Folgen, Reihen und Grenzwert

Vorlesung zur

Didaktik der Analysis

Inhalt

- Motivation
- Folgen
- Spezielle Folgen
- Grenzwertdefinition
- Wichtige Zusammenhänge und Strategien der Konvergenzuntersuchung
- Funktionengrenzwert
- Reihen
- Paradoxien und Zusammenfassung

Grenzwertbildungen sind charakteristisch für die Analysis. Im Kern handelt es sich um Approximationen, die mit formalen Mitteln „zu Ende gedacht werden“.

Etwa sind alle irrationalen Zahlen nur als Grenzwert erklärt! Zu seiner Einführung dient der Begriff der Folge:

Eine Folge ist eine Abb.

$$a : \mathrm{N} \to R$$

$$n \mapsto a_n$$

$$Bsp.:$$

$$1,1,1,1 \cdots : a_n = 1$$

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots : a_n = \tfrac{1}{n}$$

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

Spezielle Folgen:

Arithmetisches Mittel: $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$

Geometrisches Mittel: $G(a,b) = \sqrt{ab}$

Harmonisches Mittel: $H(a,b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = A^{-1}(a,b)$

Man nennt Folgen arithmetisch, geometrisch bzw. harmonisch, wenn (bis auf das erste) jedes Glied entsprechendes Mittel seiner Nachbarn ist.

Beispiele:

- (n) arithmetische Folge
- (q^n) geometrische Folge
- $(1/n)$ harmonische Folge

Die Folge a_n=1/n nähert sich offenbar immer weiter der 0. Man sagt „Null ist *Grenzwert* dieser Folge“ oder „die Folge *konvergiert* gegen Null“.

Betrachte folgendes Beispiel: $a_n = n^k \cdot q^n mit: k = 10, q = 0{,}8$

$$a_1 = 0{,}8$$

$$a_2 = 655{,}36$$

$$a_3 = 30233{,}088$$

$$\vdots$$

Frage: Hat diese Folge einen Grenzwert?
Offensichtlich muss der Begriff präzisiert werden!

Intuitiv: Folge konvergiert gegen einen Wert a, wenn
Die Folgeglieder der Zahl a beliebig nahe kommen.

Hier fehlt die Präzisierung der logischen Reihenfolge!

Zwei Möglichkeiten:

a) Für große n soll $|a_n - a|$ klein werden

b) Für eine bestimmte Fehlergrenze soll es ein Folgeglied geben, ab dem $|a_n - a|$ kleiner ist.

Man verwendet b) für die Grenzwertdefinition – und zwar
Für beliebige „Fehlergrenzen“:

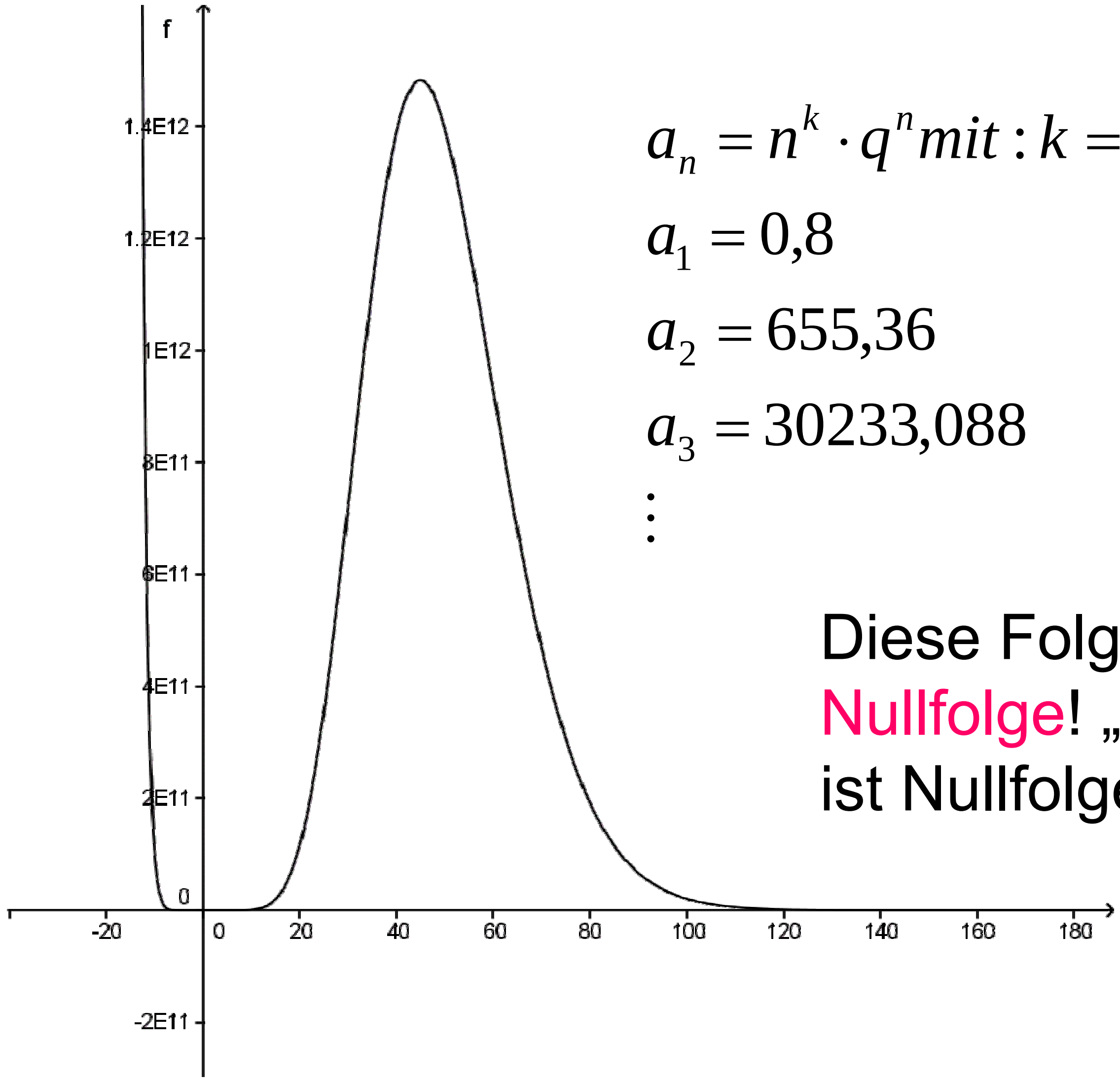
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N_\varepsilon}{\exists}\ \underset{n>N_\varepsilon}{\forall}\ |a - a_n| < \varepsilon$$

Definition: Nullfolge bei a=0: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_\varepsilon} \forall_{n>N_\varepsilon} |a_n| < \varepsilon$

(a_n) konvergiert gegen a ↔ (a_n-a) ist Nullfolge

Satz: 1/n ist Nullfolge

Beweis: für jedes ε>0 gibt es m: 1/m<ε. Setzte N_ε=m



$$a_n = n^k \cdot q^n mit : k = 10, q = 0{,}8$$

$$a_1 = 0{,}8$$

$$a_2 = 655{,}36$$

$$a_3 = 30233{,}088$$

$$\vdots$$

Diese Folge ist tatsächlich eine Nullfolge! „Grund“: q^n mit $|q|<1$ ist Nullfolge („geometrische Folge“)

Definition: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ bedeutet:

- Folge ist konvergent
- Grenzwert ist a
- ∞ ist nur ein Symbol und keine Zahl
- alle anderen Folgen heißen divergent

Zusammenhang zwischen weiteren Begriffen:

Eine Folge heißt:

- monoton fallend (steigend): $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} \geq a_n$)
- beschränkt: es gibt M, sodass für alle n: $|a_n| < M$

- Es gilt: jede konvergente Folge ist beschränkt!
- Satz: jede beschränkte monotone Folge konvergiert
- Aber: beschränkte nicht monotone Folgen konvergieren nicht: Bsp. $(-1)^n$

- Definition: a Häufungswert (HW) von (a_n) gdw. eine Teilfolge von (a_n) gegen a konvergiert.
- Satz (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte reelle Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.
- Bsp. $(-1)^n$ hat HW 1 und -1!

Strategien für den Nachweis der Konvergenz:

- Explizite Konstruktion von N_ε
- Einschließungssatz: gilt $a_n \leq b_n \leq c_n$ und a_n c_n konvergieren gegen g, dann auch b_n
- Beschränktheit und Monotonie nachweisen
- Cauchy-Kriterium („jede Cauchy-Folge konvergiert“)

Hauptsatz über konvergente Folgen („Grenzwertsatz“)

a_n und b_n seien konvergente Folgen mit Grenzwerten a und b. Die Zahlen λ und μ ε R. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \frac{a}{b}$$

Funktionengrenzwerte

Klar: In der Analysis untersuchen wir in der Regel Grenzwertprozesse von Funktionen – und nicht von Folgen!

$$\lim_{x \to a} f(x) = A :\Leftrightarrow \forall_{(x_n):\lim x_n = a} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Nebenbemerkung: a muss „Häufungspunkt“ sein…

(unendliche) Reihen

Für jeder Folge a_n kein eine „Partialsummenfolge“ s_n definiert werden:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r = (s_n)_{n \varepsilon N}$$

<u>Achtung</u>: Hier steht nicht das Ergebnis einer „unendlichen“ Summation, sondern eine Folge!

Falls die Partialsummenfolge konvergiert kann man schreiben:

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} a_r$$

Reihen sind also spezielle Folgen, sodass sie vom rein logischen Standpunkt aus nicht betrachtet werden müssten. Es ist aber nützlich…

Zudem folgt aus ihrer speziellen Bauart, dass besonders übersichtliche Konvergenzkriterien gelten…

Zusammenhang zwischen Folgen und Reihen

$$\sum^{\infty} a_i = S \Rightarrow \lim a_i = 0$$

Die Umkehrung gilt bekanntlich nicht:
Diese Reihe divergiert!
(„harmonische Reihe“)

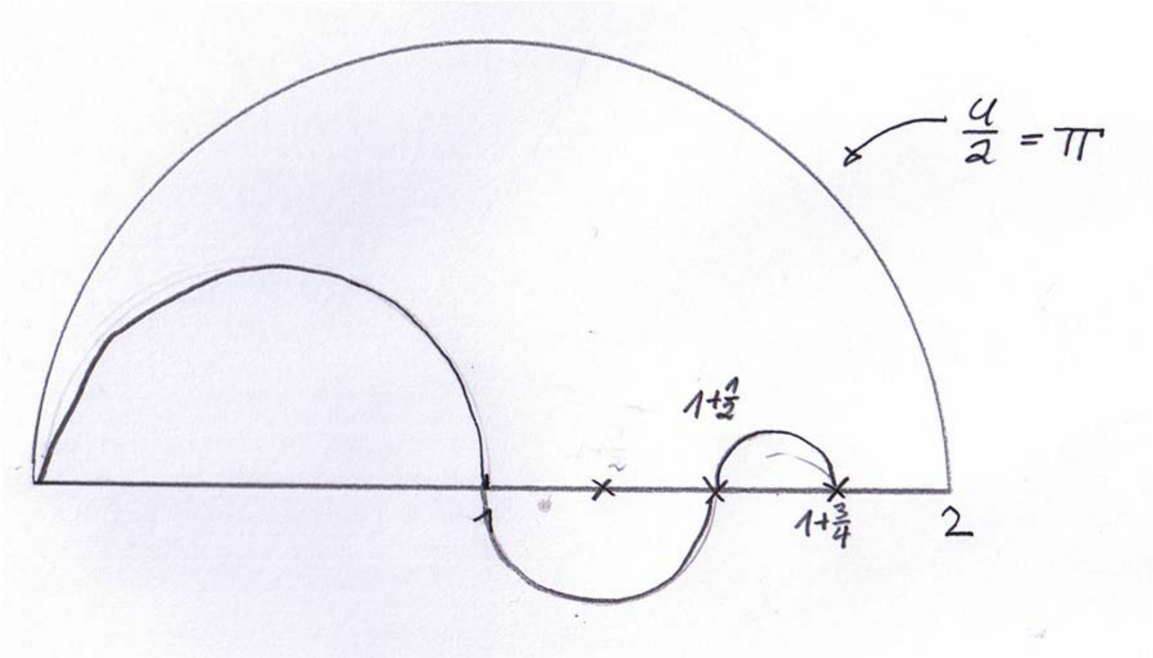
$$\sum^{\infty} \frac{1}{n}$$

Jedoch gilt:
(„geometrische Reihe“)

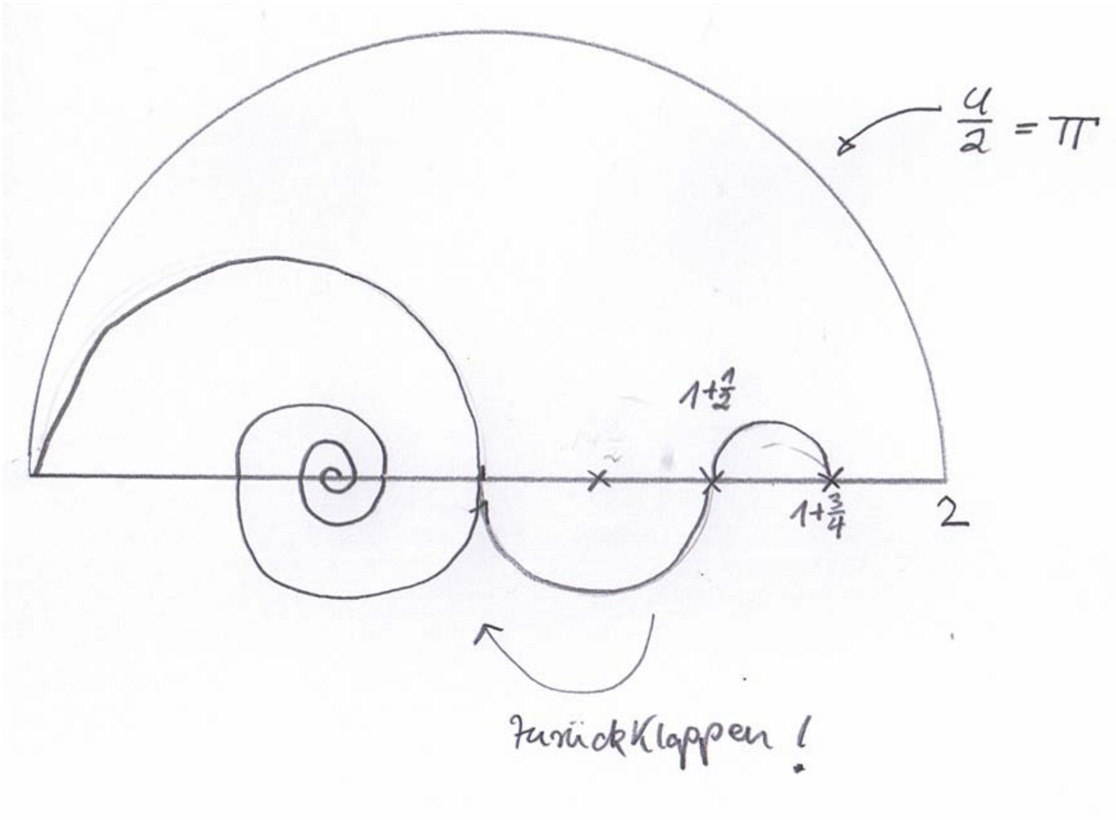
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$falls\ |q| < 1$$

Bsp.: $$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$



Beide Bögen sind gleich lang!



Auf beiden Kreisbögen bewegen sich nun zwei „Käfer“ mit der selben Geschwindigkeit.
Beide erreichen ihr Ziel gleichzeitig (Punkt 2 bzw. Punkt 2/3)
Einer hat sein Ziel zuvor unendlich oft umrundet!

Paradoxien des Grenzwertbegriffs und Zusammenfassung

- Der Grenzwertbegriff formalisiert, das bestimmte Prozesse <u>endlich</u> sind, obwohl sie <u>nicht</u> in <u>endlich vielen Denkschritten</u> durchlaufen werden können…
- Intuitiv möchte man mit dem „*unendlich kleinen*“ argumentieren
- Die Grenzwertdefinition spricht stattdessen nur von endlich kleinen Objekten – jedoch beliebig kleinen Objekten!