Impuls und Impulserhaltung (Anwendung bei Stößen)

Die Untersuchung von Stoßvorgängen ist eine klassische Anwendung von Impuls und Impulserhaltung. Aber Achtung: der Impuls ist viel viel wichtiger, als diese speziellen Beispiele vermuten lassen! Wir werden später sehen („Zusammenhang zwischen Kraft, Impuls und Energie“), dass der Impuls sogar **die** Grundgröße der Mechanik ist!

Im folgenden soll immer gelten: m_1 und m_2 bezeichnen die Massen der Körper sowie v_1 und v_2 die Gechwindigkeiten **vor** und u_1, u_2 die Geschwindigkeiten **nach** dem Stoß. In der Regel sind die Massen und Anfangsgeschwindigkeiten bekannt und die Endgeschwindigkeiten werden gesucht.

Ein paar Begriffe

Bei Stößen unterscheidet man:

- **unelastischer Stoß**[1]**:** die Körper werden beim Stoß „unelastisch“ verformt, dass heißt, sie nehmen anschließend ihre ursprüngliche Form **nicht** wieder an (Bsp: Knetmasse, Sandsack, Autounfall,...). Bei diesem Vorgang ist also die Bewegungsenergie **nicht** erhalten, denn ein Teil von ihr wird in „Verformungsenergie“ etc. umgewandelt. Bei elastischen Stößen haben die Stoßpartner nach dem Stoß die selbe Geschwindigkeit („sie kleben zusammen“).
- **elastischer Stoß:** die Körper werden beim Stoß nur „elastisch“ verformt, dass heißt, sie nehmen anschließend ihre ursprüngliche Form wieder an (in guter Näherung erfüllt bei: Gummiball, aber auch Stahlkugel, Billard,...). Bei diesem Vorgang ist also auch die **Bewegungsenergie** erhalten!

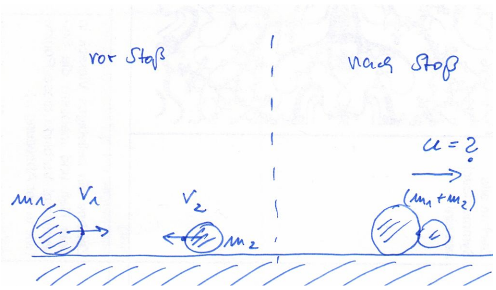
Es ist klar: reale Stöße sind Mischformen dieser Spezialfälle – man spricht auch von „teilelastischen Stößen“. Im folgenden tun wir aber so, als wenn diese Stoßformen in „Reinkultur“ auftreten. Ausserdem unterscheidet man:

- **gerader Stoß:** die Bewegung findet längs einer Linie statt.
- **schiefer Stoß:** die Bewegung findet in der Ebene statt. Es kommt ebenfalls zu „Drehbewegungen“.

Wir untersuchen hier nur gerade Stöße.

Gerader, inelastischer Stoß

Um die Geschwindigkeit u nach dem Stoß zu erhalten, setzten wir den Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß gleich (beachte: die Körper bleiben nach dem Stoß zusammen, weil es ein **un**elastischer Stoß ist! Sie haben **eine** Geschwindigkeit und die Gesamtmasse $m_1 + m_2$):



$$\begin{aligned}
\underbrace{m_1 v_1 + m_2 v_2}_{=p_{ges,vor}} &= \underbrace{(m_1+m_2)u}_{=p_{ges,nach}} \\
u &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} \\
u &= \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} v_2
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile erhält man, wenn der Bruch in 2 Brüche zerlegt wird. In der Mathematik will man meist ja das Gegenteil („Hauptnenner finden“). Hier ist die Zerlegung ganz sinnvoll, um zu sehen, wie sich die Endgeschwindigkeit aus den Anfangsgeschwindigkeiten zusammensetzt...

[1] manchmal auch „inelastischer“ oder „plastischer“ Stoß...

Spezialfälle

Was kommt raus, wenn die **Massen alle gleich** groß sind? Wir setzten $m_1 = m_2 = m$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} u &= \frac{m}{m+m}v_1 + \frac{m}{m+m}v_2 \\ u &= \frac{m}{2m}v_1 + \frac{m}{2m}v_2 \\ u &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \end{aligned}$$

Hier ist die Endgeschwindigkeit also der Mittelwert der Anfangsgeschwindigkeiten.

Nun sollen die Massen wieder verschieden sein, aber eine Anfangsgeschwindigkeit gleich Null; also der Stoß auf einen ruhenden Körper (etwa $v_2 = 0$). Dann gilt $u = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$. Angenommen m_2 (die Masse des zunächst ruhenden Körpers) ist sehr viel größer als m_1, etwa $m_1 = 1kg$ und $m_2 = 10000kg$. Wie groß ist dann die Endgeschwindigkeit? Einsetzen liefert: $u = \frac{1}{10001} \cdot v_1$. Man sieht: bei beliebig großen Massedifferenzen wird die Endgeschwindigkeit beliebig klein! Vulgo: das Auto ist vor die Mauer gefahren.

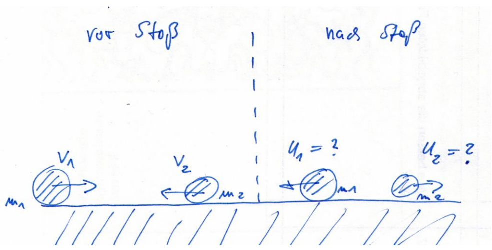
Energiebetrachtung

Bei einem unelastischen Stoß ist die Bewegungsenergie **nicht** erhalten! Ein Teil von ihr wird bei der Verformung der Stoßpartner umgewandelt. Wie groß ist dieser Teil? Wir nennen die Verformungsenergie W_i (i wie „innere Energie“). Dann gilt: $W_{B,vor} = W_{B,nach} + W_i$. Einsetzten führt auf:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 + W_i$$

In diese Gleichung kann unser Resultat für u eingesetzt werden um das Ganze nach W_i aufzulösen. Zumindest für einige der Spezialfälle (Massen gleich, ein Körper ruht) ist das eine simple Rechnung!

Gerader, elastischer Stoß



Um die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 nach dem Stoß zu erhalten, setzten wir wieder den Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß gleich:

$$\underbrace{m_1v_1 + m_2v_2}_{=p_{ges,vor}} = \underbrace{m_1u_1 + m_2u_2}_{=p_{ges,nach}}$$

Eine Gleichung mit 2 Unbekannten liefert natürlich noch kein eindeutiges Ergebnis.

Aber wir betrachten ja den **elastischen** Stoß, haben also ebenfalls die Erhaltung der Bewegungsenergie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \quad | \quad \cdot 2 \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 &= m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \end{aligned}$$

Mit diesen beiden zusammen sollte es klappen. Aber Vorsicht: dies ist **kein** lineares Gleichungssystem (LGS), denn in die Bewegungsenergie gehen ja Terme wie v_1^2 ein – also Quadrate! Der Trick besteht darin, das Ganze in ein LGS umzuwandeln. Und das geht so: Wir formen die Impuls- und Energiegleichung um, in dem wir Terme mit m_1 und m_2 zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \text{Impuls:} \quad (*) \quad m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2) \\ \text{Energie:} \quad (**) \quad m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

Bei der Energiegleichung (**) fällt uns auf, dass das 3. binomische Gesetz $((a+b)(a-b) = a^2 - b^2)$ angewendet werden kann:

$$(***) \quad m_1(v_1+u_1)(v_1-u_1) = m_2(u_2+v_2)(u_2-v_2)$$

Jetzt können wir Gleichung $(***)$ durch Gleichung $(*)$ teilen:

$$\begin{aligned}
\frac{m_1(v_1+u_1)(v_1-u_1)}{m_1(v_1-u_1)} &= \frac{m_2(u_2+v_2)(u_2-v_2)}{m_2(u_2-v_2)} \\
v_1+u_1 &= u_2+v_2
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist linear! Zusammen mit $(*)$ haben wir nun 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten. Die Aufgabe ist jetzt ein Standardproblem (Lösung: etwa eine Gleichung nach u_1 auflösen und in die andere einsetzen...). Das lösen dieser Aufgabe ist eine nette Übungsaufgabe in der Mathematik.

Man findet für die u's:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_2 \\
u_2 &= \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2
\end{aligned}$$

Ist das toll? Na ja, etwas vielleicht. Wenn man wirklich ein Gefühl für das Problem bekommen will, betrachtet man am besten wieder:

Spezialfälle

Was kommt raus, wenn die **Massen alle gleich** groß sind? Wir setzten $m_1 = m_2 = m$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
u_1 &= \underbrace{\frac{m-m}{2m}}_{=0}v_1 + \frac{2m}{2m}v_2 \\
u_1 &= v_2 \\
u_2 &= \frac{2m}{2m}v_1 + \underbrace{\frac{m-m}{2m}}_{=0}v_2 \\
u_2 &= v_1
\end{aligned}$$

Die beiden Körper haben also am Ende die Geschwindigkeit, die der andere vorher hatte. Wenn also $v_2 = 0$ war (Stoß auf einen ruhenden Körper), dann ruht nach dem Stoß der erste und der zweite bewegt sich mit $u_2 = v_1$ weiter. Diesen Vorgang kann man in guter Näherung beim Billardspielen beobachten!

Zusammenfassung

Der Impuls eines Körpers mit Masse m und Geschwindigkeit v berechnet sich einfach als $p = m \cdot v$ (oder genauer: $\vec{p} = m\vec{v}$, da der Impuls eine Vektor ist!). Impuls hat also jeder Körper der sich bewegt! Der Impuls ist eine Erhaltungsgröße. Er kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Er fließt nur woanders hin. Sehr spezielle Beispiele dafür haben wir in diesem Abschnitt untersucht, nämlich Stoßvorgänge. Bei einem Stoß findet die Geschwindigkeitsänderung abrupt statt. Mit der Impulserhaltung kann man dann die Geschwindigkeiten nach dem Stoß aus den Massen und Geschwindigkeiten vor dem Stoß berechnen.

Es stellt sich aber langsam die Frage: wie hängen Energie, Kraft und Impuls eigentlich genau zusammen?