Abstand windschiefer Geraden

Liebe 13er. Ich setze im neuen Jahr voraus, dass ihr euch mit dem Inhalt der Seiten 255-258 vertraut gemacht habt. Es geht hier um den Abstand windschiefer Geraden. Das Verfahren wird auf S. 255ff gut erklärt. Der senkrechte Abstand zwischen den Geraden kann ermittelt werden, indem man zwei (zunächst unbekannte) Punkte P und Q auf den Geraden wählt und das Skalarprodukt zwischen ihrem Verbindungsvektor und den Richtungsvektoren der Geraden Null setzt. Das ergibt 2 Gleichungen für die 2 Unbekannten μ und λ .

Die weiterführende Aufgabe 2 sowie die Aufgaben 3-5 sowie 7-9 üben und vertiefen das Verfahren. Die Aufgaben 8 und 9 führen noch eine neue Idee ein: hier wird der kürzeste Abstand mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt! Die Idee ist nahe liegend: Man stellt eine „Abstandsfunktion“ auf und bestimmt ihr Minimum (durch Null setzten der 1. Ableitung). Auf diese Methode werden wir im neuen Jahr noch mal einen Blick werfen…

Die Lösungen der Aufgaben finden sich unten:

8. Es gilt weiter $\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}10\\7,5\\0,3\end{pmatrix}=\overrightarrow{BP}$

Also: $\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}-8\\-7,5\\-0,3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

Weiter gilt: $\overrightarrow{BP}*\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=0$

$$-39,3+14\lambda=0$$

$$\lambda=\tfrac{393}{140}\approx 2,807$$

$\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}0,4214\\-1,8857\\2,507\end{pmatrix}$, $|BP|\approx 3,165$ km

8.3.2 Abstand zueinander windschiefer Geraden

2. (1) $\overrightarrow{PQ}=\left(\begin{pmatrix}4\\1\\-9\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}2\\7\\-6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right)$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}*\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=0\\ \overrightarrow{PQ}*\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=0\end{array}\right|$, also $\left|\begin{array}{l}-13\lambda+4\mu=14\\ -4\lambda+5\mu=-7\end{array}\right|$

$\lambda=-2$ und $\mu=-3$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, also $|PQ|=0$

Die Geraden schneiden sich im Punkt P = Q mit den Koordinaten (−2 | 1 | −6).

2. (2) Die Richtungsvektoren von g und k sind parallel zueinander. Die Richtung liefert

$\overrightarrow{PQ}=\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-4\\-6\\0\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}2\\7\\-6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right)$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0\\-10\\13\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-4\\-6\\0\end{pmatrix}$

$\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}*\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=0\\ \overrightarrow{PQ}*\begin{pmatrix}-4\\-6\\0\end{pmatrix}=0\end{array}\right|$, also $\left|\begin{array}{l}-13\lambda-26\mu=30\\ 26\lambda+52\mu=-60\end{array}\right|$

$\lambda=-\tfrac{30}{13}-2\mu$

Wir setzen z. B. $\mu=0$ ein und erhalten $\lambda=-\tfrac{30}{13}$.

Wir erhalten $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}\tfrac{60}{13}\\-10+\tfrac{90}{13}\\13\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}4,615\\-3,0769\\13\end{pmatrix}$

$$|PQ|=\tfrac{7}{13}\sqrt{689}\approx 14,134$$

Man kann also auf diese Weise auch den Abstand paralleler Geraden berechnen.

3. (1) Es ist f ∥ g: $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}*\begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}=-56+56\lambda+84\mu=0$

$\overrightarrow{PQ}*\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix}=84-84\lambda-126\mu=0$

Es gibt keine eindeutige Lösung (s. zum Weiterarbeiten 1.)

257 **3.** (2) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-12\\6\\20\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix}8\\6\\-12\end{pmatrix}$

Aus $\overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}8\\6\\-12\end{pmatrix} = 0$ folgt $\mu = -1$, $\lambda = 2$

Es ist $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$, also ist $(2 \mid -4 \mid 0)$ Schnittpunkt der beiden Geraden, ihr Abstand ist also null.

4. a) Die Geraden haben einen Schnittpunkt, Abstand null.

b) Abstand $\frac{8}{3}$

5. *z-Achse*

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \end{array} \right|$, also $\left| \begin{array}{l} -6\lambda + 2\mu = -2 \\ -2\lambda + \mu = -2 \end{array} \right|$

$\lambda = -1$ und $\mu = -4$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $|PQ| = \sqrt{8}$

257 **5.** *y-Achse*

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \end{array} \right|$, also $\left| \begin{array}{l} -6\lambda - \mu = -2 \\ \lambda + \mu = 1 \end{array} \right|$

$\lambda = \frac{1}{5}$ und $\mu = \frac{4}{5}$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-\frac{16}{5}\\0\\\frac{8}{5}\end{pmatrix}$, $|PQ| = \frac{8}{5}\sqrt{5} \approx 3{,}577$

x-Achse

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \end{array} \right|$, also $\left| \begin{array}{l} -6\lambda + \mu = -2 \\ -\lambda + \mu = 3 \end{array} \right|$

$\lambda = 1$ und $\mu = 4$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $|PQ| = 0$

g schneidet die x-Achse im Punkt $(4 \mid 0 \mid 0)$

6. Es ist in beiden Fällen ((1), (2)) jeweils $\vec{c} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Also liegt ein Trapez vor.

(1) Erforderliche Trapezpunkte: $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid -1 \mid 2)$, $D(2 \mid 6 \mid -4)$.
Inhalt: Länge der „Mittellinie" · Höhe.
Mittellinie: $\left|\frac{3}{4}\vec{a}\right|$; Höhe = Abstand von B zur Geraden AD = $|BQ|$.
Berechnen von Q: $\lambda = -\frac{1}{7}$; $Q\left(-\frac{2}{7} \,\middle|\, -\frac{6}{7} \,\middle|\, \frac{4}{7}\right)$.
$|BQ| = \frac{1}{7}\sqrt{630}$; $A = \frac{3}{28}\sqrt{630} \cdot \sqrt{56} \approx 20{,}12$

(2) Q: $\lambda = 0{,}1$; $Q(0{,}4 \mid 0{,}2)$; $\overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix}-2{,}1\\2{,}9\end{pmatrix}$; $A = \frac{3}{4}\sqrt{20} \cdot \sqrt{12{,}82} \approx 12{,}01$

7. a) Abstand: $\frac{1}{21}\sqrt{105} \approx 0{,}489$ (km)

b) $P\left(\frac{62}{21} \,\middle|\, \frac{53}{21} \,\middle|\, 2\right)$; $Q\left(3 \,\middle|\, \frac{55}{21} \,\middle|\, \frac{52}{21}\right)$; nach $t_1 = \frac{31}{2100}$ h, $t_2 = \frac{11}{2100}$ h.

c) Abstand: $d = \sqrt{\frac{105}{41}} \approx 1{,}6$ (km)

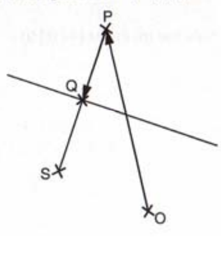
d) -

8. a)/b) Für alle möglichen Lotfußpunkte X gilt wie in der Aufgabe

$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}9\\16\\9\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$.

Alle möglichen Abstände errechnen sich als
$|\overrightarrow{PX}| = \sqrt{\overrightarrow{PX} * \overrightarrow{PX}} = \sqrt{418 + 246\lambda + 41\lambda^2}$
Die Funktion f: $\lambda \to |PX|^2$ hat die Ableitung $f'(x) = 246 + 82\lambda$.
Mit $f'(x) = 0$ gilt $\lambda = -3$; außerdem gilt $f''(x) > 0$.
Es ergibt sich derselbe Parameterwert wie in der Lösung der Aufgabe, also auch derselbe Lotfußpunkt.
Achtung: Fehler in der 1. Auflage.
Die Berechnungen zu Übungsaufgabe 3 von Seite 257 müssen entfallen.

c) Es gilt für den gesuchten Spiegelpunkt S: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ}$



258 **9.** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\lambda\\1-\lambda\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+4\mu\\-1\\-\mu\end{pmatrix}$

(1) $d^2 = (4\mu - \lambda)^2 + (-2 + \lambda)^2 + (-\mu - 1)^2$
$d^2 = 16\mu^2 + 8\lambda\mu + \lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2 + \mu^2 + 2\mu + 1$
$d^2 = 2\lambda^2 + 17\mu^2 - 8\lambda\mu - 4\lambda + 2\mu + 5$

(2) $d^{2'}(\lambda) = 4\lambda - 8\mu - 4$

$d^{2'}(\lambda) = 0$ für $\lambda = 2\mu + 1$

Man kann μ als konstant ansehen, da der Punkt Y beliebig gewählt wurde und wir den Punkt mit dem minimalen Abstand zu Y auf der Geraden h suchen.

(3) Wir setzen $\lambda = 2\mu + 1$ in die Gleichung unter (1) ein und erhalten
$d^2 = 9\mu^2 - 6\mu + 3$, also $d = \sqrt{9\mu^2 - 6\mu + 3}$

(4) $d^2(\mu)$ wird minimal für $d^{2'}(\mu) = 0$, also $18\mu - 6 = 0$, also $\mu = \frac{1}{3}$.
Es gilt: $d = \sqrt{2}$

(5) -

8.4 Vermischte Übungen

259 **1. a)** (1) Das Skalarprodukt zweier Seitenvektoren ist null.
(2) Die Längen zweier Dreiecksseiten sind gleich, d. h. z. B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
(3) Die Längen aller Dreiecksseiten sind gleich.

b) (1) Gleichschenkliges Dreieck $|AB| = |AC| = \sqrt{17} \neq |BC| = \sqrt{46}$, also nicht gleichseitig.
(2) Weder noch (s. 2a)).
(3) Weder noch.
(4) Gleichseitiges Dreieck: $|AB| = |BC| = |AC| = \sqrt{8}$
(5) Weder noch.
(6) Rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck
$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = 0$; $|AB| = |AC| = \sqrt{5}$

2. a) (1) Seitenlängen s. o.; $\alpha = 110{,}67°$, $\beta = \gamma = 34{,}67°$
(2) $|AB| = \sqrt{34}$; $|BC| = \sqrt{35}$; $|AC| = \sqrt{53}$;
$\alpha = 52{,}23°$; $\beta = 76{,}6°$; $\gamma = 51{,}18°$
(3) $|AB| = \sqrt{2}$; $|BC| = \sqrt{14}$; $|AC| = \sqrt{26}$;
$\alpha = 13{,}9°$; $\beta = 160{,}89°$; $\gamma = 5{,}21°$