Anwendung der Integralrechnung

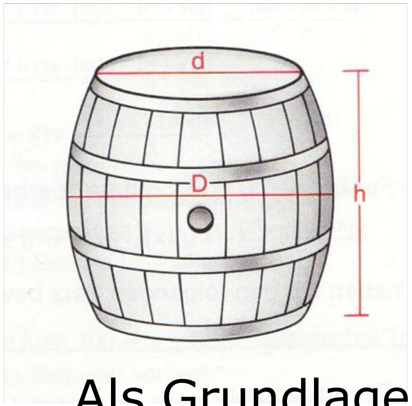
Positive Verständnisentwicklung des Lehrplans oder erschwerende Verkomplizierung?

Didaktik der Analysis Oliver Passon Carolin Henke Gerrit Hübner

Fragestellung: Positive Verständnisentwicklung des Lehrplans oder erschwerende Verkomplizierung?

- Einstieg: Lambacher Schweizer – Integralrechnung im Wandel der Zeit (1958-2001)
- Übersicht: Welche Aufgabentypen gibt es?
  - Flächenberechnung
  - Rekonstruktion
  - Mitteln
- Rechenregeln
- Aufgaben aus dem Zentralabitur – ein Überblick
- Schlussbetrachtung: Beantwortung der Ausgangsfrage

Gliederung



Einführung zum Kapitel „Anwendung der Integralrechnung" im Lambacher Schweizer von 1958:

„Als Grundlage der Integralrechnung wird sich das Flächenproblem erweisen, d.h. die Aufgabe, den Flächeninhalt eines beliebigen ebenen Flächenstücks zu bestimmen. Diese Aufgabe wird zu einem neuen Grundbegriff, dem bestimmten Integral, führen. Mit seiner Hilfe lassen sich dann wieder zahlreiche weitere Aufgaben lösen, so z.B. die Bestimmung von Rauminhalten, Bogenlängen, Oberflächen, Schwerpunkten, usw."

Lambacher Schweizer von 1958:
- Integral als Fläche
- Kaum Rekonstruktion
- Kein Mittelwert

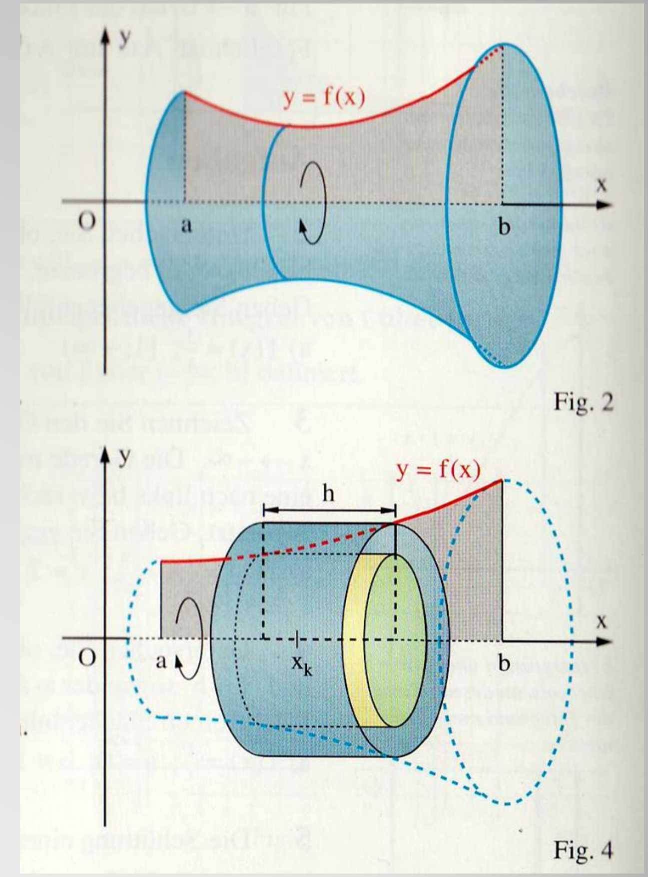
Lambacher Schweizer von 1990:
- Integral als Fläche
- Rekonstruktion
- Kein Mittelwert

Lambacher Schweizer von 2001:
- Integral als Fläche
- Rekonstruktion
- Mittelwert

Integralrechnung im Wandel der Zeit

Prinzip: Integral wird als Fläche unter einer Funktion f aufgefasst.

- Flächen- (bzw. Volumen-) berechnung im Bauwesen: häufig verbunden mit dem Vergleich verschiedener Möglichkeiten (hinsichtlich Materialaufwand)
- Rauminhalte von Rotationskörpern

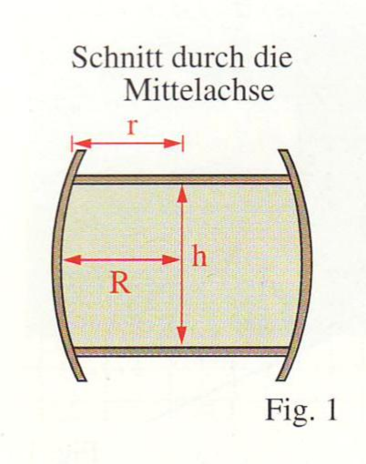


Integrieren heißt Flächenberechnung

Gruppe 1:
Leite die Formel zur Volumenberechnung einer Kugel her.

Gruppe 2:
Leite die Formel zur Volumenberechnung eines Kegels her.

Ein Fass hat die Höhe h = 1,2 m und die Radien r = 0,80 m und R = 1,0 m. Bestimmen Sie sein Volumen V. Wählen Sie dazu ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie eine quadratische Funktion f, über deren Graph Sie das Fass als Rotationskörper erhalten.



LS 2001, S.126.

Übungsaufgaben zum Aufwärmen

Lässt man ein rechtwinkliges Dreieck, von dem eine Kathete auf der x-Achse liegt, um diese Achse rotieren, so entsteht ein **Kegel** (Bild 244/1).

Die Funktion f hat die Steigung $\frac{r}{h}$ und ihr Graph geht durch den Ursprung. Daher ist $f(x) = \frac{r}{h}x$ und man erhält

$$V = \pi \int_0^h f^2(x)\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h^3}{h^2}$$

Daher gilt für das Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. ■

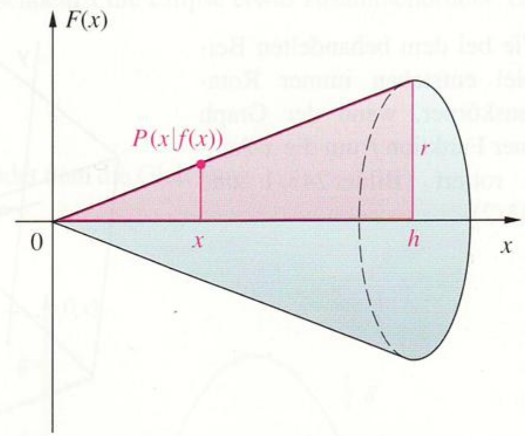


Bild 244/1: Ein Kegel als Rotationskörper

Cornelsen 2001, S.244.

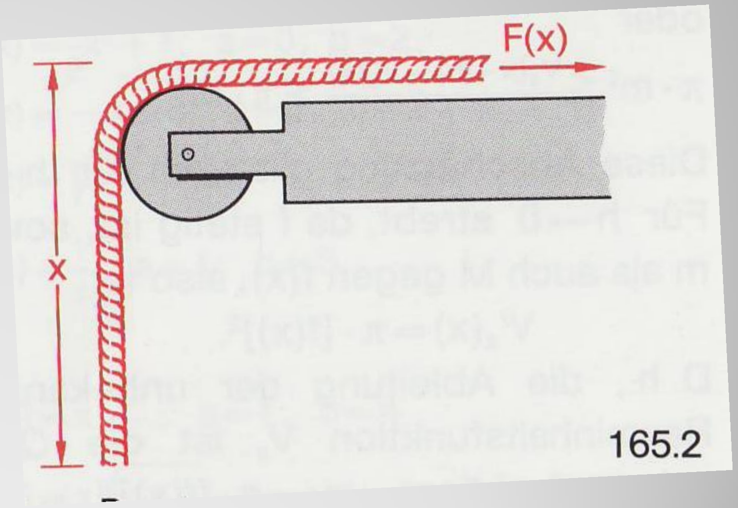
9 a) Man wählt das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Mittelpunkt des Fasses und die Mittelachse des Fasses auf der x-Achse liegt. Bei der Längeneinheit 1 m erhält man f mit $f(x) = -\frac{5}{9}x^2 + 1$, und für V (in m³) gilt $V = \pi \int_{-0,6}^{0,6} (f(x))^2 dx = \frac{656}{625}\pi \approx 3{,}2974$.

LS Lösungen 2001, S.105.

Lösungen

Prinzip: Wiederherstellen der „ursprünglichen“ Funktion f ausgehend von der momentanen Änderungsrate f´.

- Häufige Verwendung im physikalischen Zusammenhang:
  - Geschwindigkeit -> Weg
  - Verrichtete Arbeit -> Kraft



Integrieren heißt Rekonstruieren

4.1 Physikalische Arbeit

Aufgabe 1 Gefällte Baumstämme können mithilfe von Traktoren aus dem Wald herausgezogen werden. Ein Baumstamm rutscht dabei in Zugrichtung von einer Stelle a zu einer Stelle b.

Wir nehmen an, dass der Traktor eine *konstante Kraft* F auf den Stamm *in Richtung des Weges* der Länge $\Delta s = b - a$ ausübt.

Für diesen Fall gilt für die verrichtete Arbeit:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Arbeit} & = & \text{Kraft} & \cdot & \text{Weg} \\ W & = & F & \cdot & \Delta s \end{array}$$

Die Arbeit kann als Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion *Weglänge* ⟶ *Kraft* über dem Intervall [a; b], nämlich des Rechtecks mit den Seitenlängen F und Δs, gedeutet werden.

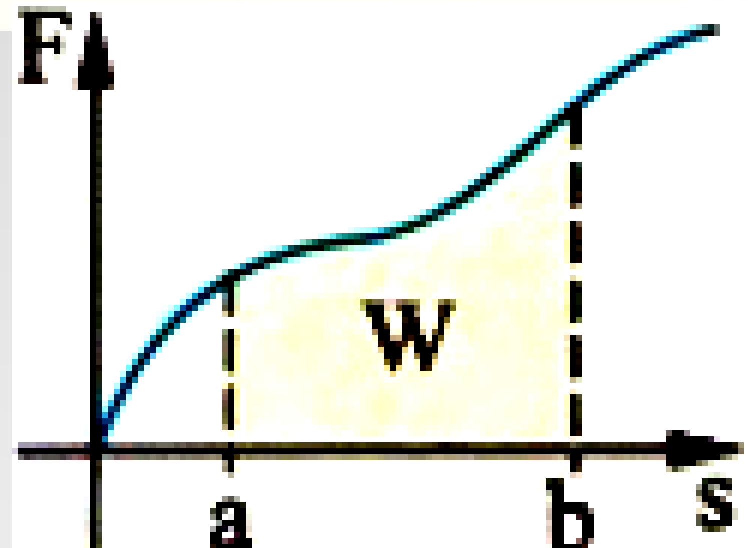
Elemente der Mathematik 2001, S.181f.

Beispiel

Berechnen der verrichteten Arbeit bei nichtkonstanter Kraft.

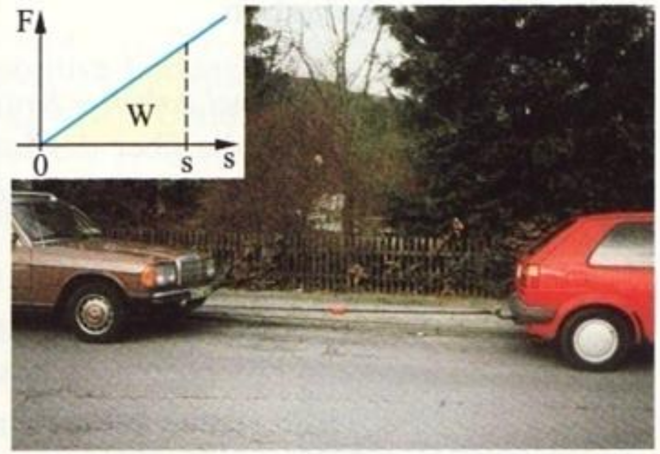
a) Ein Segelflugzeug kann sich mit einer Seilwinde in die Höhe ziehen lassen. Auf den ersten Metern wird das Segelflugzeug über den Erdboden gezogen. Bei unterschiedlicher Beschaffenheit des Untergrundes ist die Kraft nicht konstant. Jedoch haben Kraft und Weg dieselbe Richtung. Der Graph der stetigen Funktion *Weglänge* $\longrightarrow$ *Kraft* ist rechts abgebildet.
Berechne auch hier die Arbeit W, die verrichtet werden muss, um das Flugzeug von a nach b zu ziehen.

Elemente der Mathematik 2001, S.181f.



Beispiel

b) Zum Abschleppen eines Fahrzeugs wird ein elastisches Abschleppseil benutzt. Durch das Anfahren des Abschleppwagens wird das Seil gespannt. Die Kraft zum Spannen des Seils ist nicht konstant, hat aber noch dieselbe Richtung wie der Weg, denn angenähert gilt: Dehnt man das Seil vom entspannten Zustand $(s=0)$ um die Auslenkung s, so wächst die Kraft $F(s)$ proportional zur Auslenkung s:

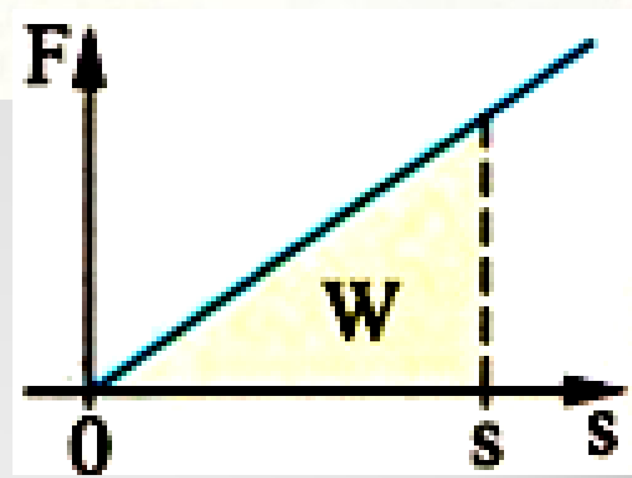


Hookesches Gesetz

$F(s) = D \cdot s$ (D ist die Federkonstante). Der Graph der Funktion *Weglänge* ⟶ *Kraft* ist rechts abgebildet.

Berechne die Spannarbeit W, die der Abschleppwagen verrichten muss, um das Abschleppseil von a nach b zu dehnen.

Elemente der Mathematik 2001, S.181f.

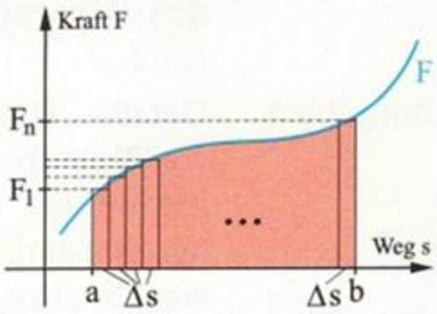


Beispiel

Lösung

Summe von Produkten

a) Wir zerlegen das Intervall [a; b] in kleine Teilintervalle der Länge Δs. Ist Δs hinreichend klein, so kann man die Kraft F in den Teilintervallen hinreichend genau durch konstante Kräfte $F_1, F_2, F_3, \ldots$ annähern. Das ist umso genauer möglich, je kleiner man Δs wählt. Für die zu berechnende Arbeit W gilt (angenähert): $W \approx F_1 \cdot \Delta s + F_2 \cdot \Delta s + \ldots + F_n \cdot \Delta s$



Die Arbeit W wird umso genauer durch die Summe rechts angegeben, je kleiner Δs gewählt wird.
Die Summe kann auch als Flächeninhalt einer Treppenfigur gedeutet werden.
Nun ist der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion umso genauer gleich dem Flächeninhalt der Treppenfigur, je kleiner Δs gewählt ist.
Daran erkennt man anschaulich: Die gesuchte Arbeit W kann gedeutet werden als Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von F von a bis b. Nach der geometrischen Definition des Integrals gilt also: $W = \int_a^b F(s)\,ds$

b) Nach dem Ergebnis von Teilaufgabe a) muss der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion *Weglänge* $\longrightarrow$ *Kraft* über dem Intervall [0; s] berechnet werden. Diese Fläche ist ein Dreieck. Daher gilt:

$W = \frac{1}{2} F(s) \cdot s = \frac{1}{2} D \cdot s \cdot s = \frac{1}{2} D s^2$

Elemente der Mathematik 2001, S.181f.

Beispiel

Eine Forschungsrakete soll mithilfe eines Fallschirms innerhalb von 20s von etwa 130 km/h auf etwa 22 km/h abgebremst und zur Landung gebracht werden. Nach einer Modellrechnung gilt dabei für ihre Geschwindigkeit: $v(t) = 3/20\, t^2 - 3\, t + 36$ ($0 \leq t \leq 20$; t in s, v in m/s). Welche Streckenlänge durchfällt die Rakete während der Bremsphase?

(Hinweis: 1 m/s = 3,6 km/h)

Lösung:

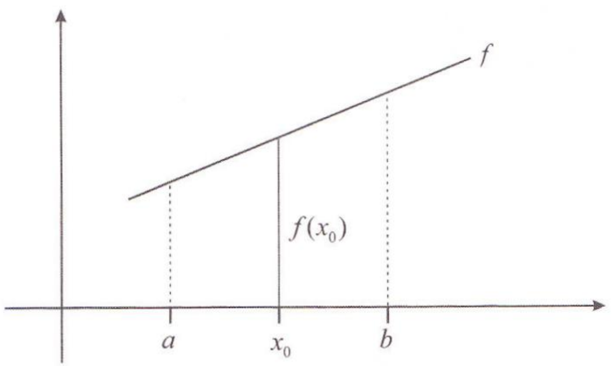
S. 157 **2** Für die durchfallene Strecke 2 gilt:

$$s = \int_0^{20} \left(\frac{3}{20}t^2 - 3t + 36\right)dt = \left[\frac{1}{20}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 36\,t\right]_0^{20} = 520$$

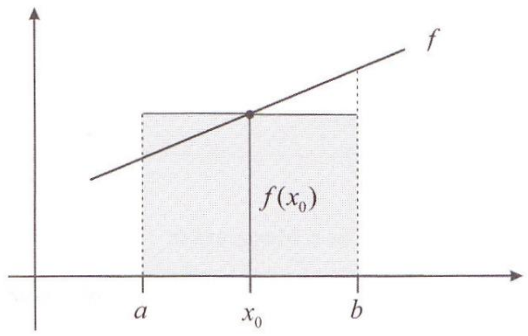
Die Rakete durchfällt 520 m.

Übungsaufgaben

Integrieren heißt Mitteln



Mittlerer Funktionswert in $[a,b]$



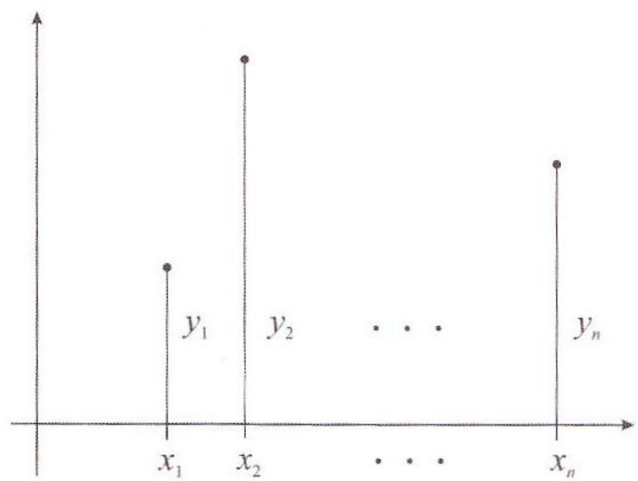
Mit dem mittleren Funktionswert wird der Flächeninhalt unter *f* als Rechteck realisiert.

$$I_a(b) = (b-a)\cdot f(x_0)$$

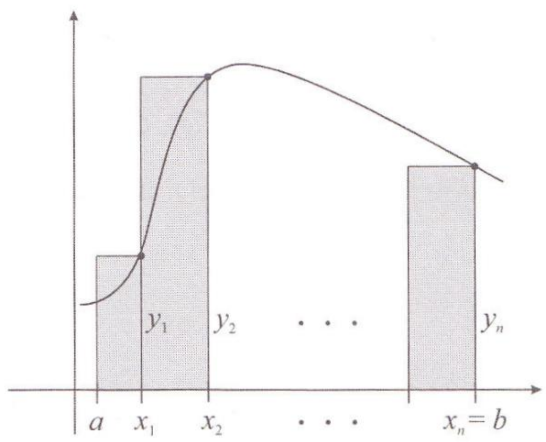
- Der Mittelwert ist über das Integral darstellbar

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} I_a(b)$$

- Arithmetisches Mittel als Mittelwert

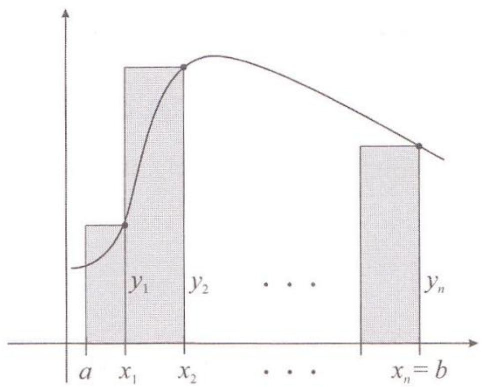


Die n Messpunkte



Wir denken uns die Messwerte als diskrete Realisierung eines stetigen Verlaufs.

Integrieren heißt Mitteln



Wir denken uns die Messwerte als diskrete Realisierung eines stetigen Verlaufs.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) && \text{(Auffassung als Funktionswert)} \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} && \text{(Übergang zu Flächen)} \\ &\approx \frac{1}{b-a} I_a(b) && \text{(Näherung durch das Integral)}\end{aligned}$$

- Unter der Zahl $\frac{1}{b-a} I_a(b)$ verstehen wir also den *Mittelwert der Fkt. f* im Intervall [a,b]

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} I_a(b)$$

Integrieren heißt Mitteln

LS

4 Mittelwerte von Funktionen

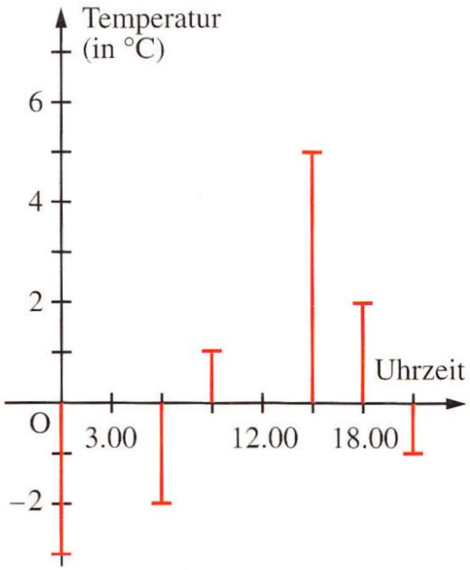


Fig. 1

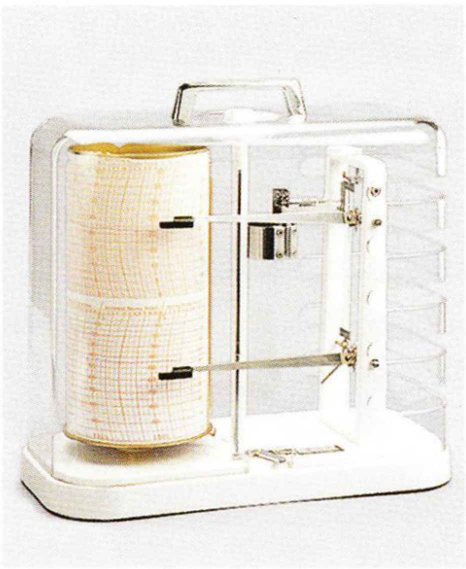


Fig. 2

1 An einem Ort wurde mehrmals am Tage die Temperatur gemessen. Fig. 1 zeigt das zugehörige Stabdiagramm. Wie könnte man damit eine mittlere Tagestemperatur bestimmen?

2 Ein Temperaturschreiber (Fig. 2) liefert einen kontinuierlichen Verlauf der Temperatur.
a) Wie könnte man mit einem solchen Graphen eine mittlere Tagestemperatur festlegen?
b) Welche weitere Möglichkeit für die Festlegung einer mittleren Tagestemperatur gibt es, wenn der Verlauf der Temperatur sogar durch den Graphen einer bekannten Funktion angenähert werden kann?

Integrieren heißt Mitteln

LS

Sind n Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$ gegeben, so nennt man die Zahl $m_n = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$ ihren Mittelwert oder genauer ihr arithmetisches Mittel.
Die Bildung eines Mittelwertes soll nun auf die Funktionswerte $f(x)$ einer auf einem Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f übertragen werden.

Dazu teilt man das Intervall [a; b] in n Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ ein. Aus jedem Teilintervall wird eine Stelle ausgewählt (Fig. 3); man erhält so n zugehörige Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Bildet man den Mittelwert m_n dieser Funktionswerte und ersetzt $\frac{1}{n}$ durch $\frac{h}{b-a}$, ergibt sich:

$$m_n = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$
$$= \frac{1}{b-a}(f(x_1)\cdot h + f(x_2)\cdot h + \dots + f(x_n)\cdot h).$$

Für $n \to \infty$ gilt $h \to 0$ und damit

$$m_n \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

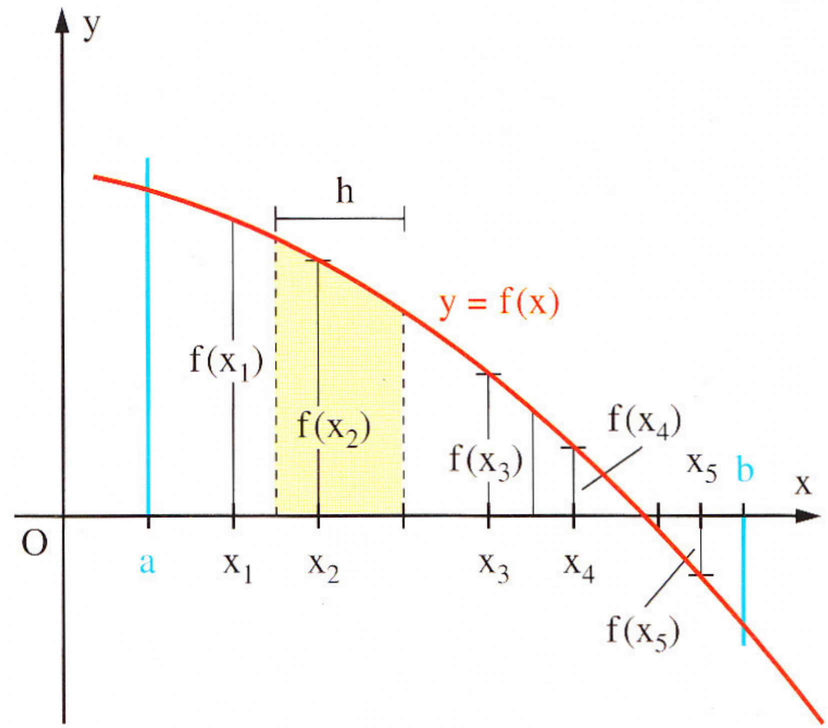


Fig. 3

Integrieren heißt Mitteln

LS

- Es wird auf das geometrisches Verständnis gebaut

Definition: Für eine auf einem Intervall [a; b] stetige Funktion f heißt

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ der **Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte von f auf [a; b]**.

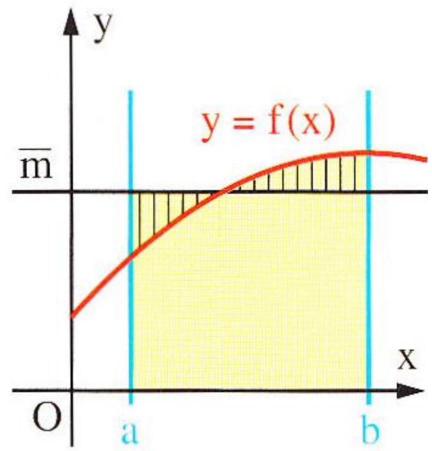


Fig. 4

Anschaulich ist der Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte von f die Breite eines Rechtecks (Fig. 4), welches dieselbe Länge und denselben Inhalt hat wie die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [a; b].

Integrieren heißt Mitteln

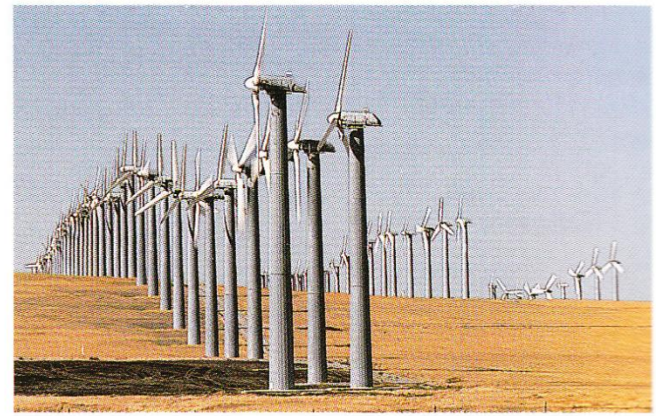
Die Lunge eines Erwachsenen hat eine innere Oberfläche von etwa 90 m² und enthält etwa 850 000 000 Lungenbläschen.

4 Bei einem Atmungszyklus, der 5 s dauert, gibt $V(t) = -0{,}037 \cdot t^3 + 0{,}152 \cdot t^2 + 0{,}173 \cdot t$ das Volumen (in dm^3) der Luft in den Lungen an zur Zeit t (in s). Bestimmen Sie das mittlere Volumen der Atemluft in den Lungen während eines Atmungszyklus.

Windgeschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$)			
	5.2	6.2	7.2
7^{00}	15	21	36
13^{00}	27	30	42
19^{00}	30	33	24

Fig. 2

5 Eine Messung der Windgeschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$) an drei Tagen ergab die Tabelle von Fig. 2. Bestimmen Sie einen Mittelwert von v und v^2 für die Zeit zwischen 7^{00} und 19^{00}, indem Sie
a) das arithmetische Mittel bilden
b) zunächst eine Parabel 2. Ordnung bestimmen und von dieser Funktion den Mittelwert berechnen.
Hinweis: Windenergie ist proportional zu v^2.



6 Ein Fahrzeug, das zur Zeit $t = 0$ s im dritten Gang mit einer Geschwindigkeit von $40 \frac{km}{h}$ fährt, beschleunigt im gleichen Gang und erreicht nach $t = 12$ s seine Endgeschwindigkeit von $85 \frac{km}{h}$. Bestimmen Sie
a) einen quadratischen Term für die Geschwindigkeit $v(t)$ zur Zeit t für $0 \leqq t \leqq 12$, der den in Fig. 3 gezeigten Verlauf ergibt.
b) die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ des Fahrzeuges zwischen 0 s und 12 s.
c) die Strecke, welche das Fahrzeug nach 12 s gefahren ist. (Es gibt 2 Lösungswege!)

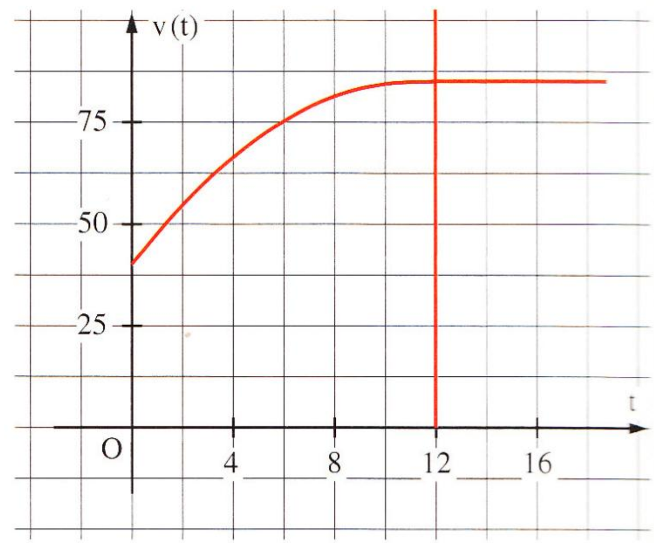


Fig. 3

Partielle Integration

- Aus der Produktregel kann ein Verfahren zur Bestimmung von Integralen gewonnen werden

$$f = u \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad f' = u'v + uv'$$

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

$$Wegen \quad \int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b \quad gilt$$

Satz 1: Sind u und v auf dem Intervall [a; b] differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungsfunktionen u′ bzw. v′, so gilt

$$\int_a^b \mathbf{u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx.} \qquad \textbf{(Produktintegration)}$$

Integrationsregeln

Integrationsregeln

- Idee zur Einführung

$$f(x) = x e^x$$

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x$$

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_0^1 x \cdot e^x\,dx$$

- Neugier wecken mit $\int_a^b \ln(x)\,dx$

$$\int_a^b \ln(x)\,dx = \int_a^b (\ln(x)) \cdot 1\,dx = [(\ln(x)) \cdot x]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} \cdot x\,dx$$

$$= [(\ln(x)) \cdot x]_a^b - [x]_a^b = [(\ln(x)) \cdot x - x]_a^b$$

- Sonderfall

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = [\sin(x)\sin(x)] - \int \cos(x)\sin(x)$$

$$\textit{zusammenfassen} \quad \textit{derselben} \quad \textit{Integrale} \quad \textit{liefert}$$

$$2\int \sin(x)\cos(x)dx = [\sin^2(x)]$$

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \tfrac{1}{2}[\sin^2(x)]$$

Integrationsregeln

Substitution

- Hier ist die Kettenregel Grundlage

  Sei F Stammfkt. von f und g ist diff`bar

$$H(x) = F(g(x)) \quad \Rightarrow \quad H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b$$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = [F(z)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Integrationsregeln

Bei der **Integration durch Substitution** wendet man die folgende Integrationsformel an:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz\,.$$

Bei der **Integration durch Substitution der Integrationsvariablen** wendet man die folgende Integrationsformel an:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\overline{g}(a)}^{\overline{g}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\,.$$

Integrationsregeln

Bestimmen Sie $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Lösung:

Substitution: $x = g(t) = \sin(t)$

Ableitung: $g'(t) = \cos(t)$

Umrechnung der Grenzen: Aus $\sin(t) = 0$ folgt $t_1 = 0$;

aus $\sin(t) = \frac{1}{2}$ folgt $t_2 = \frac{\pi}{6}$.

Durchführung der Integration:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(t))^2}} \cdot \cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,dt = \left[t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$$

Integrationsregeln

Integralrechnung

- Akzente für den Grundkurs:
  - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
  - Flächenberechnung durch Integration
- Akzente für den Leistungskurs:
  - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
  - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
  - Flächenberechnung durch Integration

Vorgaben für das Zentralabitur 2010

Aufgabenart

- Analysis

Bezüge zu den Vorgaben 2009

- *Inhaltliche Schwerpunkte*
  - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
  - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
  - Flächenberechnung durch Integration

LK Abiturprüfungsaufgabe 2009

http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

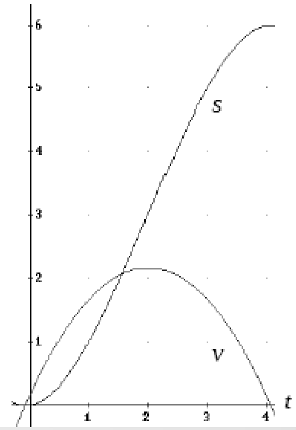
Im Rahmen eines Schulprojektes führen Schülerinnen und Schüler unterstützt durch die Polizei eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Auf einem 6 km langen Stück Landstraße werden nach Kilometer 1, 3 und 6 die Fahrzeiten gemessen. Die Messstrecke beginnt an einem Stoppschild; die zulässige Höchstgeschwindigkeit auf der Landstraße beträgt 100 km/h. Ihre Messergebnisse haben die Schülerinnen und Schüler in der folgenden Tabelle festgehalten:

Messung	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Zeitpunkt t in Minuten	0	1	2	4
Zurückgelegter Weg $s(t)$ in km	0	1	3	6

Die Funktion $s(t)$ beschreibt den zurückgelegten Weg vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t.

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist $v(t)$ und die Beschleunigung zum Zeitpunkt t wird mit $a(t)$ bezeichnet.

Es gilt: $s'(t) = v(t)$ und $v'(t) = a(t)$



LK Abiturprüfungsaufgabe 2009

http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2

a) Eine Schülergruppe hat die Messergebnisse mit einer Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades s modelliert, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Bestimmen Sie diese Gleichung. (6 Punkte)

[Zur Kontrolle: $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + \frac{1}{6}t$]

b) (1) *Geben Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v an und prüfen Sie, ob der Fahrer am Stoppschild tatsächlich gehalten hat.*

(2) *Prüfen Sie, ob er die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h eingehalten hat.*

(3) *Geben Sie die Gleichung der Beschleunigungsfunktion a an. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse über dem Intervall* $[0;2]$. *Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Wert* $v(2)$ *und interpretieren Sie die Differenz.* (17 Punkte)

c) (1) *Untersuchen Sie, für welches beliebige Zeitintervall* $[k;k+1], k \in \mathbb{R}$, *mit der Länge eine Minute die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs im betrachteten Messbereich maximal ist.*

(2) *Bestimmen Sie die Zeitpunkte* t_0 *im Intervall [1,5;2,5], für die die Momentangeschwindigkeit mit der Durchschnittsgeschwindigkeit von 127,5 km/h übereinstimmt.*

(13 Punkte)

LK Abiturprüfungsaufgabe 2009

http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2

(3) Die Beschleunigungsfunktion a hat die Gleichung $a(t) = v'(t) = -t + 2$.

Der Graph von a hat eine Nullstelle in $t = 2$.

Für die Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse gilt also:

$$A = \int_0^2 a(t)\mathrm{d}t \quad = \int_0^2 (-t+2)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right]_0^2 = 2.$$

Damit schließt der Graph von a mit der t-Achse im Intervall [0;2] eine Fläche mit 2 FE ein.

Die Geschwindigkeitsfunktion liefert an der Stelle $t = 2$ den Wert $v(2) = 2\frac{1}{6}$ (vgl. b(2)).

Mit dem Integral $\int_0^2 a(t)\mathrm{d}t = 2$ wird hier die Zunahme der Geschwindigkeit im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 2$ berechnet. Da aber das betrachtete Fahrzeug beim Start der Messung bereits eine Geschwindigkeit von 1/6 Kilometer pro Minute besaß, ergibt sich folglich

$$v(2) = 2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}.$$

Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich in allen Fällen als Summe der Anfangsgeschwindigkeit bzw. des Anfangswertes und des Wertes des Integrals über a im Intervall [0;2].

Lösung

Wachsender Umfang von Integrationsinhalten in der Oberstufe

Positive Verständnisentwicklung des Lehrplans oder erschwerende Verkomplizierung?

Positiv – verständnisfördernd	**Negativ – verständniserschwerend**
3 mögliche Zugänge geben Schülern die Möglichkeit sich auf „ihre Weise" dem Thema zu nähern	3 Herangehensweisen an Integration stiften bei schwachen Schülern größere Verwirrung (verlieren den Überblick)
Varianz der Aufgabentypen führt erst in die Tiefe des Integralbegriffs ein und schafft ein Verständnis davon	Einschränkung auf <u>eine</u> Annäherungsrichtung hilft schwachen Schülern ein Kalkül zu entwickeln

$\Rightarrow$ Positive Entwicklung, die zum Verständnis beitragen kann, wenn sie überlegt und abgewogen zum Einsatz kommt

Schlussbetrachtung

- Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart: Analysis verständlich unterrichten, München 2006.
- Freudigmann, Hans, u.a.: Lambacher Schweizer. Grundkurs Analysis, Stuttgart 2001.
- Freudigmann, Hans, u.a.: Lambacher Schweizer. Leistungskurs Analysis, Stuttgart 2002.
- Griesel, Heinz, u.a.: Elemente der Mathematik. Leistungskurs Analysis, Hannover 2001.
- Jahnke, Thomas (Hrsg.): Mathematik. Analysis. Cornelsen, Berlin 2001.
- Schweizer, Wilhelm: Lambacher Schweizer. Analysis, Stuttgart 1958.
- Schweizer, Wilhelm; u.a.(Hrsg.): Lambacher Schweizer. Analysis. Grundkurs – Gesamtausgabe, Stuttgart 1990.
- http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de

Literatur