

Gravitation: Zusammenfassung 2. Teil

Die 2. kosmische Geschwindigkeit und die (potentielle) Energie des Gravitationsfeldes

Die Abwurfgeschwindigkeit, ab der ein Körper nicht mehr auf die Erde zurückfällt, sondern diese umkreist, nennt man „**1. kosmische Geschwindigkeit**“, bzw. genauer: dies ist die Bezeichnung für die Geschwindigkeit, bei der der Körper eine exakte Kreisbahn beschreibt. Beim Experimentieren mit dem Programm Umlauf.exe haben wir gesehen, dass ab einer bestimmten Geschwindigkeit der Körper die Erdumlaufbahn verlässt und nicht mehr zurückkehrt. Diese Geschwindigkeit nennt man „**2. kosmische Geschwindigkeit**“ bzw. „**Fluchtgeschwindigkeit**“. Um sie zu berechnen, muss man allerdings etwas über die Energie im Schwerfeld wissen.

Die (potentielle) Energie im Gravitationsfeld

Welche Energie braucht man, um einen Körper im Schwerfeld der Erde anzuheben? In der Nähe der Erdoberfläche ist diese Energie bekanntlich $E_{pot} = mgh$, also Gewichtskraft

$F_g = mg$ mal der Höhe h , um die der Körper angehoben wird. Im Allgemeinen ist die Gewichtskraft aber nicht konstant (bzw. die Beziehung $F_g = mg$ gilt nur näherungsweise). Die Regel „Energie = Kraft mal Weg“ kann also nicht angewendet werden. Die beiden Abbildungen rechts veranschaulichen die Situation: In a) eine konstante Kraft und die zugehörige Energie, die der Rechteckfläche entspricht. In Abb. b) die variable

Gewichtskraft, die wie $\frac{1}{r^2}$ abfällt. Um hier an die

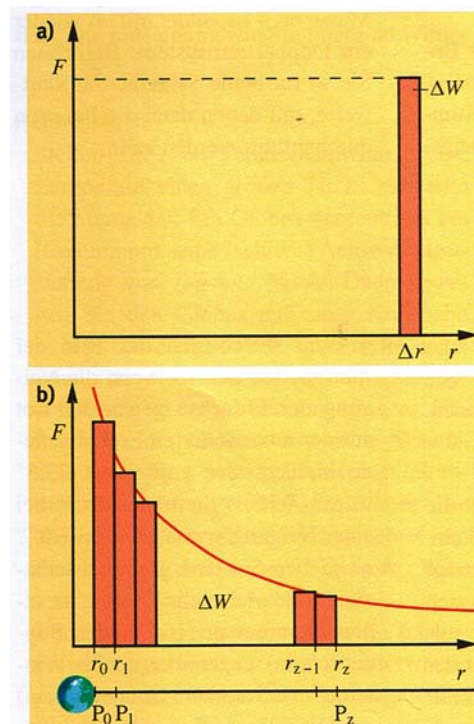
Energie zu kommen, muss die krummlinig begrenzte Fläche unter dem Graphen zwischen den Punkten r_0 und r_z berechnet werden! Dies gelingt entweder recht umständlich, wie auf dieser Webseite erklärt:

http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web_ph11/umwelt-technik/10_gravfeld/arbeit/arbeit.htm oder mit Hilfe der Integralrechnung! Gesucht wird nämlich einfach die die Stammfunktion

von $F_g = \gamma \frac{Mm}{r^2}$ als Funktion von r . Das sieht komplizierter aus als es ist! Bis auf den Abstand r stehen ja nur Konstanten in dem Ausdruck. Im Kern geht es also um eine Stammfunktion für $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Diese lautet aber $F(x) = -\frac{1}{x}$. Mit anderen Worten: Die gesuchte Fläche (die

potentielle Energie), berechnet sich als $E_{pot} = \int_{r_0}^{r_z} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM}{r} \Big|_{r_0}^{r_z} = -\gamma mM \left(\frac{1}{r_z} - \frac{1}{r_0} \right)$.

Schauen wir uns dafür ein konkretes Beispiel an:



B3: a) Beim Heben entspricht die zugeführte Energie dem Flächeninhalt des Rechtecks im F - r -Diagramm b) Zur Energiezufuhr bei veränderlicher Kraft

Aufgabe: Wie viel Energie braucht man, um einen Körper der Masse $m=1000\text{kg}$ von der Erdoberfläche ($r_0 = 6370\text{km}$) 350km in die Höhe zu bringen ($r_z = 6720\text{km}$) zu bringen?

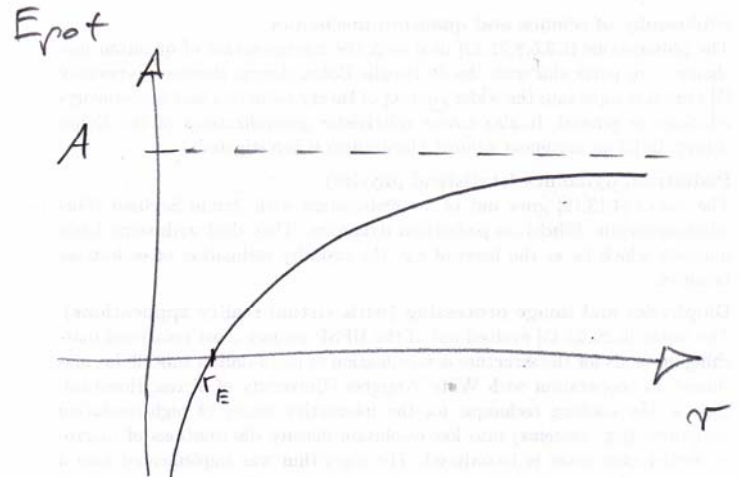
Lösung:
$$E_{pot} = -\gamma mM \left(\frac{1}{r_z} - \frac{1}{r_0} \right) = -\frac{\gamma mM}{6720 \cdot 10^3 \text{ m}} + \frac{\gamma mM}{6370 \cdot 10^3 \text{ m}} = 3,3 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Da man als Startpunkt häufig die Erdoberfläche verwendet, kann man für r_0 auch direkt r_E einsetzen. Statt r_z schreiben wir dann einfach r für den „Zielpunkt“. Die potentielle Energie im Schwerfeld hat dann die Form:

$$E_{pot} = A - \frac{B}{r} \text{ mit den Abkürzungen}$$

$$A = \frac{\gamma mM_E}{r_E} \text{ und } B = \gamma mM_E. \text{ Der Graph}$$

dieser Funktion hat die folgende Form: Für $r = r_E$ ist die Energie Null (klar: um etwas von der Erde um 0m anzuheben braucht man 0 Energie...). Für große Werte von r wächst die Energie an, aber sie wird nie größer als die Konstante A ! Man sagt in der Mathematik, sie nähert sich diesem Wert „asymptotisch“ an.



Jetzt können wir aber endlich die Frage beantworten, ab welcher Startgeschwindigkeit ein Körper die Erde verlässt! Offensichtlich muss seine kinetische Energie größer als A sein, also:

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq \frac{\gamma mM_E}{r_E}$$

$$v \geq \sqrt{\frac{2\gamma M_E}{r_E}}$$

Diese Geschwindigkeit nennt man 2. kosmische Geschwindigkeit, oder auch „Fluchtgeschwindigkeit“¹. Für die Erde beträgt sie $v_2 \approx 11 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Setzt man statt Erdmasse und Erdradius die Werte für den Mond ein, erhält man natürlich die Fluchtgeschwindigkeit von diesem Himmelskörper. Die 2. kosmische Geschwindigkeit ist übrigens einfach das $\sqrt{2}$ -fache der 1. kosmischen Geschwindigkeit.

Wenn man in die Bücher schaut, findet man für die potentielle Energie im Gravitationsfeld allerdings einen etwas anderen Ausdruck, nämlich:

$$E_{pot} = -\gamma \frac{mM}{r}$$

Man hat hier also einfach den konstanten Faktor $A = \frac{\gamma mM_E}{r_E}$ subtrahiert. Allerdings wissen wir ja, dass bei der potentiellen Energie immer nur die Differenzen eine Rolle spielen, und der

¹ Es handelt sich nicht wirklich um die Geschwindigkeit, die eine Rakete braucht, denn diese Beschleunigt ja auch noch während der Flugphase.

Nullpunkt beliebig gewählt werden kann. Anstatt den Nullpunkt also auf die Erdoberfläche zu legen, hat man ihn hier bei „ $r = \infty$ “ gewählt.

Interessante Anwendungen

Satellitenbewegung

Seit Anfang November 2009 umkreist der Klimasatellit SMOS (*Soil Moisture and Ocean Salinity*) die Erde (siehe Abbildung rechts). Er umrundet die Erde 14-mal pro Tag.



- a) Berechnen sie, in welcher Höhe der Satellit SMOS die Erde umkreist.

Bei einer stabilen Satellitenbahn halten sich Schwerkraft und Zentripetalkraft die Waage (bzw.: die Schwerkraft ist die Zentripetalkraft):

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}. \text{ Wir kennen die Umlaufdauer}$$

des Satelliten ($T=6171\text{s}$). Dann kann die Geschwindigkeit durch den Radius ausgedrückt werden: $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$. Einsetzen und nach r auflösen ergibt:

$$\frac{\gamma M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$r^3 = \frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} \approx 7,3 \cdot 10^6 \text{ m} = 7300 \text{ km}$$

Wenn man nach der Flughöhe fragt, meint man in der Regel natürlich die Höhe über der *Erdoberfläche*. Diese beträgt dann natürlich $7300\text{km} - 6370\text{km} = 930\text{km}$. Das alles gilt allerdings nur, falls der Satellit tatsächlich auf einer Kreisbahn fliegt.

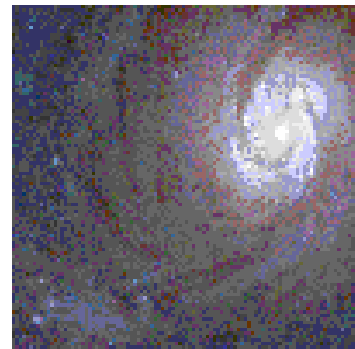
Die Masse der Milchstraße

Die Sonne ist ca. $3 \cdot 10^{20} \text{ m}$ vom Zentrum der Milchstraße entfernt und umkreist dieses Zentrum in ca. 250 Millionen Jahren.

- a) Schätzen sie mit Hilfe dieser Angaben die Masse der (inneren) Milchstraße ab. (Hinweis: Die Betrachtungen zum 3. Keplerschen Gesetz aus Aufgabe 3 können hilfreich sein.)

Es gilt $M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} \approx 2,5 \cdot 10^{41} \text{ kg}$ (mit $T = 8 \cdot 10^{15} \text{ s}$).

- b) Wie viele Sterne befinden sich in der Milchstraße?



Gehen wir von einer durchschnittlichen Sternmasse der Sonne aus, haben

wir $\frac{M_{\text{Milchstraße}}}{M_{\odot}} \approx 120 \cdot 10^9$, also 120 Milliarden Sterne in der (inneren) Milchstraße!

Schwarze Löcher

Schon 1783 spekulierte der britische Forscher John Michell über sog. „dunkle Sterne“, deren Gravitation ausreicht, um Licht gefangen zu halten.

- Berechnen sie, welche Masse ein Körper haben muss, der denselben Radius wie die Erde hat und dessen Fluchtgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit ist, nämlich $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.
- Berechnen sie die Dichte dieses Körpers und das Verhältnis zwischen seiner Dichte und der Dichte der Erde.

Wir hatten weiter oben den Ausdruck für die Fluchtgeschwindigkeit hergeleitet: $v \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$.

Der Radius unseres „schwarzen Körpers“ soll der Erdradius sein und die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Daraus folgt für die gesuchte Masse:

$M = \frac{r_E \cdot c^2}{2\gamma} \approx 4,3 \cdot 10^{33} \text{ kg}$. Das Volumen dieses Körpers beträgt $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = 1,08 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$.

Die Dichte beträgt also $\rho = \frac{M}{V} \approx 3,97 \cdot 10^{12} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Zur Erinnerung: die Dichte der Erde beträgt nur ca. 5500 kg pro m^3 ! Ein „schwarzes Loch“ hat also eine ein Milliarden mal größere Dichte (falls seine Größe der der Erde entspricht...).