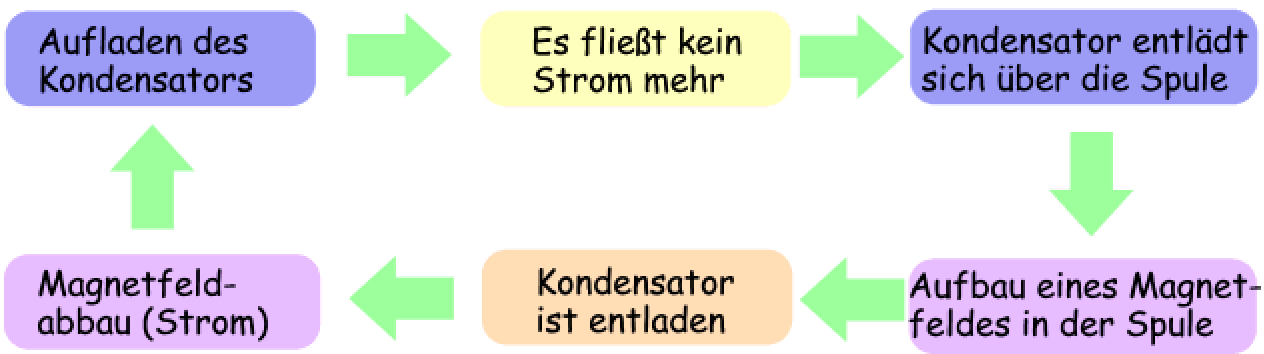
Induktion II: vom Schwingkreis zu EM-Wellen

Der Schwingkreis

An dieser Stelle kann man bereits (unter Umgehung der Wechselspannungsdiskussion in den Lehrbüchern) den Parallelschwingkreis aus Kondensator und Spule einführen! Wir hatten: $C = \frac{Q}{U}$ als Kapazität eines Kondensators kennengelernt (Einheit [C]=Farad). Schaltet man einen (aufgeladenen) Kondensator zu einer Spule parallel, entlädt sich dieser über die Spule. Dies führt zur Selbstinduktion der Spule, die entgegengesetzte Aufladung des Kondensators usw. Die Ladung „schwingt" also zwischen den Platten des Kondensators, weshalb man von einem elektrischen Schwingkreis spricht. Durch elektrische Widerstände klingt diese Schwingung jedoch rasch ab.

Dieser Zusammenhang ist in der unteren Abbildung noch einmal dargestellt.



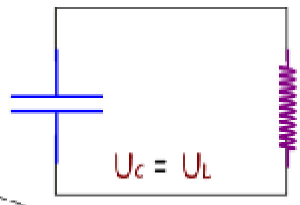


Für die mathematische Beschreibung betrachten wir nun die Ladung am Kondensator *Q(t),* durch die auch die Spannung am Kondensator festgelegt ist: $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Die Spannung an der Spule ist durch die Beziehung $U_L(t) = -L \cdot \dot{I}$ gegeben. Bei geschlossenem Schalter haben sie den gleichen Wert („Spannung in der Parallelschaltung gleich"). Daraus folgt eine Differentialgleichung für Q(t), die wir bereist aus der Behandlung des Federpendels kennen:

DGL, ungedämpft

$C = \frac{Q}{U_C}$

$U_C = \frac{Q}{C}$



$U_L = -L \cdot \dot{I}$

$$\frac{Q}{C} = -L \cdot \dot{I}$$

$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$ (1.Ableitung von Q(t))

$\dot{I} = \ddot{Q}$ (2.Ableitung von Q(t))

$$\frac{Q}{C} = -L \cdot \ddot{Q}$$

$$\boxed{\ddot{Q} = -\frac{1}{LC} Q \qquad \text{DGL}}$$

(2.Ableitung von Q(t) und Q(t) in einer Gleichung!)

Bei welcher Funktion stimmt die zweite Ableitung (bis auf Konstante und Vorzeichen) mit der Funktion überein?

Lösungsansatz: $Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$$\dot{Q}(t) = \omega\, Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{Q}(t) = -\omega^2\, Q_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

einsetzen:

$$\ddot{Q} = -\frac{1}{LC} Q$$

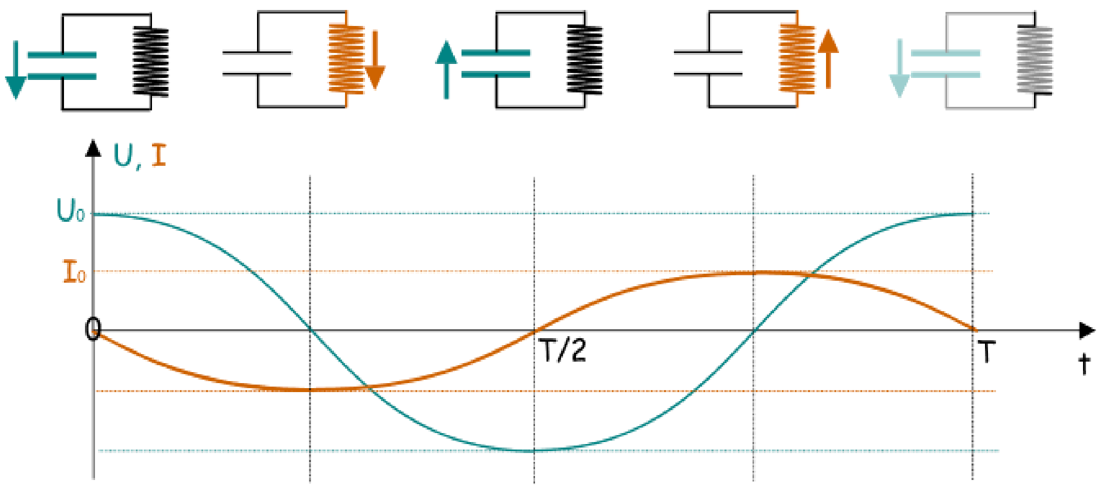
$$-\omega^2\, Q_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{1}{LC} Q_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Die Gleichung stimmt zu jedem Zeitpunkt, wenn:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \text{Thomson - Formel}}$$

$Q(t) = Q_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi\right)$ ist eine Lösung der DGL.

Wir haben also den Zusammenhang zwischen der (Kreis-)Frequenz ω und den „Kenngrößen" der Schwingkreisschaltung Kapazität C und Induktivität L gefunden: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .Die nächste Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen Spannung (am Kondensator) und der Stromstärke (etwa der Spulenstrom; aber tatsächlich ist in dieser Schaltung die Stromstärke überall gleich...) dar.



$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ $\qquad$ $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$

Während die Spannung fällt (blaue Linie) wächst die Stromstärke (vom Betrag!). Durch die Spule ist diese Entladung übrigens verzögert. Nach T/4 ist der Kondensator entladen – die Stromstärke hat einen Extremwert. Danach sinkt der Betrag der Stromstärke wieder ($\dot{I} \neq 0$) und die Induktionsspannung lädt den Kondensator mit umgekehrtem Vorzeichen wieder auf. Bei diesem Vorgang schwanken nicht nur Spannung und Stromstärke. Ebenfalls wechselt die Energie zwischen den Formen „elektrischer Energie“ $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$ (im Kondensator) und der „magnetischen Energie“ $W_{mag} = \frac{1}{2}LI^2$ (in der Spule). Mit unserer Lösung der Differentialgleichung können wir diese Energieformen genauer analysieren – und die ***Energieerhaltung*** überprüfen:

$$W_{el}(t) = \frac{1}{2} C \cdot U(t)^2 = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 \cdot \cos^2(\omega t)$$

$$W_{magn}(t) = \frac{1}{2} L \cdot I(t)^2 = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 \cdot \sin^2(\omega t)$$

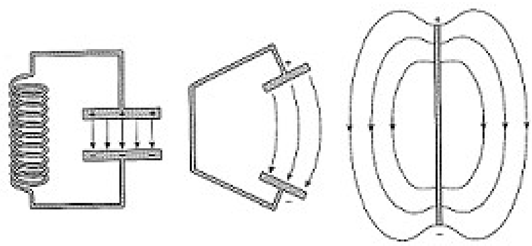
$$W_{ges}(t) = W_{el}(t) + W_{magn}(t) = \frac{1}{2}(CU_0^2 \cos^2(\omega t) + LI_0^2 \sin^2(\omega t))$$

$CU_0^2 = LI_0^2$ Maximalenergie in Kondensator (t=0) entspricht Maximalenergie in Spule (t=T/4)

$$\Rightarrow W_{ges}(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_{1} = \frac{1}{2} LI_0^2 = const$$

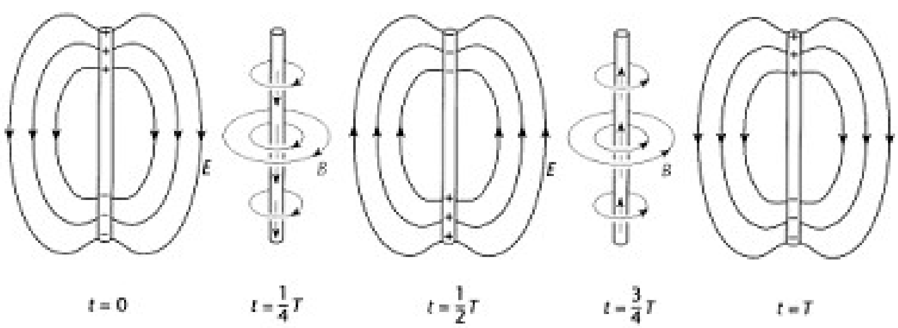
Vom Schwingkreis zum elektromagnetischen Wellen

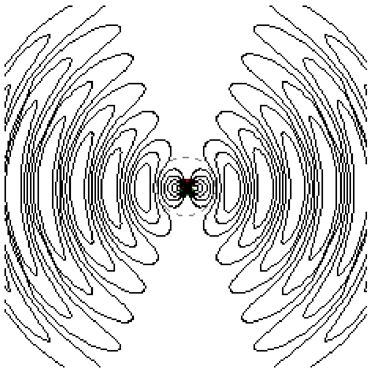
Ein Schwingkreis hat die Frequenz $\omega = \sqrt{1/(LC)}$. Um einen Schwingkreis mit hoher Frequenz zu erhalten, müssen Kapazität und Induktivität deshalb gering sein. Dies ist dadurch zu erreichen, dass die Plattenfläche des Kondensators und die Windungszahl der Spule möglichst klein gemacht werden. Im Extremfall kann man die Spulenwindungen ganz verschwinden lassen, die Kondensatorplatten aufbiegen und die Platten zu Punkten zusammenschrumpfen lassen. So erhält man einen Metallstab, in dem ein hochfrequenter Wechselstrom



fließen kann.

Bei diesem „offenen Schwingkreis“ reichen das elektrische und das magnetische Feld in den umgebenden Raum hinaus und sind nicht mehr auf den Kondensator und die Spule beschränkt. Der hochfrequent schwingende Metallstab wird *Dipol-Antenne* oder kurz *Dipol* genannt. Die Abbildung rechts unten zeigt Ladungs- und Feldverteilung während verschiedener Phasen dieser Schwingung. Das sich ändernde elektrische Feld erzeugt ein Magnetfeld (und umgekehrt). Diese Felder breiten sich im Raum aus: man spricht von **elektromagnetischen Wellen**. Dabei beträgt (bei der Grundschwingung) die zugehörige Wellenlänge die doppelte Länge des Dipols (also $\lambda = 2 \cdot l$).





Die linke Abbildung zeigt die Feldlinien des abgestrahlten E-Feldes. In der Mitte befindet sich der (senkrechte) Dipol. Natürlich braucht die Schwingung an der Dipol-Antenne eine ständige Erregung, durch einen sog. Erregerschwingkreis!

Der erste experimentelle Nachweis elektromagnetischer Wellen gelang Heinrich Hertz 1888. Er erzeugte mit einer Art Transformator Funken (bei P). Diese bewegten Ladungen wirkten wie ein Dipol. In der Abbildung sind auch die Richtungen des elektrischen und des magnetischen Feldes eingetragen. Um die Wellen nachzuweisen, benutzte Hertz einen kreisförmig gebogenen Draht mit einem kleinen Luftspalt. Dieses Gerät wird Resonator genannt. Er beobachtete, dass wenn die Fläche des Resonators senkrecht zum Magnetfeld der Welle steht, das sich zeitlich ändernde Magnetfeld eine Spannung im Resonator induziert, was zur Funkenbildung am Luftspalt führt. Durch Bewegen des Resonators längs der Geraden PQ konnte Hertz die Knoten, Bäuche und die Richtung des B-Feldes bestimmen. Aus dem Abstand zweier aufeinander folgender Knoten ergab sich die Wellenlänge. Mit der bekannten Frequenz f des Oszillators konnte Hertz dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit c bestimmen (Achtung: c nicht mit der Kapazität C verwechseln!). Es gilt nämlich $c = \lambda \cdot f$. Bei einer Erregerfrequenz von $100 MHz$ fand Hertz eine Wellenlänge von ca. $3m$.