Gravitation - Einführung

Schon im Altertum waren aus geometrischen und astronomischen Betrachtungen die ungefähren Werte für <u>Erdradius</u> sowie dem <u>Abstand</u> <u>Erde-Mond</u> bekannt. Die aktuellen Werte lauten: $r_E \approx 6370km$ und $r_{E-M} \approx 384000km (\approx 60 \cdot r_E)$. Der Anekdote nach, kam Newton bei der Beobachtung des Falls eines Apfels auf die Idee für die Gravitationstheorie. Der Ausgangspunkt seiner Überlegungen war, dass die (näherungsweise) Kreisbewegung des Mondes um die Erde mit den gleichen Gesetzen wie jede Bewegung auf der Erde beschrieben werden können sollte!

a) Bereche die Geschwindigkeit des Mondes auf seiner Kreisbahn um die Erde ($T \approx 27{,}3d$)

<u>Lösung</u>: Offensichtlich beträgt der Umfang der (näherungsweisen) Kreisbahn des Mondes um die Erde $U = 2\pi r = 2{,}41 \cdot 10^9 m$ sowie die Umlaufdauer $T \approx 2{,}359 \cdot 10^6 s$. Die Geschwindigkeit liegt also bei $v = 1{,}023 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$.

b) Berechne die Zentripetalbeschleunigung a_Z, die der Mond erfährt!

<u>Lösung</u>: $a_z = \frac{v^2}{r} = 2{,}724 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$. Die Beschleunigung wirkt dabei „radial" (=in Richtung des Kreismittelpunktes), während die Geschwindigkeit des Mondes tangential gerichtet ist.

c) Auf jedes Kilogramm Mondgestein wirkt also die in Aufgabenteil b) berechnete Beschleunigung, bzw. die Kraft $F = 1kg \cdot a_Z$. Wie viel größer ist die Kraft auf eine Masse von 1kg auf der Erdoberfläche? Was fällt dir an den Zahlen auf?

<u>Lösung</u>: Wir berechnen das Verhältnis der Beschleunigungen: $\frac{9{,}81}{2{,}724 \cdot 10^{-3}} = 3601.$ Dies ist offensichtlich ziemlich genau 60^2. Der Mond ist aber 60 Erdradien von der Erde entfernt! Auf der Erdoberfläche ist man offensichtlich einen Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt… Daraus kann man schließen: Die „Gravitationskraft" (=Schwerkraft) zwischen zwei Massen scheint mit dem Quadrat des Abstandes abzunehmen: $F_g \propto \frac{1}{r^2}$. Der Abstand bezieht sich dabei auf den <u>Mittelpunkt</u> der <u>Kreisbewegung</u> – also nicht auf die Erdoberfläche!

d) Die Schwerkraft zwischen zwei Körpern scheint mit dem Quadrat ihres Abstandes abzunehmen. Mit welchen Daten könnte man diese Vermutung noch überprüfen?

<u>Lösung</u>: Man könnte die Bewegung der Planeten um die Sonne betrachten, bzw. die Bewegung anderer Satelliten um die Erde. Dies tun wir nun:

Name	Bahnradius r in 10^6 km	Umlaufdauer T in Jahren	$C = r^3/T^2$ in $10^{18}\,m^3 \cdot s^{-2}$
Merkur	57,91	0,2408	3,363
Venus	108,21	0,6152	3,362
Erde	149,60	1,0000	3,362
Mars	227,94	1,8810	3,361
Jupiter	778,34	11,8610	3,366
Saturn	1 427,01	29,4560	3,363
Uranus	2 869,60	84,0090	3,362
Neptun	4 496,70	164,7870	3,362
Pluto	5 899,00	247,7000	3,360
Mond	0,384	0,0748	$1{,}019 \cdot 10^{-5}$
Erd-satellit	0,04215	1/366,26	$1{,}009 \cdot 10^{-5}$

T 1: Sonnen- und Erdtrabanten

Auf dem Weg zum Gravitationsgesetz

Die Frage lautet, ob auch für die Planetenbewegungen um die Sonne gilt:

$F_g \propto \frac{m}{r^2}$, mit r dem Abstand zwischen Sonne und Planet („Bahnradius"). Es gilt für die Zentripetalkraft:

$F_Z = \frac{mv^2}{r} = \frac{m4\pi^2 r}{T^2}$ wegen: $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Gleichsetzen führt auf (Verständnisfrage: Warum macht es eigentlich Sinn, diese beiden Terme gleichzusetzen?):

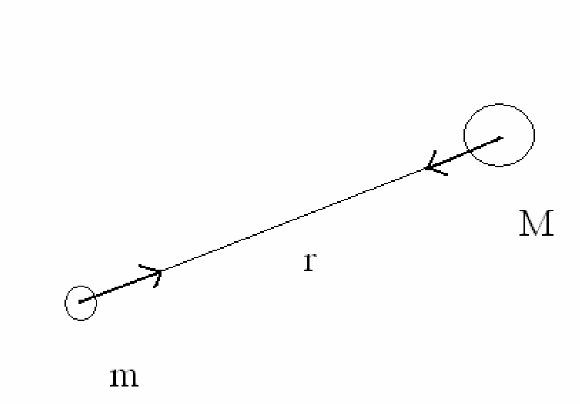
$\frac{m4\pi^2 r}{T^2} \propto \frac{m}{r^2}$ bzw. $\boxed{\frac{r^3}{T^2} = C}$. Mit anderen Worten: Gilt unsere Vermutung für die Schwerkraft, so sollte r^3/T^2 eine Konstante sein! Der Tabelle entnimmt man, dass dies tatsächlich zutrifft! Allerdings ist diese Konstante anscheinend von dem Körpers abhängig, um den die Kreisbewegung stattfindet:

$C_{Erde}=10^{-5}$ und $C_{Sonne}=3{,}4$. Es gilt $m_E=6\cdot 10^{24}$kg und $m_S=2\cdot 10^{30}$kg

<u>Frage</u>: Was fällt euch auf?

<u>Lösung</u>: Das Verhältnis der „C-Konstanten" ist gleich dem Massenverhältnis von Sonne und Erde. Dies heißt aber: Offensichtlich ist die „Gravitationskraft" auch von „dieser Masse" (also der Masse, „um die die Drehung stattfindet") abhängig[1]:

$$\boxed{F_g \propto \frac{Mm}{r^2}}$$



bzw.

<u>Allgemeines Gravitationsgesetz</u>
(Newton, 1687):

$$\boxed{F_g = \gamma \frac{Mm}{r^2}}$$

Die Kraft F_g wirkt zwischen 2 Massen (m und M), die den Abstand r voneinander haben. γ ist die sog. allgemeine Gravitationskonstante. Bei ausgedehnten Körpern rechnen wir den Abstand vom Mittelpunkt. Die Zeichnung illustriert diese Beziehung. Die Pfeile geben die Kraftpfeile an. Sie greifen an beiden Körpern an (Stichwort: „Wechselwirkungsgesetz"). Ihre Richtung („Kräfte sind Vektoren") ist längs der Verbindungslinie.

<u>Merke</u>: Es ist nicht nur ein Körper (etwa: „der Größere"), der den anderen anzieht. Beide ziehen sich gegenseitig mit der identischen Kraft an!

Welchen Wert hat nun die Proportionalitätskonstante γ?

<u>Wir wissen</u>: in der Nähe der Erdoberfläche gilt $F_g = m \cdot g$ (mit g=9,81m/s^2, dem Ortsfaktor).

a) Berechnen sie daraus den Wert für γ!

---

[1] Tatsächlich werden wir bald sehen, dass etwa bei der Bewegung des Mondes um die Erde, die Erde gar nicht stillsteht. Sie ist also nicht einfach der Körper, „um den die Bewegung stattfindet"…

Lösung: Auf der Erde ergibt das Gravitationsgesetz $F_g = \gamma \frac{Mm}{r^2}$ (mit M der Erdmasse und r dem Erdradius) gerade den Wert $m \cdot g$. Gleichsetzen (und nach γ auflösen) ergibt:

$$\gamma = \frac{gr_E^2}{M_E} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \tfrac{m^3}{kgs^2}.$$

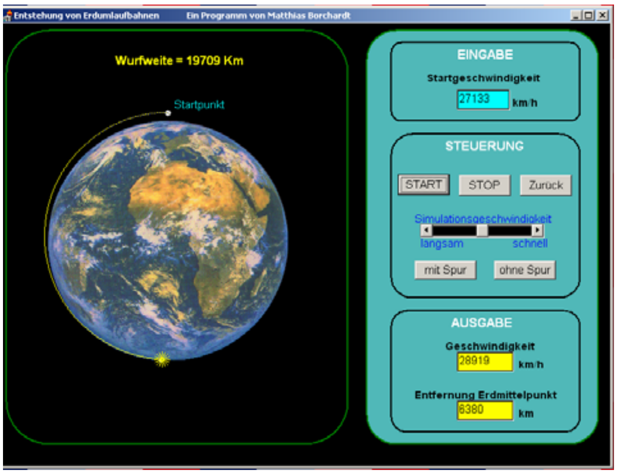
b) Für Aufgabenteil a) haben sie den Wert für die Masse der Erde (M_E) verwendet. Wie könnte man diesen Wert abschätzen?

Lösung: Es gilt: Masse = Dichte mal Volumen, also $M_E = \frac{4}{3}\pi \cdot r_E^3 \cdot \rho$. Welchen Wert kann man für die Dichte schätzen? Wasser liegt z. Bsp. bei $1000 \frac{kg}{m^3}$. Wählt man etwa 3500kg/m^3 kommt man auf einen Wert von ca. $M_E \approx 3{,}78 \cdot 10^{24} kg$. Das ist schon ein ganz ordentlicher Schätzwert (der tatsächliche Wert liegt bei $M_E \approx 6 \cdot 10^{24} kg$).

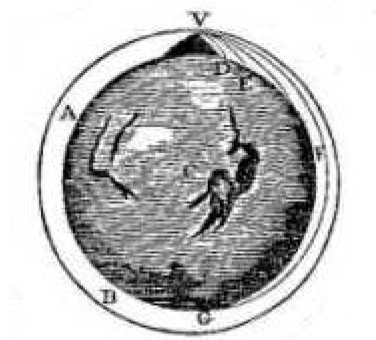
c) Berechnen sie die Stärke der Erdanziehung in 200km Höhe (d.h. in der Höhe der Raumstation ISS)

Lösung: Gesucht ist der „Ortsfaktor" auf der ISS, also $m \cdot g_{ISS} = \gamma \frac{M_E m}{(r_E + 200km)^2}$. Die Masse m fällt wieder heraus und man erhält: $g_{ISS} \approx 9{,}27 \frac{m}{s^2}$. Dieser Wert ist kleiner als auf der Erdoberfläche – klar – aber nicht so viel kleiner, dass man die offensichtliche Schwerelosigkeit auf der Raumstation verstehen könnte. Es ist wohl ein Missverständnis, zu glauben, dass „Schwerelosigkeit" dann (und nur dann) auftritt, wenn man soweit von allen Massen entfernt ist, dass diese keine (oder kaum noch) Anziehungskraft ausüben!

Schwerkraft, Schwerelosigkeit und freier Fall



Die Raumstation ruht ja nicht einfach in 200km Höhe, sondern umkreist die Erde. Betrachten wir den Übergang von „freiem Fall" und dem Umkreisen der Erde genauer. Der Screenshot rechts zeigt das Programm Umlauf.exe (kann von meiner Seite herunter geladen werden). Simuliert wird die Wurf- bzw. Flugbahn eines Körpers, der aus 400km Höhe waagerecht abgeworfen wird. Die Abwurfgeschwindigkeit kann variiert werden. Zunächst entstehen immer größere Wurfparabeln („waagerechter Wurf"). Ab einer bestimmten Geschwindigkeit (27134km/h) schließt sich die Flugbahn. Der Körper umkreist die Erde (auf einer ellipsenförmigen Bahn). Eine weiter anwachsende Geschwindigkeit führt zunächst auf weitere elliptische Bahnen (auch eine exakte Kreisform kann erreicht werden). Ab einer bestimmten Geschwindigkeit verlässt der Körper die Erde und kehrt nicht wieder zurück!



Die nebenstehende Abbildung stammt aus Newtons Principia Mathematica (1687). Sie stellt ebenfalls dar, wie die Flugbahn eines waagerecht geworfenen Steins bei wachsender Geschwindigkeit einer Kreisbahn um die Erde immer ähnlicher wird. Zur Zeit New-

Newtons eine kühne Hypothese!

a) Berechnet die Geschwindigkeit, mit der auf der Erdoberfläche ein Körper geworfen werden muss, um eine solche Kreisbahn zu beschreiben!

Lösung: Auf der Erdoberfläche wirkt die Kraft $F_g = m \cdot g$. Diese soll den Körper auf eine Kreisbahn zwingen – also die Rolle der Zentripetalkraft spielen. Der Radius ist durch die Aufgabenstellung vorgegeben. Damit kann die notwendige Geschwindigkeit berechnet werden:

$$F_g = F_Z$$

$$mg = m\frac{v^2}{r_E}$$

$$v = \sqrt{r_E \cdot g} = 7{,}9 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \approx 28460 \frac{km}{h}$$

b) Berechnet dieselbe Geschwindigkeit für einen Satelliten in 200km Höhe über der Erdoberfläche!

Lösung: In der Nähe der Erdoberfläche ist die (Luft-)Reibungskraft natürlich so groß, dass der Körper keine Kreisbahn fliegt. In 200km Höhe gelingt dies schon leichter. Die notwendige Geschwindigkeit kann wie in a) berechnet werden, wenn der andere g-Faktor und der größere Radius eingesetzt werden. Oder man schreibt direkt die Gleichung hin, die für alle Abstände h von der Erdoberfläche gilt:

$$F_g = F_Z$$

$$\gamma \frac{M_E m}{(r_E + h)^2} = m \frac{v^2}{r_E + h}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M_E}{r_E + h}}$$

Für h=200km beträgt die notwendige Geschwindigkeit $v = 7{,}8 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \approx 28100 \frac{km}{h}$.

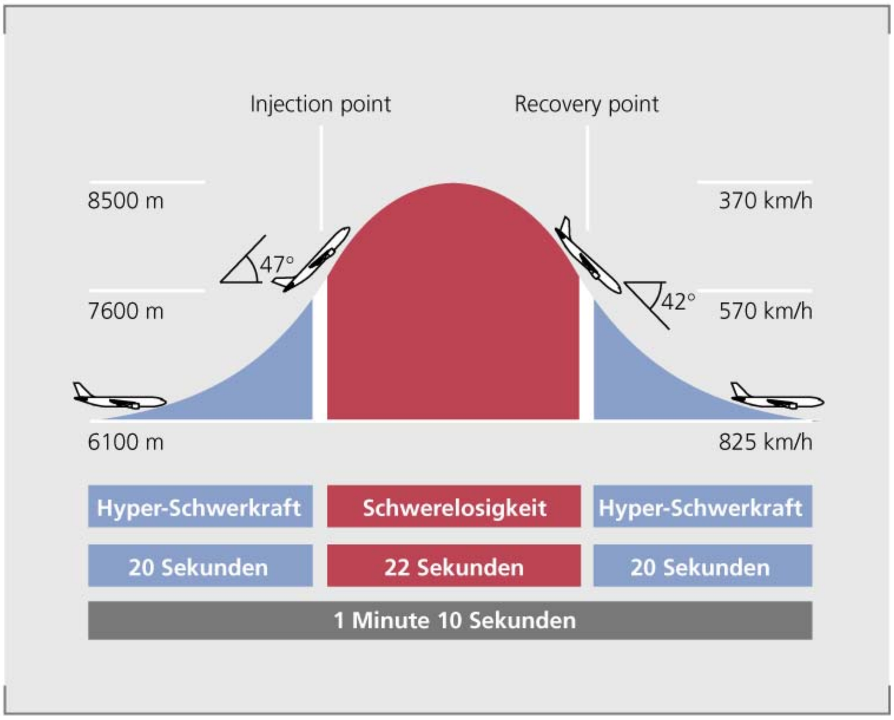
Setzt man für h den Abstand zum Mond ein, gewinnt man die Geschwindigkeit, mit der dieser „Satellit“ die Erde umkreist.

Zusätzlich geben uns diese Rechnungen einen Hinweis darauf, wie man sinnvoll über eine solche Flugbahn um die Erde nachdenkt: Es handelt sich eigentlich um einen freien Fall auf die Erde – es wird die Erde jedoch „verfehlt“, da die waagerechte Geschwindigkeit so hoch ist, dass der Körper beständig *„an der Erde vorbei fällt*“.

Aber zurück zur sog. **Schwerelosigkeit**. Was wollen wir darunter verstehen? Man denkt an die Bilder von Astronauten, die „schwerelos“ schweben. Wenn sie einen Gegenstand loslassen fällt dieser ebenfalls nicht „herunter“, sondern schwebt neben ihnen weiter. Gleichzeitig haben wir ausgerechnet, dass die Fallbeschleunigung auf der ISS immer noch 90% des irdischen Wertes beträgt! Wie passt das zusammen? Nun, wir haben ja gesehen, dass die ISS einen „freien Fall um die Erde“ ausführt. Alle Gegenstände in ihr fallen ebenfalls. Das ist es also, was dazu führt, dass die ***Auswirkungen der Schwerkraft nicht zu spüren*** sind! Die rechte Abbildung (aus dem netten Wiki-Artikel zum Thema Schwerelosigkeit) zeigt eine Dame auf ei-

einem Trampolin, die im Sprung eine Flasche loslässt. Auch diese Flasche scheint neben der Frau zu „schweben", da sie dieselbe Bewegung ausführt. In größerem Maßstab erzeugt man Schwerelosigkeit auf den sog. Parabelflügen. Ein Flugzeug fliegt auf einer (wurf-) parabelförmigen Bahn und auf diese Weise sind in seinem Inneren ebenfalls keine Auswirkungen der Schwerkraft zu spüren. Übrigens: genau so, wie das obige Trampolinexperiment sowohl beim Flug nach oben, als auch beim Fall nach unten klappt, herrscht die Schwerelosigkeit beim Parabelflug ebenfalls schon beim parabelförmigen Steigflug (siehe Abbildung).

Parabelflug



Mit freundlicher Genehmigung durch Kpt. Gilles Le Barzic

Viele Menschen meinen irriger Weise, der Parabelflug würde die Schwerelosigkeit nur „simulieren". Wir haben nun gesehen, dass diese Schwerelosigkeit genau so „echt" ist, wie die der Astronauten im Weltraum.