Lösung zu Aufgabe HT 1:

a) Funktionswert und Interpretation:

Mit $f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ ergibt sich für $t = 30$ der Funktionswert
$f(30) = 0{,}02 \cdot 30^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 30} = 18 \cdot e^{-3} \approx \mathbf{0{,}896}$.
Eine 30-jährige Fichte wächst mit einer Geschwindigkeit von **fast 90 cm pro Jahr**.

Beschreibung:

Nach dem angegebenen Modell ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach der Pflanzung immer positiv, d.h., die Fichte wächst die ganze Zeit. Die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt anfangs sehr schnell zu und erreicht nach ungefähr 20 Jahren ihr Maximum. Danach wächst die Fichte langsamer, bis nach etwa 70 Jahren die Wachstumsgeschwindigkeit auf etwa 0,1 m/a gesunken ist. Mit 100 Jahren ist die Fichte praktisch ausgewachsen.

b) Berechnung des Alters der Fichte, in dem sie am stärksten wächst:

Mit der Produkt- und der Kettenregel erhält man aus
$f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$:
$f'(t) = 0{,}02 \cdot \left[2t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot (-0{,}1)\right] = e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot (0{,}04 \cdot t - 0{,}002 \cdot t^2)$.
$f'(t) = 0$ ergibt $e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot (0{,}04 \cdot t - 0{,}002 \cdot t^2) = 0$ und somit wegen $e^{-0{,}1 \cdot t} > 0$ dann
$0{,}04 \cdot t - 0{,}002 \cdot t^2 = 0$ bzw. $t\,(t - 20) = 0$. Dies liefert $t = 0$ oder $t = 20$.
Weiterhin ist $f''(0) > 0$ und $f''(20) = 0{,}0002 \cdot (20^2 - 40 \cdot 20 + 200) \cdot e^{-2} < 0$.
Damit besitzt $f(t)$ an der Stelle 20 ein relatives Maximum. Da aber $f(t)$ für $t > 0$ nur eine Extremstelle besitzt, hat $f(t)$ an der Stelle 20 ein absolutes Maximum.
Eine 20-jährige Fichte wächst am stärksten.

Größte Wachstumsgeschwindigkeit:

Es ist $f(20) = 0{,}02 \cdot 20^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20} \approx 1{,}083$.
Die größte Wachstumsgeschwindigkeit ist rund 1,08 m pro Jahr.

c) Begründung, dass die Fichte nach 20 Jahren weniger als 20 Meter hoch ist:

Der gesuchte Längenzuwachs der Fichte ergibt sich als Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f bis $t = 20$. Diese Fläche liegt innerhalb des Vierecks mit den Ecken
$O(0|0)$, $P(15|1{,}2)$, $Q(20|1{,}2)$, $R(20|0)$.
Das Viereck hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1{,}2 + 5 \cdot 1{,}2 = 15$.
Damit ist die Fichte **nach 20 Jahren deutlich weniger als 20 Meter hoch.**

Nachweis, dass F eine Stammfunktion von f ist:

Mit der Produkt- und der Kettenregel erhält man aus
$F(t) = -0{,}2 \cdot (t^2 + 20t + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -0{,}2 \cdot \left[(2t + 20) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + (t^2 + 20t + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot (-0{,}1)\right] \\
&= -0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot (2t + 20 - 0{,}1t^2 - 2t - 20) \\
&= 0{,}02 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Höhe der Fichte nach 20 Jahren:

Als Längenzuwachs nach 20 Jahren ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_0^{20} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_0^{20} &= \left[-0{,}2 \cdot (t^2 + 20t + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}\right]_0^{20} \\
&= -0{,}2 \cdot (20^2 + 20 \cdot 20 + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20} + 0{,}2 \cdot 200 \\
&\approx 12{,}93
\end{aligned}$$

Da die frisch eingepflanzte Fichte eine Höhe von ca. 20 cm hatte, ist eine Höhe von **etwas mehr als 13 m** zu erwarten.

d) Begründung, dass die Funktion F eine Wendestelle hat:

Die Funktion f hat an der Stelle 20 ein relatives Maximum (vgl. Teilaufgabe b)).
Da $F''(t) = f'(t)$ ist, hat F bei 20 eine mögliche Wendestelle.
Wegen $f''(20) < 0$ hat **F bei 20 eine Wendestelle.**

e) Maximal erreichbare Höhe der Fichte:

Für die Höhe der Fichte im Jahr z mit $z > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
h(z) = 0{,}2 + \int_0^{z} f(t)\,dt &= 0{,}2 + \left[-0{,}2 \cdot (t^2 + 20t + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}\right]_0^{z} \\
&= 0{,}2 + \left[-0{,}2 \cdot (z^2 + 20z + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot z} + 0{,}2 \cdot 200\right] \\
&= -0{,}2 \cdot (z^2 + 20z + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot z} + 40{,}2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\lim\limits_{z \to \infty} h(z) = 40{,}2$.

Nach dem vorliegenden Modell kann die Fichte **etwa 40 m** hoch werden.