Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Vorlesung zur

Didaktik der Analysis

Inhalt

- *Nachtrag*: Funktionengrenzwert
- Stetigkeit
  - Anschauliche Bedeutung
  - Mathematische Präzisierung
  - Topologische Charakterisierung
  - Gleichmäßige Stetigkeit
  - Interessante Beispiele
- Differenzierbarkeit
  - Formale Definition
  - Zusammenhang zur Stetigkeit
  - Interessante Beispiele
- Zusammenfassung

Nachtrag: Funktionengrenzwert

Für Folgen haben wir definiert:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N_\varepsilon}{\exists}\ \underset{n>N_\varepsilon}{\forall}\ |a-a_n| < \varepsilon}$$

Könnte (für reelle Funktionen) diese Zeile Sinn machen?

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{S_\varepsilon}{\exists}\ \underset{x>S_\varepsilon}{\forall}\ |f(x)-L| < \varepsilon$$

Was ist aber, wenn man den Prozess x→p betrachtet?
Etwa:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L :\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N_\varepsilon}{\exists}\ \underset{x>N_\varepsilon}{\forall}\ |f(x)-L| < \varepsilon \qquad ???$$

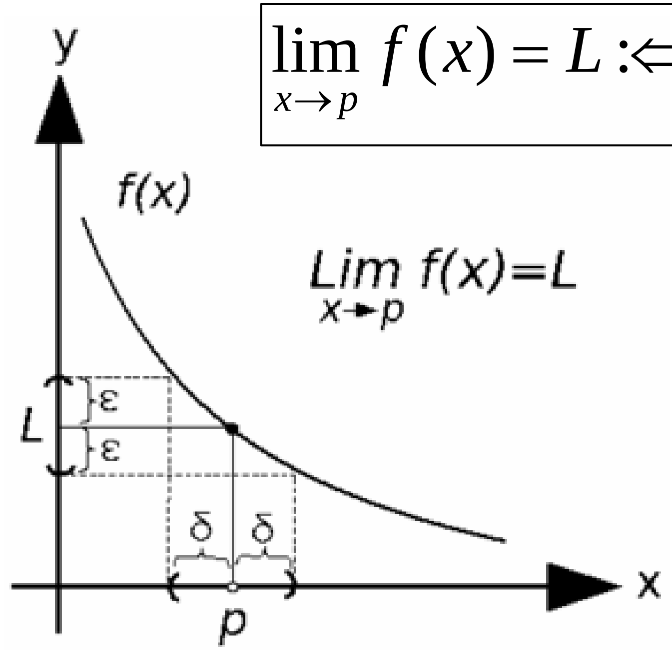
Funktionengrenzwert II

Deshalb definiert man:

$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = L :\Leftrightarrow \forall_{(x_n):\lim x_n = p} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L}$$

Bzw. Epsilon-Delta Definition:

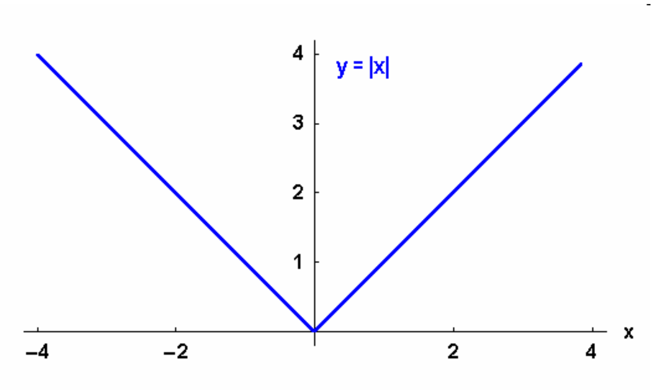
$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = L :\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D} :|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon}$$

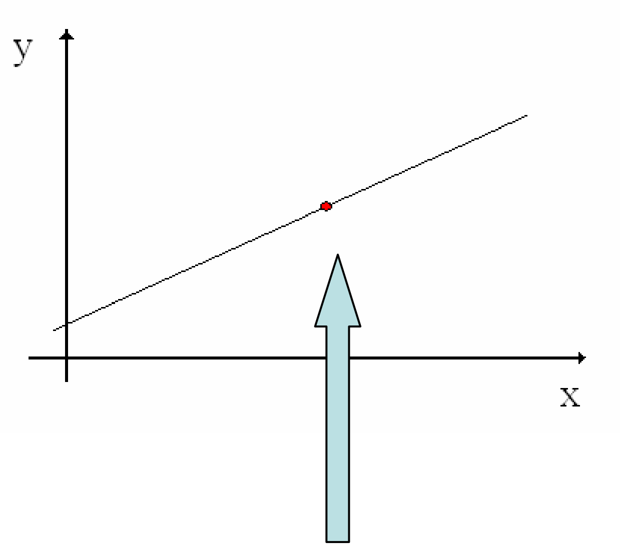


Man kann zeigen, dass beide Definitionen äquivalent sind

Stetigkeit

<u>Intuitive Definition</u>: f stetig ↔ Der Graph der Funktion kann „ohne abzusetzen" gezeichnet werden.





„globale Eigenschaft"

kann hier „stetig ergänzt" werden

Stetigkeit (mathematische Präzisierung)

f stetig in x_0 $\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

f stetig in x_0 $\Leftrightarrow \underset{(x_n):\lim x_n = x_0}{\forall} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Wird für alle Folgen gefordert!!!

f stetig in x_0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

lokale Eigenschaft: („Stetigkeit in x_0")

Beispiel für den Nachweis der Stetigkeit:

Betrachte die Funktion $f(x)=x^2$ an der Stelle x_0

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$x_0>0, |x-x_0|<\delta$$

$$:|x_0^2-x^2|=|x_0-x||x_0+x|\leq \delta|x_0+x|\,(*)$$

$$aber: |x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta \Rightarrow$$

$$2x_0-\delta<x_0+x<2x_0+\delta \underset{x_0>0}{\Longrightarrow} -2x_0-\delta<\ldots \Leftrightarrow$$

$$|x_0+x|\leq 2x_0+\delta\,(**)$$

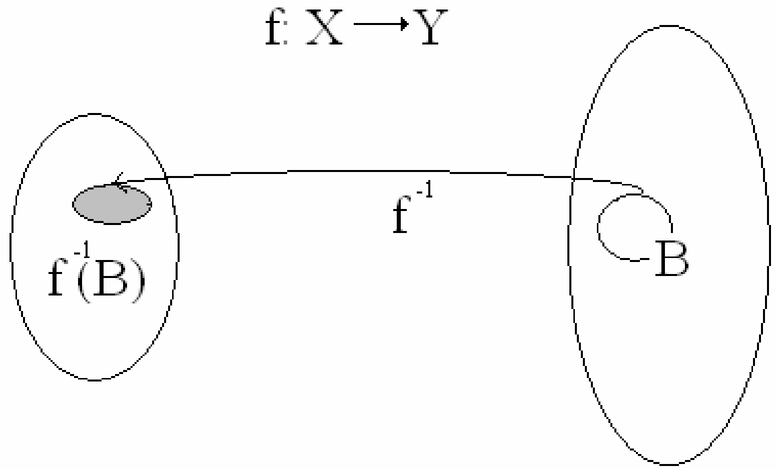
Die Gleichungen (*) und (**) ergeben zusammen:

$$|x_0^2-x^2|\leq \delta|x_0+x|\leq \delta(2x_0+\delta)=2x_0\delta+\delta^2 \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

$$wähle: \delta=\sqrt{\varepsilon+x_0^2}-x_0$$

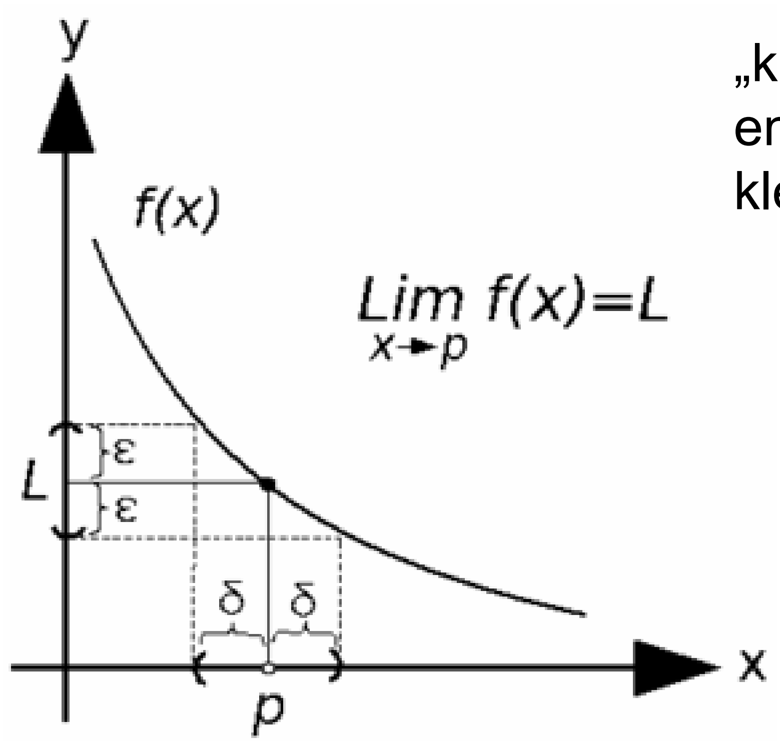
Topologische Charakterisierung:

f: X→Y stetig gdw. das Urbild jeder offenen Menge BεY ($f^{-1}(B)$) ist eine offene Teilmenge von X



U offen gdw. Für alle xεU gibt es eine Umgebung, die ganz in U enthalten ist

Intuitiver Zugang



„kleine“ Schwankung in x entspricht ebenfalls nur kleiner Schwankung in f(x)…

Stetigkeit als „*globale*“ Eigenschaft:
f: D→R stetig, wenn f für alle x_0 aus D stetig ist.

Die Stetigkeit kann unterschiedlich „gut“ sein; in dem Sinne, dass ein „kleines“ δ gewählt werden muss…

Stetigkeit vs. *gleichmäßige* Stetigkeit

f stetig in x_0 $\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

***f* gleichmäßig stetig** $\Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x, x_0\in D}{\forall} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

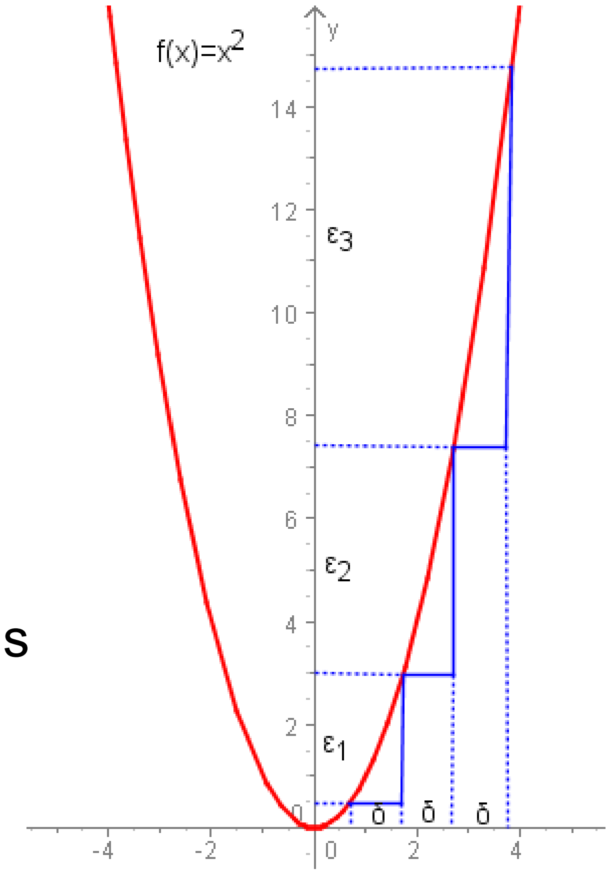
Die gewöhnliche Stetigkeit wird im Unterschied zur gleichmäßigen Stetigkeit auch „punktförmig“ genant.

Punktförmige Stetigkeit: $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

Gleichmäßig Stetigkeit: $\delta = \delta(\varepsilon)$

Beispiel für *punktförmig* stetige – aber nicht gleichmäßig stetige Funktionen

Unser Beispiel $f(x)=x^2$ für D=R ist genau so ein Beispiel!
Je weiter man „nach rechts geht", desto kleiner muss delta gewählt werden:



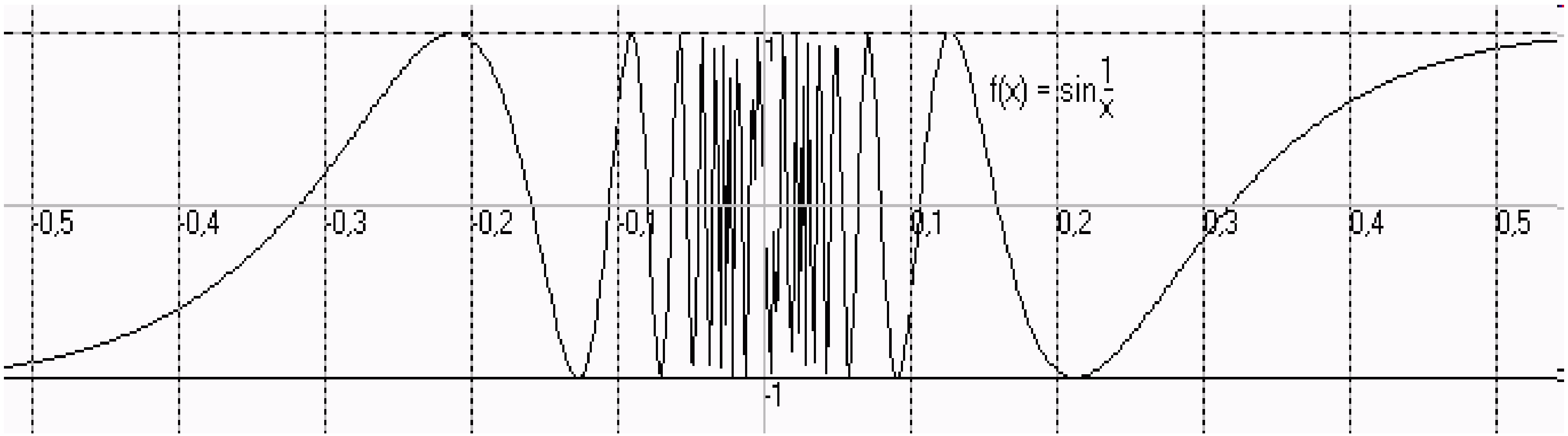
Schränkt man die Funktion jedoch auf Ein kompaktes Intervall ein D=I, so ist Sie gleichmäßig stetig!

Merke: Ohne Angabe des Definitionsbereichs Ist eine Funktion nicht eindeutig bestimmt!

Beispiel für unstetige Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

ist an der Stelle 0 unstetig. Die Folge $\left(x_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nämlich gegen 0, aber $\left(f(x_k) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Dieses Beispiel zeigt, dass Unstetigkeiten nicht unbedingt „Sprünge" sein müssen.



Monster

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet
(1805 – 1859) im Jahre
1829 konstruiert:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \text{ rational }, \\ 0, & \text{wenn } x \text{ irrational }. \end{cases}$$

D(x) ist in ihrem ganzen Definitionsbereich unstetig!

Wichtige Sätze über stetige Funktionen

- *Zwischenwertsatz* (das Bild eines Intervalls einer stetigen Funktion ist ein Intervall)
- *Satz vom Maximum* (eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall nimmt Minimum und Maximum an)
- f: $[a,b]\to R$ stetig auf dem kompakten Intervall, dann ist f *gleichmäßig* stetig.

Differenzierbarkeit

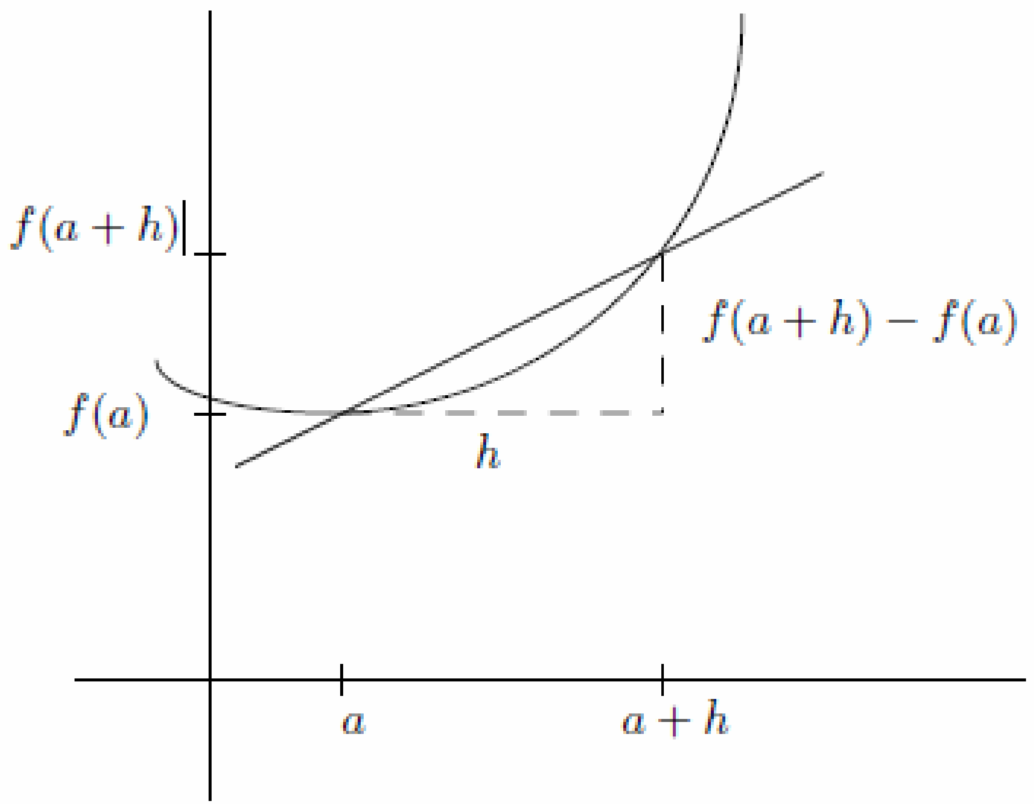
Wir werden sehen:

- Differenzierbarkeit ist im Kern eine Aussage über die Existenz eines (bestimmten) Grenzwertes
- Sie ist deshalb eng mit der Stetigkeit verknüpft….

…die in der Schule praktisch keine Erwähnung findet!

Differenzierbarkeit

f: D→R, D offenes Intervall, f in a differenzierbar $\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert



$$m(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Klar: für h=0 nicht definiert!

Zusammenhang: Differenzierbarkeit und Stetigkeit

$$m(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

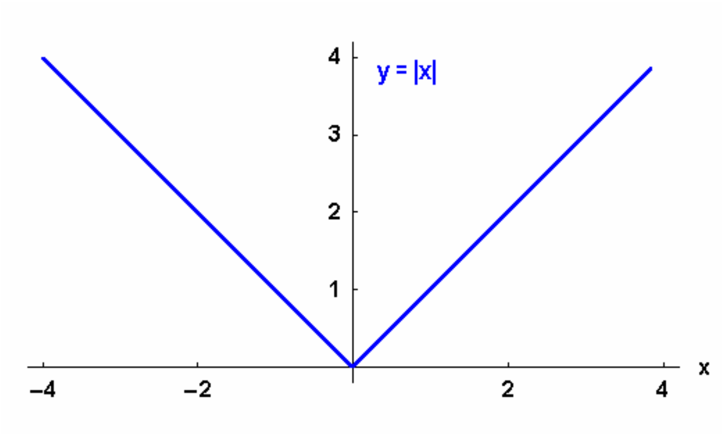
<u>*Alternative Definition:*</u>
f(x) in Punkt a differenzierbar, wenn die Sekantensteigungs-funktion m(h) für h=0 „stetig ergänzbar“ ist.

<u>*Außerdem gilt*</u>:

$$diffbar \Rightarrow stetig$$

$$nicht \quad stetig \Rightarrow nicht \quad diffbar$$

Beispiel einer nicht-differenzierbaren Funktion:



$$z.Z. \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \; existiert \quad nicht$$

$$etwa: h_n = \left(-\tfrac{1}{n}\right)_{n\in N} bzw. \left(\tfrac{1}{n}\right)_{n\in N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|0+\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = -1 \quad bzw. \lim_{n\to\infty} \frac{|0+\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = +1$$

Intuitive Vorstellung

Differenzierbar bedeutet anschaulich „glatt“

Aber:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in Q \\ x^2 & \text{für} \quad x \in R - Q \end{cases}$$

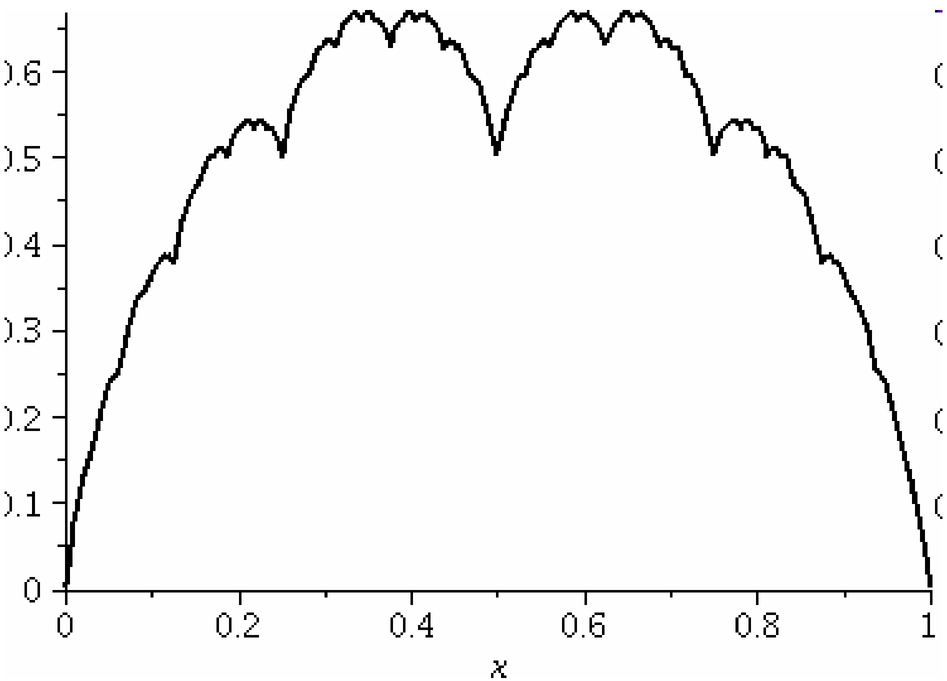
Ohne Beweis: f(x) ist für x=0 stetig und differenzierbar.

Es gibt also auch „seltsame“ Funktionen, die eine Ableitung besitzen…

Zum Abschluss

- f I→R diff-bar impliziert Stetigkeit
- Einige Funktionen sind überall stetig aber an einigen Stellen nicht differenzierbar ($f(x)=|x|$)
- Es gibt aber auch überall stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind!

Takagi Funktion (1903)



Interpretiert man die Ableitung als Momentangeschwindigkeit, so bedeutet dies, dass die Bewegung auf so einer nicht-differenzierbaren stetigen Kurve keine eindeutige Geschwindigkeit hat!

Zusammenfassung

- Stetigkeit (von f in x_0) bedeutet: $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Differenzierbarkeit bedeutet „stetige Ergänzbarkeit“ der „m-Funktion“
- *Bzw.*: Existenz des Grenzwertes von m(h)…

Alle diese Begriffe werden in der Schule nicht erwähnt, oder nur heuristisch erläutert. Wie ist (*verstehensorientierter*) Analysis Unterricht dann überhaupt möglich???