Musterlösung zu den Aufgaben 4-6 (Buch S. 428) – „Kugelfächermodell“

Auf. 4

60 Druckfehler verteilt der Fehlerteufel auf die 400 Buchseiten. Unter der Annahme, dass jede Seite die gleiche Wahrscheinlichkeit hat getroffen zu werden, haben wir es also mit einem 60-stufigen Bernoulliversuch mit der „Trefferwahrscheinlichkeit“ $p = \frac{1}{400}$ zu tun.

a) k = 0, 1, 2, …8 Fehler findet man also mit der Wahrscheinlichkeit:

$P(X = k) = \binom{60}{k} \cdot \left(\frac{1}{400}\right)^k \left(\frac{399}{400}\right)^{60-k}$. Das macht

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X=k)	86%	13%	1%	0,05%	0	0	0	0	0

b) Mindestens 2 Druckfehler heißt k muss größer oder gleich 2 sein. Das kann man über die „Gegenwahrscheinlichkeit“ berechnen:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1\%$

Auf. 5

Hier werden 100 Mitarbeiter auf die 365 Tage „verteilt“. Ein 100-stufiger Prozess mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{365}$ gerade den 25. 2. als Geburtstag zu haben. Die Ereignisse k = 0, 1 oder 2 Treffer sind also wieder binomialverteilt:

$P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{100-k}$. Man findet 76%, 21% und 2,8% für keinen, einen oder den „doppelten“ Geburtstag.

Auf. 6

Langsam wird es langweilig. Hier werden also die 866 Tore auf die 306 Spiele verteilt. Das macht n = 866 Stufen bei $p = \frac{1}{306}$. Damit kann nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Größe X = „Anzahl der Tore in einem Spiel“ berechnet werden. Man findet: k = 0, 1, 2, 3, … Treffer mit der Wahrscheinlichkeit von 6%, 17%, 24% 22%, … Im Buch auf Seite 396 finden sich die genauen Angaben aus der Spielzeit 98/99. Die beobachtete Häufigkeit von 0, 1, 2, 3, … Toren lag bei 7%, 12%, 31%, 19%, …

Die Abweichung ist recht groß. Die Modellannahme (gleichmäßige Verteilung der Tore auf die Spiele) scheint nicht besonders sinnvoll. Taktische Gesichtspunkte und Spielstärke spielen halt auch eine Rolle.

Zusammenfassung

Alle obigen Aufgaben sind Beispiele für das sog. ***Kugelfächermodell***. Immer geht es darum, bestimmte Objekte zu verteilen (Druckfehler auf Buchseiten, Tore auf Spiele etc.). Interessiert man sich für die Häufigkeit mit der in einem beliebigen Fach k Treffer vorkommen, ist diese Größe binomialverteilt mit n = Stufenzahl = „Anzahl der Objekte“ und $p=1/f$, mit f = Anzahl der „Fächer“ auf die aufgeteilt wird (Buchseiten, Spiele, etc.)