Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C
Oliver Passon
Didaktik der Analysis
Wintersemester 2009/10

Datum: 06.01.2010

Anwendung der Integralrechnung

Positive Verständnisentwicklung des Lehrplans oder erschwerende Verkomplizierung?

Carolin Henke
Mat.-Nr: 722383
Ba. of apl. Sc.
5. Fachsemester
E-Mail: carohenke@gmx.de

Gerrit Hübner
Mat.-Nr: 738356
Ba. of Arts
5. Fachsemester
E-Mail: gerrit.huebner@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Vor knapp vierhundert Jahren unternahm ein vielseitig interessierter und engagierter Mathematiker den Versuch den Rauminhalt von Weinfässern zu berechnen. Der deutsche Naturphilosoph, Mathematiker und Astronom, Friedrich Johannes Kepler, hatte sich bereits mit vielen bahnbrechenden Werken einen Namen gemacht. Sein Interesse an einer nachprüfbaren Berechnung des Fassvolumens ergab sich aus seinem Misstrauen gegenüber der bisher gängigen Weise, das Volumen anhand der Fassdiagonale zu bestimmen. 1615 veröffentlichte er seine Ergebnisse in der *Stereometria Doliorum Vinariorum*, die als keplersche Fassregel in die Geschichte eingingen.[1] Ein erkenntnisförderndes Element der Entstehungsgeschichte dieser Fassregel liegt in einem Blick auf die Person und den Kontext ihres Schaffens begründet. Der Berechnung lag ein aktuelles und praktisches Problem zugrunde. Kepler ging es nicht darum eine möglichst abstrakt-theoretische Formel herzuleiten, sondern darum die Nachprüfbarkeit und Nachvollziehbarkeit seiner Berechnungen in den Vordergrund zu rücken. Dieses Element ist es, das auch heute einen jeden Lehrer leiten sollte. Ziel der Oberstufenmathematik soll es sein, in den Schülern ein Verständnis für innermathematische Dinge auf einer möglichst anschaulichen und praktischen Ebene zu wecken. Diese Ausarbeitung behandelt in Kontinuität dieser Zielausrichtung die Fragestellung, inwiefern der Lehrplan in den letzten Jahren und Jahrzehnten im Hinblick auf die Anwendung der Integralrechnung einer positiven Verständnisentwicklung oder aber einer erschwerenden Verkomplizierung folgt. Als Untersuchungsgrundlage soll das Lehrbuch *Lambacher Schweizer* dienen.

2 Quantitative Entwicklung des *Lambacher Schweizers*

Ein Vergleich verschiedener Auflagen des *Lambacher Schweizers* aus den Jahren 1958, 1990 und 2001 liefert interessante Ergebnisse. Bereits ein Blick in das jeweilige Inhaltsverzeichnis gewährt einen Einblick in die Entwicklung der Integralrechnung im Unterricht in den letzten fünfzig Jahren. Während in der Ausgabe des Jahres 1958 noch eine klare Linie zwischen Differentialrechnung und Integralrechnung gezogen wird, verschwimmt diese Unterscheidung mehr und mehr in den späteren Auflagen. So lässt sich zwar keine exakte Quantitätsuntersuchung anstellen, dennoch wird eine Tendenz sichtbar. In der 58er Auflage werden dem Thema der Differentialrechnung in vier Kapiteln etwa 100 Seiten, dem der Integralrechnung in zwei Kapiteln hingegen nur knapp 40 Seiten

[1] Für einen ausführlicheren Hintergrund vgl.: Keppler, Johannes: Neue Stereometrie der Fässer. Leipzig 1908.

gewidmet. Schränkt man die Sicht lediglich auf das Kapitel der *Anwendung der Integralrechnung* ein, bleiben hierfür nur 22 Seiten. Das Thema der Differentialrechnung wird in der Auflage von 1990 noch breiter ausgeführt. So wird über einen teils wiederholenden funktionalen Einstieg und über den Begriff des Grenzwertes an die Differentialrechnung herangeführt. Diese wird in einem breit angelegten Kapitel zur *Untersuchung ganzrationaler Funktionen* gefestigt, bis schließlich nach etwa 140 Seiten ein 30seitiger Einstieg in die Integralrechnung erfolgt. In den beiden folgenden Kapiteln steht ein wechselseitiges Anwenden von Differential- und Integralrechnung im Blickfeld, wobei ein klarer Schwerpunkt auf die Anwendung der Differentialrechnung gelegt wird. Erst in einem kurzen, angehängten Kapitel zur *Weiterführung der Integralrechnung* wird ein zehnseitiger Überblick über vertiefende Strukturen der Integration, über die Substitution und die Produktintegration gegeben. Diese leichte, quantitativ kaum feststellbare Zunahme von Integrationsinhalten im *Lambacher Schweizer* bestätigt die Differentiation als dominierendes Thema der Schulanalysis und stellt den vermehrten Versuch einer inhaltlich-strukturellen Verbindung beider Themen dar. Dieser Verknüpfungsprozess von Differentiation und Integration ermöglicht es in der Ausgabe von 2001 kaum noch eine quantitative Aussage über die Vertretung beider Themen anzustellen. Der Einstieg in die Differentialrechnung wird stark verkürzt, sodass bereits noch im ersten Drittel des Buches eine ausführliche *Einführung in die Integralrechnung* gegeben wird. Nach einem inhaltlich verknüpfenden Kapitel zu *Exponentialfunktionen,* folgt ein nochmals knapp 20 Seiten umfassendes Kapitel zur *Weiterführung der Integralrechnung.* Der inhaltliche Aufbau wird mit einem Kapitel zu *Gebrochenrationalen und trigonometrischen Funktionen* abgerundet. So zeichnet sich diese Auflage durch ein ausgewogenes Verhältnis der beiden Hauptthemen der Analysis aus; dies offensichtlich zu Ungunsten anderer Themen, wie zum Beispiel den *Folgen und Reihen*, die 1958 noch einen nicht unerheblichen Teil des Analysisbuches in Anspruch genommen haben.

Ein weiteres Phänomen, das sich in dem Vergleich der Inhaltsverzeichnisse der verschiedenen Auflagen beobachten lässt, ist die unterschiedliche Unterbringung der historischen Entwicklung des jeweils betrachteten Themas. Wie bereits der Einstieg über Kepler verdeutlichen sollte, ist es zuweilen durchaus sinnvoll und vielleicht sogar notwendig, für die Annäherung an ein neues Thema einen geeigneten historischen Einstieg zu wählen. Nicht nur, dass auf diese Weise ein Bezug zu anderen Fächern hergestellt werden kann, die Schüler bekommen auch eine Vorstellung von der Praxisrelevanz des Themas und haben damit vielleicht eine bessere verständnisorientierte Ausgangsbasis. Dieser Ansatz geht in den Ausgaben von 1958 und 1990 verloren. In diesen erscheint ein historischer Überblick allenfalls als eine Art ‚lästiges Anhängsel' am Ende des Buches. Dieses wird von 1958 bis 1990 immerhin von zwei auf sechs Seiten ausgeweitet und durch einige Abbildungen und Bilder von Newton und Leibniz aufgelockert.[2] Erst in der Ausgabe von 2001 finden sich historische Bezüge schon ‚zwischen' den Aufgaben. So tauchen an einigen Stellen im Buch kleine Kästchen auf, die

[2] Vgl.: Lambacher Schweizer: Analysis. Grundkurs. Stuttgart 1990, S. 252-258.

lediglich eine grobe Skizze des geschichtlichen Hintergrundes aufzeigen.[3] Eine tatsächliche Verknüpfung vom mathematischen Problem und geschichtlichen Hintergrund findet jedoch nur in den *Mathematischen Exkursionen* am Ende eines Kapitels statt, womit sie ihren Status eines Anhängsels behalten.[4] So legt der Aufbau aller drei Bücher die historischen Bezüge allenfalls als nahezu unnötige Ergänzung zum Lehrstoff fest, nicht aber als erkenntnis- und verständnisförderndes Element.

3 Qualitative Entwicklung des *Lambacher Schweizers*

3.1 Integrieren heißt Flächenberechnung

Geht man noch einen Schritt weiter über den Aspekt der Quantität hinaus, rückt die Qualität in den Vordergrund. Natürlich ist der bisher beleuchtete Wandel der inhaltlichen Struktur in der Praxis mit großer inhaltlicher Schwerpunktverschiebung verbunden. Die bereits angesprochene Verbannung der Folgen und Reihen aus den Schulbüchern ist ein Produkt dieser inhaltlichen Verschiebung. Für die Integralrechnung und speziell für ihre Anwendung liegt hierin der Wandel, von der verständnistheoretischen Auffassung des Integrals als Fläche, hin zur Rekonstruktion und zum Mitteln. Die betrachtete quantitative Zunahme der Integralrechnung im *Lambacher Schweizer* bedingt einen zunehmend breiteren Zugang zum Thema.
Betrachten wir unter diesem Aspekt noch einmal die Ausgabe von 1958. Dort wird das Kapitel zur Anwendung der Integralrechnung mit folgenden Worten eingeleitet:

> *Die Grundaufgabe der Differentialrechnung war das Tangentenproblem. Es führte zum Begriff der Ableitung. Dieser Begriff war dann der Schlüssel zur Lösung zahlreicher anderer Aufgaben. Als Grundlage der Integralrechnung wird sich das Flächenproblem erweisen, d.h. die Aufgabe, den Flächeninhalt eines beliebigen ebenen Flächenstücks zu bestimmen. Diese Aufgabe wird zu einem neuen Grundbegriff, dem bestimmten Integral, führen. Mit seiner Hilfe lassen sich dann wieder zahlreiche weitere Aufgaben lösen, so z.B. die Bestimmung von Rauminhalten, Bogenlängen, Oberflächen, Schwerpunkten usw.*[5]

Es sticht hervor, wie das Integral auf den Begriff der Fläche festgelegt wird. Dabei wird das Integral als Fläche unter einer Funktion f aufgefasst. Es ist

[3] Vgl. beispielsweise den sehr knappen Einschub zu Leibniz und Newton, in: Lambacher Schweizer: Analysis. Grundkurs. Stuttgart 2001, S.69.

[4] So zum Beispiel die Exkursion zu den Prinzipien von Cavalieri oder zur Fassregel von Kepler, in: Ebd., S.82f, 138f.

[5] LS 1958, S.150.

somit möglich verschiedenste Aufgaben zu lösen. Beginnt man mit einfachsten linearen Funktionen, wird die Integration überflüssig, da Rechtecks-, Dreiecks- oder Trapezflächen problemlos berechnet werden können, ohne den Begriff des Integrals zu kennen. Anwendung findet daher die Integration bei Funktionen höheren Grades. Doch auch Volumina von Rotationskörpern lassen sich mit Hilfe des Integrals berechnen. Hierfür wird eine stetige Funktion betrachtet, so dass durch Rotation der Fläche zwischen dieser Funktion f und der x-Achse ein Körper mit dem Volumen $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ entsteht.

Beispiel 1:
a) Leite die Formel zur Volumenberechnung eines Kegels her.[6]

Lösung:

Lässt man ein rechtwinkliges Dreieck, von dem eine Kathete auf der x-Achse liegt, um diese Achse rotieren, so entsteht ein **Kegel** (Bild 244/1).

Die Funktion f hat die Steigung $\frac{r}{h}$ und ihr Graph geht durch den Ursprung. Daher ist $f(x) = \frac{r}{h}x$ und man erhält

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h f^2(x)\,dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h^3}{h^2} \end{aligned}$$

Daher gilt für das Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. ■

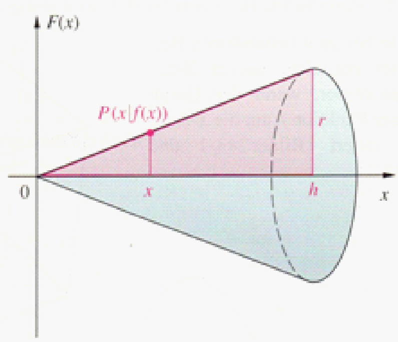


Bild 244/1: Ein Kegel als Rotationskörper

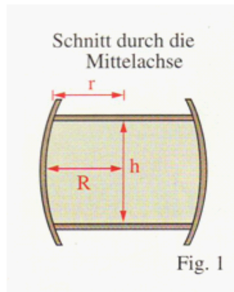
b) Leite die Formel zur Volumenberechnung einer Kugel her.

Lösung: Verfahre wie oben, wobei der Querschnitt ein Kreis mit Radius r ist, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Es ergibt sich das Kugelvolumen:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-r}^{r} = \pi(\tfrac{2}{3}r^3 + \tfrac{2}{3}r^3) = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

[6] Cornelsen: Mathematik. Analysis, Berlin 2001, S.244.

Beispiel 2:[7]
Ein Fass hat die Höhe $h = 1,2$ m und die Radien $r = 0,80$ m und $R = 1,0$ m. Bestimmen Sie sein Volumen V. Wählen Sie dazu ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie eine quadratische Funktion f, über deren Graph Sie das Fass als Rotationskörper erhalten.



Lösung: Man wählt das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Mittelpunkt des Fasses und die Mittelachse des Fasses auf der x-Achse liegt. Bei der Längeneinheit 1 m erhält man f mit $f(x) = -\frac{5}{9}x^2 + 1$, und für V (in m^3) gilt $V = \pi \int\limits_{-0,6}^{0,6} (f(x))^2 dx = \frac{656}{625}\pi \approx 3,2974$.

Viele Beispiele mehr ließen sich an dieser Stelle anführen, die verschiedenste Probleme behandeln. Auf dieser Art der Aufgabenstellung, eben auf dem Zugang das Integral als Fläche aufzufassen, liegt der Schwerpunkt im *Lambacher Schweizer* von 1958. Bei genauerem Hinsehen, fallen durchaus einige Rekonstruktionsaufgaben unter der Überschrift *Weitere Anwendungen* ins Auge, das Mitteln jedoch erfährt keine Beachtung.

3.2 Integrieren heißt Rekonstruktion

Ein Blick auf die Ausgabe von 1990 lässt einen deutlichen Zuwachs an Rekonstruktionsaufgaben erkennen. So findet sich insbesondere unter der Überschrift *Physikalische Beispiele in geometrischer Deutung* eine Vielzahl an Aufgaben, die gerade das Integral als Rekonstruktion stark machen. Doch wird hierbei auch sehr deutlich, dass es nicht um einen völlig neuen Bereich der Integration geht. Die Flächenberechnung wird nicht ersetzt, sie wird lediglich umgedeutet. Es geht um den Zugang zum Thema. Es geht darum, den Begriff der Integration nicht auf das Lösen geometrischer Probleme zu beschränken, weiterhin liegt den Aufgaben die Berechnung einer Fläche zugrunde, so wie

[7] LS 2001, S.126.

es in obigem Zitat vorgestellt wurde. Die Idee der Rekonstruktion ist es, die ‚ursprüngliche' Funktion f wiederherzustellen ausgehend von der momentanen Änderungsrate f'. Häufige Beispiele, die hierbei betrachtet werden, sind die Rekonstruktion von einer Geschwindigkeit zum Weg oder aber von einer verrichteten Arbeit zu einer Kraft.

Beispiel 3:
Eine Forschungsrakete soll mithilfe eines Fallschirms innerhalb von $20s$ von etwa $130km/h$ auf etwa $22km/h$ abgebremst und zur Landung gebracht werden. Nach einer Modellrechnung gilt dabei für ihre Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{3}{20}t^2 - 3t + 36$ ($0 \leq t \leq 20$; t in s, v in m/s). Welche Streckenlänge durchfällt die Rakete während der Bremsphase? (Hinweis: $1m/s = 3,6km/h$)

Lösung: Für die durchfallene Strecke gilt:

$$s = \int_0^{20} \left(\tfrac{3}{20}t^2 - 3t + 36\right) dt = \left[\tfrac{1}{20}t^3 - \tfrac{3}{2}t^2 + 36t\right]_0^{20} = 520.$$

Die Rakete durchfällt $520m$.

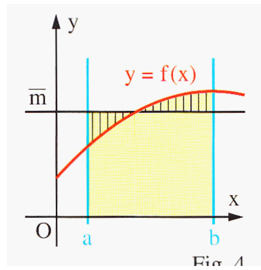
Auch in dieser Ausgabe des *Lambacher Schweizer* wird der Begriff des Mittelns im Umfeld der Integration nicht verwendet. Diesem wird erst in der Auflage von 2001 ein Unterkapitel gewidmet.

3.3 Integrieren heißt Mitteln

In der jüngsten dieser Ausarbeitung zugrunde liegenden Auflage des *Lambacher Schweizers* steht, neben einer Vielzahl an Aufgaben zur Flächenberechnung, ein nicht minder großes Repertoire an Aufgaben zur Rekonstruktion zur Verfügung. Es wird darauf geachtet, ein großes Spektrum an Anwendungsgebieten der Integration abzudecken. Doch darüber hinaus widmet sich ein Unterkapitel allein dem Prinzip des Mittelns im Kontext der Integration. So wird an dieser Stelle eine Definition geliefert und, neben den Einführungsbeispielen, eine sehr begrenzte Anzahl an Übungsaufgaben angeboten. Dem *Lambacher Schweizer* folgend, versteht man unter dem Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte einer stetigen Funktion f auf einem Intervall $[a;b]$ das Integral $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ über f auf $[a;b]$.[8] Auch hierbei wird jedoch wiederum an das geometrische Verständnis angeknüpft:

> *Anschaulich ist der Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte von f auf $[a;b]$ die Breite eines Rechtecks, welches dieselbe Länge und denselben Inhalt hat wie die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[a;b]$.*[9]

[8] LS 2001, S.127.
[9] Ebd.



Beispiel 4:[10]
Bestimme für f mit $f(x) = e$ den Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte auf $[-1; 1]$.

Lösung: Für den Mittelwert $\overline{m}$ gilt: $\overline{m} = \frac{1}{1-(-1)} \int\limits_{-1}^{1} e^x dx = \frac{1}{2}[e^x]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}) \approx 1,175$.

So hat sich also innerhalb der letzten 50 Jahre, auf der Grundlage einer quantitativen Verschiebung im *Lambacher Schweizer* zugunsten der Integralrechnung, der rein geometrische Zugang zur Integration gewandelt. Im *Lambacher Schweizer* von 2001 stehen drei Prinzipien für die Auffassung des Integrals nebeneinander. Damit wird der Versuch unternommen, ein tieferes Verständnis für die mathematischen Hintergründe der Integration zu wecken und ihre vielfachen Anwendungsmöglichkeiten vorzustellen. Das Integral bleibt als die Fläche unter einer Funktion, doch die unterschiedliche Interpretation dieser Fläche soll den Einstieg erleichtern. Dem Schüler soll die Möglichkeit gegeben werden, über den Zugang ins Thema zu finden, der ihm am vertrautesten ist, der ihm die Möglichkeit gibt, einen Bezug zum Thema zu bekommen.

4 Integralrechnung im Zentralabitur [11]

Nach dieser vergleichenden Übersicht über die Entwicklung der Integration in 50 Jahren Verlaufsgeschichte am Beispiel des *Lambacher Schweizer*, soll nun, neben dem Schulbuch, noch ein entscheidendes Element in die Analyse aufgenommen werden. Das im Jahr 2007 eingeführte Zentralabitur ermöglicht einen Blick auch auf die Anforderungen, denen die Schüler schließlich gerecht werden müssen. So sollen an dieser Stelle die Vorgaben und die Art der Aufgaben für das Zentralabitur Gegenstand der Betrachtung sein. Im Fokus steht dabei die Einbettung der Integration in Zentralabituraufgaben. Zunächst die

[10] Ebd.

[11] Dieser Punkt soll bewusst kurz gehalten werden, da er an anderer Stelle gesondert betrachtet wird.

Vorgaben berücksichtigend, fällt in der Unterscheidung von Grund- und Leistungskurs lediglich das Hinzunehmen der Integrationsregeln – also der Partiellen Integration und der Substitution[12] – für den Leistungskurs auf. Sowohl im Grund- als auch im Leistungskurs sollen Wirkungen untersucht und Flächen berechnet werden. Dem Mitteln wird in diesem Zusammenhang keine Bedeutung geschenkt.[13] Zu jeder eingereichten Abituraufgabe gehört auch ein stichpunktartiger Überblick, der die inhaltlichen Schwerpunkte grobskizziert und den Bezug zu den jeweiligen Vorgaben herstellt. So gab es auch im Jahr 2009 eine Abituraufgabe, die unter anderem genau diese beiden Bereiche – Flächenberechnung und Wirkungsuntersuchung (Rekonstruktion) – beinhaltete.[14]

5 Schlussbetrachtung

Im Kontext der anfangs formulierten Frage, ob in der Entwicklung des Lehrplans in Bezug auf die Integration ein positiv verständnisorientierter oder ein erschwerend verkomplizierender Prozess begründet liegt, lassen sich die Ergebnisse noch einmal im Zusammenhang betrachten. Der quantitative Zuwachs an Integrationsinhalten im Analysis-Unterricht ermöglicht ein tieferes Eindringen in die Materie. Wie gezeigt wurde, hat der Umfang der Integralrechnung in den letzten 50 Jahren vergleichsweise stark zugenommen. Dies bedingt zum Einen ein breiteres Feld an Übungsaufgaben, nicht nur um ein Kalkül zu entwickeln, das sich bei genügend Übung bei jeder Art von Aufgabe einstellen wird, sondern auch um ein tieferes Verständnis davon zu bekommen, was passiert. Dazu gehört zum Anderen jedoch auch, dass eine größere Auswahl von Aufgabentypen zur Verfügung steht. Die Varianz der Aufgabentypen (Qualität) gepaart mit einer gewissen Menge an Aufgaben (Quantität), sollte auf die Dauer sowohl und in erster Linie zum Verständnis beitragen, als auch sodann zum kalkulierbaren Umgang mit der Materie. Dabei steht das Kalkül jedoch nicht zwingend in der Folge des Verständnisses. Mag es auch Schüler geben, die zuerst verstehen und aufgrund dessen ein Kalkül entwickeln, so reagiert ein Großteil der Schüler doch eher auf das Kalkül und verlagert den Verstehensprozess in den Bereich des Unwichtigen. Dem entgegenwirken soll die Varianz der Aufgabentypen. Müssen die Schüler sowohl die Flächenberechnung, als auch die Rekonstruktion und womöglich in einem dritten Ansatz auch noch das Mitteln mit Hilfe der Integration beherrschen, so wird in gewisser Weise der Kalkülbildung entgegengewirkt. Der verständnisorientierte Ansatz steht im Vordergrund. Von Nachteil kann sich dies allerdings für schwache Schüler auswirken, die auf ein Kalkül angewiesen sind und dem Reduzieren aller drei Probleme auf eine Flächenberechnung nicht gewachsen sind. Für solche mag die ausführlich behandelte Aufgabenvarianz

[12] Für das Herleiten und Einbringen der Integrationsregeln im Unterricht, vgl. Anhang 1.

[13] Vgl. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de für die Vorgaben für das Zentralabitur 2010.

[14] Vgl. hierzu Anhang 2.

eher ein Hindernis, denn eine Hilfe sein. Es liegt hierbei in der Verantwortung des Lehrers überlegt abzuwägen, in wie weit es dem Schüler möglich ist ein Verständnis zu entwickeln. Die Aufgabe die Schüler so an die Integralrechnung und ihre vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten heranzuführen, dass bei jedem einzelnen ein gewisses Maß an Verständnis nachzuweisen ist, ist sicher keine leichte. Dennoch ist der Weg, der diese Aufgabe erfüllt, gangbar und auf der Grundlage der verschiedenen verständnisorientierten Einstiegsmöglichkeiten in das Thema insgesamt vereinfacht worden.

Anhang

1. Anhang: Integrationsregeln[15]

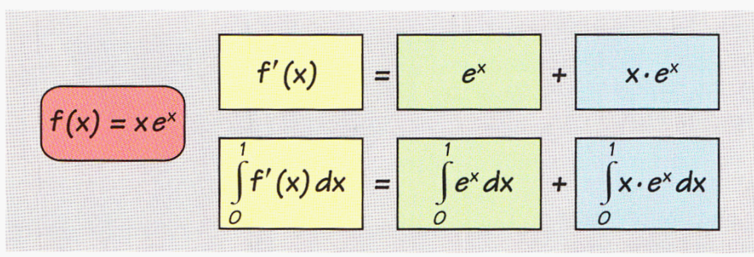
1.1 Partielle Integration

Aus der Produktregel kann ein Verfahren zur Bestimmung von Integralen gewonnen werden. Wenn $f = u \cdot v \Longrightarrow f' = u'v + uv'$, dann
$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$.
Wegen $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b$ gilt

Satz 1: Sind u und v auf dem Intervall [a; b] differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungsfunktionen u′ bzw. v′, so gilt

$$\int_a^b \mathbf{u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx}. \qquad \textbf{(Produktintegration)}$$

Idee zur Einführung:



Neugier wecken mit:
$\int_a^b ln(x)dx = \int_a^b (ln(x)) \cdot 1dx = [(ln(x)) \cdot x]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} \cdot xdx = [(ln(x)) \cdot x]_a^b - [x]_a^b =$
$[(ln(x)) \cdot x - x]_a^b$

[15] Dieser Anhang baut auf der Einführung der Integrationsregeln im Lambacher Schweizer: Analysis. Leistungskurs, Stuttgart 2002 auf.

1.2 Substitution

Hier bildet die Kettenregel die Grundlage. Sei F eine Stammfunktion von f und g differenzierbar.
Wenn $H(x) = F(g(x)) \Longrightarrow H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, dann
$\int\limits_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$

Von links nach rechts gelesen:

Bei der **Integration durch Substitution** wendet man die folgende Integrationsformel an:

$$\int\limits_a^b \mathbf{f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx} = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} \mathbf{f(z)\, dz}.$$

Von rechts nach links gelesen:

Bei der **Integration durch Substitution der Integrationsvariablen** wendet man die folgende Integrationsformel an:

$$\int\limits_a^b \mathbf{f(x)\, dx} = \int\limits_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} \mathbf{f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt}.$$

1.3 Beispiel:

Bestimmen Sie $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Lösung:

Substitution: $x = g(t) = \sin(t)$
Ableitung: $g'(t) = \cos(t)$
Umrechnung der Grenzen: Aus $sin(t) = 0$ folgt $t_1 = 0$;
aus $sin(t) = \frac{1}{2}$ folgt $t_2 = \frac{\pi}{6}$.
Durchführen der Integration:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(t))^2}} \cdot \cos(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 1dt = [t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$$

2. Anhang: Abituraufgabe aus dem Zentralabitur 2009[16]

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

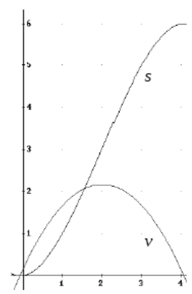
Im Rahmen eines Schulprojektes führen Schülerinnen und Schüler unterstützt durch die Polizei eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Auf einem 6 km langen Stück Landstraße werden nach Kilometer 1, 3 und 6 die Fahrzeiten gemessen. Die Messstrecke beginnt an einem Stoppschild; die zulässige Höchstgeschwindigkeit auf der Landstraße beträgt 100 km/h. Ihre Messergebnisse haben die Schülerinnen und Schüler in der folgenden Tabelle festgehalten:

Messung	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Zeitpunkt t in Minuten	0	1	2	4
Zurückgelegter Weg $s(t)$ in km	0	1	3	6

Die Funktion $s(t)$ beschreibt den zurückgelegten Weg vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t.

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist $v(t)$ und die Beschleunigung zum Zeitpunkt t wird mit $a(t)$ bezeichnet.

Es gilt: $s'(t) = v(t)$ und $v'(t) = a(t)$



b) (1) *Geben Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v an und prüfen Sie, ob der Fahrer am Stoppschild tatsächlich gehalten hat.*

(2) *Prüfen Sie, ob er die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h eingehalten hat.*

(3) *Geben Sie die Gleichung der Beschleunigungsfunktion a an. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse über dem Intervall* $[0;2]$. ***Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Wert*** $v(2)$ ***und interpretieren Sie die Differenz.*** **(17 Punkte)**

[16] Aufgerufen am 05.01.2010 auf: http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2.

Lösung zu Aufgabenteil b) (3):

(3) Die Beschleunigungsfunktion a hat die Gleichung $a(t)=v'(t)=-t+2$.

Der Graph von a hat eine Nullstelle in $t = 2$.

Für die Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse gilt also:

$$A=\int_0^2 a(t)\mathrm{d}t \quad =\int_0^2 (-t+2)\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2=2.$$

Damit schließt der Graph von a mit der t-Achse im Intervall [0;2] eine Fläche mit 2 FE ein.

Die Geschwindigkeitsfunktion liefert an der Stelle $t = 2$ den Wert $v(2)=2\frac{1}{6}$ (vgl. b(2)).

Mit dem Integral $\int_0^2 a(t)\mathrm{d}t=2$ wird hier die Zunahme der Geschwindigkeit im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 2$ berechnet. Da aber das betrachtete Fahrzeug beim Start der Messung bereits eine Geschwindigkeit von 1/6 Kilometer pro Minute besaß, ergibt sich folglich

$$v(2)=2\frac{1}{6}=2+\frac{1}{6}.$$

Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich in allen Fällen als Summe der Anfangsgeschwindigkeit bzw. des Anfangswertes und des Wertes des Integrals über a im Intervall [0;2].

Literatur und Quellen

1. Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart: Analysis verständlich unterrichten, München 2006.

2. Freudigmann, Hans, u.a.: Lambacher Schweizer. Grundkurs Analysis, Stuttgart 2001.

3. Freudigmann, Hans, u.a.: Lambacher Schweizer. Leistungskurs Analysis, Stuttgart 2002.

4. Griesel, Heinz, u.a.: Elemente der Mathematik. Leistungskurs Analysis, Hannover 2001.

5. Jahnke, Thomas (Hrsg.): Mathematik. Analysis. Cornelsen, Berlin 2001.

6. Schweizer, Wilhelm: Lambacher Schweizer. Analysis, Stuttgart 1958.

7. Schweizer, Wilhelm; u.a.(Hrsg.): Lambacher Schweizer. Analysis. Grundkurs – Gesamtausgabe, Stuttgart 1990.

8. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de